Geometría sensible

Benoit Beckers

« Geometría sensible »

- Tesis doctoral -

Autor: *Benoit Beckers*

benoitbeckers@hotmail.com

Tutor & Director: *Profesor Rafael Serra Florensa*

Versión: *27 de marzo de 2005*

ETSAB – UPC

Prólogo

"Si les signes vous faschent,
ô quant vous fascheront
les choses signifiées"

Pantagruel [1]

En muchos campos de la investigación arquitectónica, se están desarrollando métodos algorítmicos esencialmente basados en la geometría: es el caso, por ejemplo, de los "métodos geométricos" aplicados en la acústica, en la iluminación – natural o artificial – o en la *renderización*. En los arduos problemas relativos al color, y quizás a la térmica, se siente también la necesidad de una interpretación geométrica adaptada a tales entornos.

¿Pero con qué geometría hemos de trabajar?

Una geometría que pueda integrar, desde luego, las diferentes propiedades perceptivas, con el fin de presentarse como una especie de *interfaz* entre percepción y expresión: es lo que llamaremos una geometría *sensible*.

Encontramos las premisas de tal enfoque en fragmentos presocráticos, en los escritos de Euclides (la "Óptica"), de Leonardo da Vinci o de Isaac Newton, por ejemplo.

Sin embargo, no se debe olvidar que la misma geometría, la geometría "histórica", nació en un entorno puramente perceptivo, nunca del todo abolido, a pesar de un lento movimiento de abstracción que pasa, entre otros, por Platón, Euclides (los "Elementos"), Monge y Poncelet.

Dos enfoques sobre un mismo problema: la geometría sintética, elegante, dominante en los manuales, pero inservible en lo que nos ocupa; la geometría sensible, que progresa a tientas, huérfana de su teoría, pero llena de promesas.

Los diferentes *capítulos* que forman este trabajo se deberían considerar más bien como meros "puntos", artículos autónomos - pero no independientes -, que progresan de un modo nada lineal en un campo carente de principio y de final. La geometría sensible remonta, indiferentemente, a tiempos míticos, o a los más antiguos autores que fijaron los mitos (Platón, Nicómaco o Proclo), o a los primeros entre los modernos que se ocuparon de teorizar la percepción (Lessings, Goethe, Itten), o a la muy reciente aceleración de los medios informáticos, que nos permite realizar ahora lo que ayer ni se podía imaginar. O mejor dicho, la geometría sensible está por empezar, y este texto no es más que un preludio.

No he querido por lo tanto imponer al lector el orden de mi relato: libre a él de componer su propio preludio, permutando a su conveniencia los capítulos autónomos, enriqueciéndolos con sus propias experiencias perceptivas, conduciéndolos hacia sus propias aplicaciones geométricas.

Los primeros puntos (1 a 5) son esencialmente introductorios. Se siente la necesidad de hacer intervenir la música (6 y 7) y, luego, de remontar a los pensadores presocráticos (8). Después, se discute el problema de la perspectiva central (9) y su ubicación entre distintos modos de representación (10 a 12). Un estudio de las diferentes progresiones (13) nos lleva entonces a reevaluar la "Óptica" de Euclides y el alcance de la perspectiva renacentista (14). Descrita a la manera de los dibujantes (15), la perspectiva central se muestra, gracias a sus invariantes (16), un modelo seguro de la mirada; aplicada a la ley de Weber-Fechner (17), permite generalizarla (18), como la propiedad fundamental de la percepción, que propongo llamar *escorzo*. Tras un ejemplo de aplicación (19), podemos entonces volver al problema del color (20) y a sus particularidades.

[1] "Pantagruel", François Rabelais (1483-1553), in "Œuvres complètes", Rabelais, éditions du Seuil, Paris, 1973.

En casi todos los capítulos aparecen largas citas de diversos autores. Sin embargo, esta forma dialogada no impide que cada capítulo, sin excepción, aporte alguna idea original, abriendo nuevas interpretaciones, sin impedir nunca al lector completarlas o rechazarlas – pero habrá de hacerlo de una en una, construyendo su propio razonamiento, como lo hice.

La literatura francesa distingue entre la "nouvelle" y el "récit": mientras que la *novela corta* tiene principio y final, el *relato* carece de ellos. El desarrollo del presente relato - ni la percepción, creo, ni la geometría se pueden novelar - está, como se verá, dentro-del-tiempo. Su redacción también, cuyo sentido ha de aflorar, no en las preguntas, ni en las respuestas, sino en el curso de una conversación retomada, cuyos orígenes se pierden en el pasado de la humanidad, y cuyo presente está aún lleno de vivos conflictos.

Habría sido fácil, pues, adoptar una forma más académica, y terminar formando las conclusiones como un pequeño ejército. Y dejar por delante unas "perspectivas de desarrollo" para iluminar el camino de las tropas. Pero no lo he querido hacer, creyendo deberme más a mi tema que al lector impaciente:

En tercer lugar, porque, en un tema que ha nacido de la práctica, las "perspectivas de desarrollo" siempre preceden a su teorización, y los programas venideros deberán más a sus antecesores que a un texto que no pretende ofrecer ningún método, ni siquiera un marco definido, sino, en un plano diferente, una interpretación de lo que hacemos, y de lo que aún no hacemos.

En segundo lugar, porque la sincera inquietud de una conversación solícita es el tono natural de la sensibilidad, y este orden atento se perdería por completo al vertirlo en un molde que no le conviene. El ojo y el oído nos acompañan desde siempre, y sólo podemos interrogarlos *in medias res.*

En primer lugar, porque sería traicionar la geometría sensible que librarla a las exigencias de su eterna enemiga, la escolástica, aquel monstruo frío mil veces rematado y, sin embargo, inmortal, como todas las quimeras que los hombres se han inventado para hacerlos sufrir sin ofrecer nunca nada a cambio...

En este texto, se habla, esencialmente, de arquitectura. De la arquitectura actual, con la evolución de sus herramientas, y luego, de sus teorías. Para ello, se remonta muy lejos, más allá incluso de los presocráticos. Pero no en una perspectiva historiada: en el enfoque aquí propuesto, los griegos no son nuestro pasado, son nuestro límite. Somos nosotros, despojados de muchos recursos, cómodos y útiles, pero que debemos, llegados aquí, cuestionar. Somos nosotros, provistos, únicamente, de los dos inventos supremos de la humanidad: el ojo, y el oído.

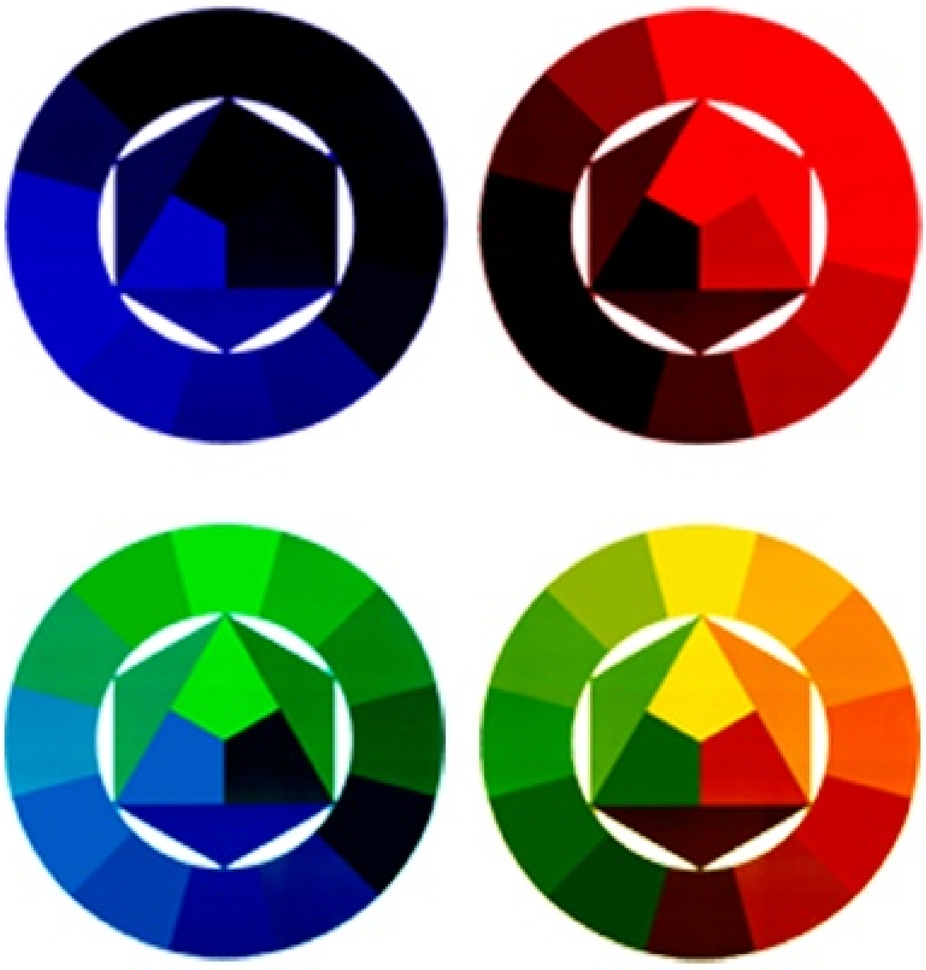
En las páginas de izquierda, aparecen muchas imágenes, que no se deben considerar como ilustraciones del texto: al hacerlo, se perdería irremediablemente el equilibrio entre el ojo y el oído, que sólo el texto solo – con sus pocos esquemas explicativos – puede cobijar. Estas imágenes ofrecen un complemento, que se acerca a veces y otras se aleja, a su fantasía, del texto vecino. Idealmente, una serie de sonidos y de piezas musicales debería hacer lo mismo, del otro lado del texto. Como no disponemos del soporte adecuado, el lector la habrá de imaginar, como deberá hacerlo, por cierto, con los colores reales de las imágenes, aquí forzosamente reproducidas según la solución una y trina del crédulo tintero, y de sus pobres huellas digitales.

En Barcelona, marzo de 2005

Índice

- 1 -

¿Cuántos son los colores?



Las disimetrías de esta figura denuncian la total incompatibilidad entre el sistema de doce colores equiparables propuesto por Johannes Itten y el sistema RGB. En particular, el pobre dicromo GB (ab.iz.), comparado con el dicromo RG (ab.dr.), mucho más rico, muestra la notable reducción que el tratamiento informático estándar (RGB + CMYK) opera en los matices azul-verde. Las imágenes tratadas por el ordenador no sólo ven sus colores fuertemente modificados, sino que resulta casi imposible corregirlos en el sentido de un sistema cromático que no sea el propio. Además, ni la tricromía de la pantalla ni la cuatricromía de la impresora permiten reproducir todos los colores visibles. Por lo tanto, nunca hay que fiarse de las imágenes proyectadas o impresas...

El círculo cromático de J. Itten pasado por filtros RGB: monocromo "azul" (B), monocromo "rojo" (R), dicromo "verde-azul" (GB), dicromo "rojo-verde" (RG).

1. ¿Cuántos son los colores?

“No hay más de cinco tonos musicales y, sin embargo, sus combinaciones producen más melodías de las que podamos oír; no conocemos más de cinco colores primarios y, no obstante, sus combinaciones producen más tintes de los que podamos ver”.

Sun Tsu Ping Fa (~ 345 a.C.)[1]

En la tradición china, estos colores son, además del negro y del blanco, el rojo, el azul/verde y el amarillo. Mezclando estos tres colores primarios, controlando su saturación y luminosidad mediante el blanco y el negro, se da un número indeterminado de combinaciones...

El razonamiento expresado por Sun Tsu sugiere, pues, la idea de que todos los colores puedan obtenerse a partir de la mezcla de tres. Las pantallas actuales (sistema RGB) o el modo común de impresión (sistema CMYK, es decir: tres colores más el negro) funcionan así.

Ahora, sabemos que no todos los colores surgen de la combinación de tres luces o de tres tintas: aunque los matices empleados fueran puros, faltarían todos los demás colores saturados, y muchas combinaciones de estos quedarían fuera de alcance para las mezclas de aquellos.

Los pintores saben por experiencia que necesitan muchos pigmentos distintos, con alto grado de pureza, para obtener una mayor variedad en sus composiciones: el número de colores necesario es, en realidad, ilimitado.

No obstante, el postulado de tricromaticidad nació seguramente en el entorno de los pintores. Mezclando un color cualquiera con blanco y negro, se obtiene un monocromo. Con dos colores, se entra en un mundo a la vez rico y limitado. Los mejores efectos se obtienen con dos colores complementarios, y van claramente más allá de las posibilidades expresivas del monocromo. Por ejemplo, con el naranja y el azul, se puede sugerir un relieve inalcanzable con el solo manejo del blanco y negro. Sin embargo, al añadir un color más, se produce un verdadero salto cualitativo, una explosión de colores, que permite ya abordar plenamente la imitación del mundo coloreado. Un cuarto color ya no producirá tanta diferencia...

Este es el sentido que debemos otorgar al *postulado de tricromaticidad*, base del razonamiento de Sun Tsu.

“Se supone generalmente, desde la época de Newton, que al separarse los rayos de luz tanto como es posible por refracción, dejan ver siete colores relacionados unos con otros, en su extensión, por proporciones análogas a las que encontramos en la escala ascendente del modo menor en música. Desgraciadamente, las observaciones eran imperfectas y la analogía puramente imaginaria”

Thomas Young (s. XIX)[2]

Los colores de Isaac Newton son: el violeta, el añil, el azul, el verde, el amarillo, el naranja y el rojo. A pesar de las objeciones de Young, esta lista de colores ha cobrado una gran importancia en la mentalidad occidental, desde la famosa carta a Oldenburg[3] (1672), que los menciona por primera vez. Todavía se enseña en las escuelas a pintar el arco iris con estos siete colores, incluyendo el naranja, y el curioso añil, dos tonos que Newton ha, por así decirlo, inventado.

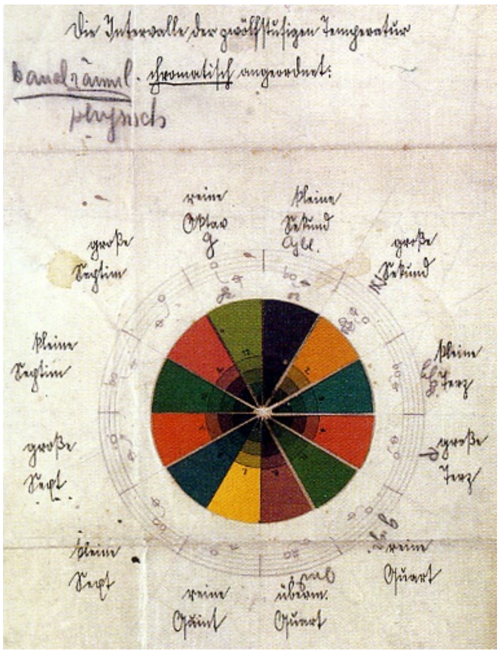
A través del prisma, el siglo XVII ha descubierto el orden físico de los colores puros. Sea por las interferencias luminosas, sea por las características fisiológicas del ojo humano, el espectro no se presenta como una gradación continua, sino que discernimos en él unas bandas de color, sin límites precisos, de diferente extensión, pero numerables y nombrables. Newton se valió de

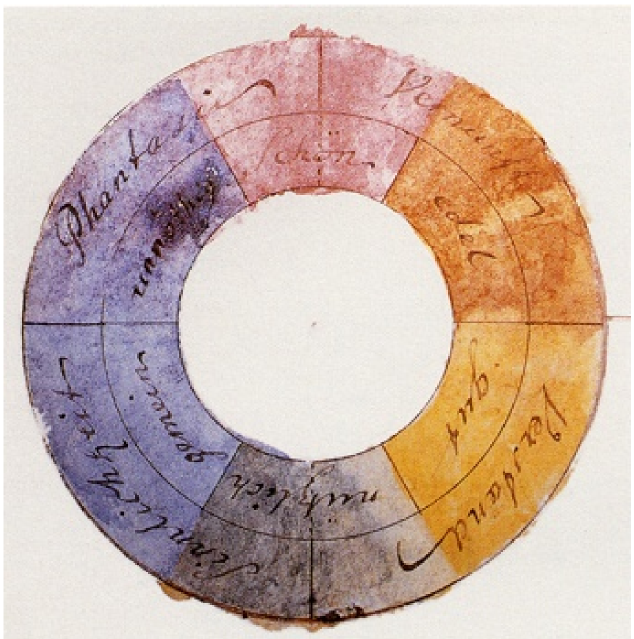
---

1 Citado en: “Traité des couleurs”, Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.

2 Citado en : “Traité des couleurs”.

3 “The Philosophical Transactions of the Royal Society of London”, 6 (1671/2), pp. 3075-8.





En su *círculo sonocromático* (1919), el compositor dodecafonista Mathias Hauer, amigo e inspirador de Johannes Itten, alterna los tonos fríos y cálidos, que hace corresponder con los doce intervalos de la escala musical (ab.iz.), y no con las notas en sí, como solían hacerlo de forma inconsecuente muchos "sinestesistas" de la época. En su propio círculo, Itten construye doce colores equidistantes (ar.) correspondiendo al espectro newtoniano, a diferencia de su otro gran inspirador, Goethe, cuyo círculo rechaza el verde, considerado como color de mezcla (ab.dr., ver p. 18 iz.).

Los círculos cromáticos de J. Itten ("Arte del color"), de M. Hauer (documento suelto, con anotaciones de Itten) y de J. W. Von Goethe ("Teoría de los colores").

las proporciones propias a la escala musical frigia para determinar los centros de siete bandas de color, asociadas luego a siete notas musicales.

"Como introducción a la enseñanza constructiva de los colores, daremos el círculo cromático en doce partes generado a partir de los colores primarios: amarillo, rojo, azul. Se sabe que el que percibe los colores de forma normal es capaz de hallar un rojo que no sea ni azulado ni amarillento, de hallar un amarillo que no sea ni verdoso ni rojizo, y un azul que no sea ni verdoso ni rojizo. Se aconseja, para verificar cada color, considerarlo delante de un fondo gris neutro.

Los colores primarios deben elegirse muy cuidadosamente.

Emplazamos los tres colores primarios en un triángulo equilátero de modo que el amarillo esté arriba, el rojo abajo a la derecha y el azul abajo a la izquierda. El triángulo está inscrito en un círculo, donde construimos un hexágono. En los triángulos restantes, extendemos los tres colores mixtos, constituidos cada uno por dos de los colores primarios. Obtenemos así los colores secundarios.

amarillo y rojo = naranja   amarillo y azul = verde   rojo y azul = violeta

Los tres colores secundarios deben mezclarse con mucha exactitud; no deben tender ni hacia uno de los colores primarios ni hacia el otro. La experiencia muestra que los colores mixtos secundarios no se encuentran sin dificultades. El naranja no debe ser ni demasiado rojo ni demasiado amarillo, el violeta no debe ser ni demasiado rojo ni demasiado azul y el verde no debe ser ni demasiado amarillo ni demasiado azul en la mezcla.

Luego, a distancia conveniente del primer círculo, trazamos otro, formando una franja circular que partimos en doce sectores iguales. En este anillo circular llevamos en los emplazamientos correspondientes los colores primarios y secundarios, de modo que entre dos colores se encuentra cada vez un sector vacío.

En estos sectores vacíos llevamos entonces los colores terciarios, consistiendo en mezclas de un color primario con un color segundario. Obtenemos así un amarillo-naranja, un rojo-naranja, un rojo-violeta, un azul-violeta, un azul-verde y un amarillo-verde.

Así se realiza un círculo de doce colores equidistantes, donde cada color toma su sitio no intercambiable. Los colores se siguen según el orden del arco iris y del espectro.

Isaac Newton ha obtenido este círculo cromático permanente añadiendo al espectro de los colores del prisma el púrpura que le faltaba. El círculo cromático se completa por lo tanto constructivamente. Los doce colores están dispuestos a intervalos iguales y los que están enfrentados son complementarios.

Estos doce colores pueden en todo momento representarse exactamente y todas sus variaciones son fáciles de clasificar. Establecer círculos cromáticos de 24 o hasta cien colores es en mi opinión una pérdida de tiempo que no significa nada, eso carece de valor práctico para el artista colorista. ¿Qué artista puede representarse sin algún medio auxiliar el color nº 83 del círculo cromático en 100 partes?

Mientras nuestras nociones referidas a los colores no se corresponden con representaciones coloreadas fijadas con precisión, ninguna discusión útil a propósito de los colores es posible. Hay que ver los doce tonos de colores con la misma precisión con que el músico discierne las doce notas de su escala.

Delacroix había montado sobre una pared de su taller un círculo cromático, sobre el cual estaban inscritas para cada color todas las combinaciones posibles. Los impresionistas, Cézanne, Van Gogh, Signac, Seurat y otros honraban a Delacroix como un gran maestro del color. Delacroix y no Cézanne es el fundador de este movimiento de la pintura moderna que se esfuerza por edificar sus obras sobre principios concerniendo el color que sean objetivamente captables y lógicos, y así obtener en sus trabajos un grado superior de orden y verdad."

Johannes Itten[1]

[1] "Art de la couleur", Johannes Itten, versión francesa de Ré Soupault, Dessain & Tolra, 1985.

En el siglo XVII, los dibujantes italianos suelen utilizar en contraposición el lavado marrón (o la sanguina) y el lavado azul, para sugerir efectos de profundidad, mediante el contraste cromático cálido-frío en su interpretación cercano-lejano.

Dibujo en aguadas marrón e índigo de Giacomo Ligozzi (hacia 1610-1620).

En “Arte del Color”, Itten propone una síntesis entre el postulado de tricromaticidad y la descomposición espectral de la luz blanca. Pero su enfoque es diferente. Combina en realidad un acercamiento técnico a la mezcla sustractiva de pigmentos con una definición cultural de los colores fundamentales: piensa como un pintor europeo del siglo XX.

“El que percibe los colores de forma normal es capaz de hallar un rojo que no sea ni azulado ni amarillento”: es decir que una persona formada a la pintura occidental entiende lo que significan, para nosotros, las palabras “rojo”, “azul”, “amarillo”. Así definidos, los tres primarios engendran a su vez, como secundarios, los tres otros colores cuyo nombre es corriente en nuestros idiomas: “verde”, “violeta”, “naranja”: *exit* el curioso “añil” de Newton...

Compárense estos seis colores con los que se emplean actualmente en la informática: los primarios “R”, un rojo amarillento, “G”, un verde amarillento, “B”, una especie de añil oscuro; luego los secundarios “Cian”, un término homérico cambiado de sentido para aplicarse a un azul verdoso muy brillante, “Magenta”, un púrpura tan brillante que es irreconocible como tal. Sólo el secundario “Amarillo” corresponde bien a la palabra que lo describe.

En vez de dar nombres específicos a sus colores terciarios, Itten los llama simplemente amarillo-naranja, rojo-naranja, rojo-violeta, azul-violeta, azul-verde y amarillo-verde. Eso corresponde también a la voluntad de no forzar el idioma más allá de su uso corriente. Tocamos aquí a una constante lingüística en cuanto a la percepción. Para la sensación de temperatura, tenemos “caliente”, “tibio” y “frío”, a los cuales podemos añadir, sin forzar demasiado: “hirviente” y “helado”. Cinco términos por lo tanto. En música, tenemos los nombres de las siete notas de la escala. Cinco, seis o siete: esta es la precisión del idioma corriente, un primer límite a la descripción de los fenómenos perceptivos.

Pero las personas más entrenadas alcanzan rápidamente un segundo límite. En la industria farmacéutica, donde se utilizan a menudo códigos de color para distinguir los productos, se ha mostrado que no conviene superar una quincena de matices. Más allá, los empleados empiezan a confundirse. En la música europea, con las alteraciones, se manejan unos doce intervalos distintos. Resulta difícil dominarlos, pero la mayoría de los músicos lo consiguen. En cambio, sólo un cantante excepcional podría dominar una escala de cuartos de tonos, con 24 intervalos.

Itten no dice otra cosa, para justificar su círculo de doce colores. Doce es un nombre razonable, y tiene una ventaja sobre sus vecinos inmediatos: se divide por dos, tres, cuatro y seis, por lo cual ofrece muchas posibilidades de simetría y composición, que se aprovecharán, ya con el círculo cromático, y más aún, al final del libro, con la esfera de los colores.

Pero Itten alude a otra justificación: equipara los doce colores de su círculo cromático a las doce notas de la escala musical.

Sun Tsu, Newton e Itten, en contextos muy diferentes, se valieron de la música para contestar a la pregunta inicial: ¿Cuántos son los colores? La música china es pentatónica. En la época de Newton, triunfaba el sistema tonal, heptafónico. Itten fue amigo de los primeros compositores dodecafonistas. La música les dio, por lo tanto, tres respuestas distintas...

Origen de las ilustraciones

p.002 iz.: - "Círculo cromático" de J. Itten, *in* "Art de la couleur", Johannes Itten, Dessain & Tolra, 1985. 4 filtros RGB.

p.003 iz.: - "Círculo cromático" de J. Itten, *in* "Art de la couleur", Johannes Itten, Dessain & Tolra, 1985.

- "Círculo cromático" de Mathias Hauer, con anotaciones de Johannes Itten, 1919-1920 (Zúrich, Annelise Itten), *in* "Analogías Musicales", catálogo de la exposición epónima, comisario: Javier Arnaldo, Fundación Caja Madrid – Museo Thyssen Bornemisza, Madrid, febrero - mayo 2003.

- "Círculo cromático" de J. W. Goethe *in* "Teoría de los colores", Johann Wolfgang von Goethe, Colegio Oficial de Arquitectos Técnicos de Murcia, 1999.

p.004 iz.: - Dibujo en aguadas marrón e índigo (hacia 1610-1620) de Giacomo Ligozzi (Paris, Musée du Louvre, Cabinet des dessins, inv.5044), *in* "Bleu: histoire d'une couleur", Michel Pastoureau, Éditions du Seuil, 2000.

- 2 -

La luz y el sonido

En un entorno anaranjado, el gris del carboncillo se vuelve azulado para el ojo, debido al contraste simultáneo; así, en este *monocromo* - que incluye, no obstante, los polos cromáticamente neutralizados del contraste claro-oscuro (el blanco y el negro) -, Leonardo Da Vinci logra sugerir, tan fuerte como sutilmente, un efecto de profundidad, mediante un contraste cálido-frío que refuerza los planos del claroscuro, sin utilizar, empero, ningún tinte azul...

Cabeza de mujer, Leonardo Da Vinci (1500), dibujo al carboncillo con albayalde sobre papel marrón.

2. La luz y el sonido

El ojo percibe la luz, una onda. El oído percibe el sonido, otra onda. Por *onda*, entendemos un comportamiento: el serpenteo de la víbora, los rizos en la superficie de un estanque: oscilaciones que se propagan.

Cada vibración se caracteriza por su intensidad y su frecuencia, en cada momento y en cada lugar de su propagación. El tiempo participa luego dos veces: hay una velocidad de oscilación, y otra de propagación. Así, las ondas se desenvuelven en cuatro *dimensiones*: la intensidad, la frecuencia, el tiempo y el espacio.

La teoría ondulatoria nos ofrece aquí un marco, que facilita la comparación entre luz y sonido, descritos con los mismos parámetros, sufriendo los mismos fenómenos: reflexión, refracción, difusión, difracción, interferencias.

En cuanto a la luz, esta teoría fue desconocida por la mayoría de los autores que nos ocupan, y ha sido luego generalizada por la física del siglo XX, combinándose con la teoría corpuscular. Al parecer, corremos por lo tanto un doble riesgo de anacronismo: prestar al pasado ideas entonces ignoradas, ignorar los últimos pasos de la ciencia.

> "Newton pensaba que la luz se compone de "corpúsculos" y tenía razón (aunque el razonamiento que lo había conducido a esta conclusión era falso). Hoy, sabemos que la luz se compone de partículas, porque poseemos instrumentos extremadamente sensibles que hacen "clic" cada vez que reciben luz, y eso aún si la intensidad de la luz se reduce considerablemente: los "clic" son los mismos, sólo su número disminuye. Luego, la luz es análoga a unas gotas de lluvia (las gotas de luz se llaman "fotones") y, para una luz de un solo color, las gotas de luz tienen todas el mismo tamaño.
>
> No podría insistir demasiado sobre este aspecto de la luz: la luz se compone de partículas. Es muy importante - particularmente para los que habéis ido a la escuela, donde se os ha enseñado que la luz se comporta como una onda - saber que la luz se comporta como partículas. Creedme: la luz se comporta en realidad como partículas."
>
> *Richard Feynman*[1]

La electrodinámica relativista y cuántica precisa y modifica la teoría ondulatoria, pero solamente para velocidades considerables y dimensiones infinitesimales: nada que invalide o complemente la teoría anterior para la escala de la percepción humana. En los actuales programas de renderización, se utiliza el método de "trazado de rayos", que consiste en asimilar toda fuente de luz a un gran número de *rayos*, o partículas, que recorren luego el espacio visual. A estas partículas virtuales, se las suele llamar "fotones", pero no tienen nada que ver con los corpúsculos que describe Feynman. De hecho, el mismo método se utiliza en programas de acústica, y no ha faltado quién llamara a los rayos acústicos "fonones", con la misma legitimidad, aunque todo el mundo sabe que no existen realmente partículas de sonido. De hecho, estas analogías ambiguas son inútiles fuentes de confusión, y la intromisión de conceptos relativistas o cuánticos en la teoría de la percepción constituye el verdadero anacronismo: ¿Cómo se iba a valer el mundo sensible de nociones que han sido desarrolladas explícitamente fuera de él?

Un problema más delicado es el de expresar en los términos de la física ondulatoria razonamientos anteriores a su elaboración. Para ello, no es suficiente aclarar que se trata solamente de un vocabulario conveniente, que nos permite traducir Sun Tsu, Aristóteles o Newton al mismo idioma. Cabe averiguar que estos autores distinguían en el sonido y en la luz los aspectos de frecuencia y de intensidad (aunque no los llamaran así), y luego que sentían el paralelismo, en ambos aspectos, entre el sonido y la luz.

---

[1] Citado en: "Traité des couleurs", Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.

El rostro de Ana, afectado por el contraste simultáneo, se tiñe de azul, y pasa, por el contraste cálido-frío resultante, y por la sombra donde se retrae, al segundo plano, mientras que María y Juan Bautista, inclinando el busto hacia adelante, alcanzan el plano luminoso que domina Jesús, resplandeciendo en el centro cromático del cuadro.

"La Virgen y su hijo con Santa Ana y el joven San Juan Bautista", Leonardo Da Vinci (1501), dibujo al carboncillo con albayalde sobre papel marrón.

En la música, la frecuencia dominante de un sonido se identifica como *altura* y se distingue claramente de su intensidad (o "fuerza", o "volumen"). En pintura, el término "color" ha sido siempre más ambiguo. Por ello, llamaremos *color en sí* la frecuencia dominante de una luz (sea directa o refleja), para separarla claramente de su intensidad (o "fuerza" o "brillo"). En el "color", muchos autores confunden los aspectos de frecuencia y de intensidad. "Color" llega entonces a ser sinónimo de "luz" (sentido que adoptaremos aquí, siempre que no se especifique lo contrario). Esta confusión del idioma produce a veces errores de interpretación; incluso en autores contemporáneos. Nos vemos así autorizados a reconocer siempre estos errores como tales, y no a achacarlos a una visión distinta del mundo.

El paralelismo entre intensidad del sonido e intensidad de la luz es evidente: una luz intensa *deslumbra* o *ciega*, del mismo modo que un sonido intenso *aturde* o *ensordece*. La luz, como el sonido, deja de percibirse cuando se hace demasiado *débil*, *tenue*, *indiscernible*. En cada caso, hay por lo tanto, un umbral de la percepción y un umbral del dolor, entre los cuales, lejos de los cuales, las intensidades son relativas: entonces, un sonido no es absolutamente alto o bajo, sino más alto o más bajo que su vecino; un color no es absolutamente claro u oscuro, sino más claro o más oscuro que su vecino: eso es la *relatividad* de la percepción.

El paralelismo entre frecuencia dominante del sonido y de la luz es más curioso: ¿cómo es que Platón, Aristóteles, Sun Tsu o el mismo Newton, a pesar de ignorar perfectamente que la luz pudiera ostentar una frecuencia, a la manera del sonido, no han dudado nunca en comparar la paleta de colores con la escala musical? Quizás porque en ambos casos se da una propiedad perceptiva muy peculiar: el ojo y el oído perciben preferentemente la frecuencia como un fenómeno *discreto*. El artefacto que mejor ilustra nuestra percepción de la altura sonora no es la sirena, cuyo mugido sube y baja de forma continua, sino el teclado del piano: do, do sostenido, re, re sostenido, mi, fa,... Del mismo modo, el atributo de la diosa epónima, el arco iris, ostenta sus bandas de color: rojo, amarillo, verde,...

Sin embargo, el color y el sonido difieren sensiblemente en otro aspecto importante. La altura del sonido se percibe de modo tan relativo como su intensidad: la primera nota de una melodía no nos dice nada, pero, cuando suena la segunda, percibimos un primer *intervalo*, que podríamos repetir, igual, hacia una tercera nota, es decir: *transponer*. Podemos luego transponer toda la melodía, hacia arriba o abajo, y sigue siendo la misma melodía. Nada de eso con el color. Suponiendo que fuéramos capaces de percibir el intervalo entre cierto rojo y cierto amarillo, suponiendo que fuéramos capaces luego de transponerlo entre cierto verde y el violeta correspondiente, ¿percibiríamos luego ambos acordes como iguales?

La visión del color es una percepción peculiar, con un fuerte componente absoluto, quizás parangonable solamente con el sentido del gusto: damos a los colores nombres con un significado tan preciso como "ácido", "amargo", "dulce" o "salado". En cambio, los nombres de las notas musicales son de pura convención: sólo cobran sentido por referencia a un diapasón, cuando se forma un intervalo.

Otra comparación fértil entre luz y sonido se da cuando observamos la relación que mantienen ambas percepciones con la fuerza de gravedad. Sabemos que el oído interno es sede del sentido del equilibrio, y que una misión esencial de la vista - quizás la primera – es asegurarnos constantemente el horizonte, o la dirección vertical conyugada.

Más curioso resulta el hecho que asociamos de forma irrenunciable, en el aspecto frecuencial del sonido, el contraste grave/agudo con la oposición bajo/alto: cuando una vibración sonora se acelera, todos sentimos que sube, y nada nos puede hacer desistir de la impresión que los sonidos agudos se hallan por encima de los graves. Por ello, los músicos llaman *altura* la frecuencia dominante del sonido.

Esta analogía no se aplica en absoluto en el caso de la frecuencia dominante del color. En primer lugar, el orden natural de los colores puros quedó totalmente desconocido hasta el siglo XVII. Luego, el arco iris, el único fenómeno natural que nos podría imponer su orden, se

La observación de las interacciones entre la luz natural y el color local condujo Claude Monet y los demás impresionistas a rechazar los claroscuros, a favor de una generalización del contraste cálido-frío. En cambio, Pablo Picasso, en su "período azul", hace del mismo contraste un uso más deudor de las técnicas renacentistas.

"El parlamento de Londres en la niebla", Claude Monet; "Autoretrato", Pablo Picasso.

presenta a veces con el rojo arriba (arco primario), y otras con el rojo abajo (arco segundario). Por ello, en los libros, el espectro del color en sí suele presentarse horizontalmente y el rojo aparece a la izquierda o a la derecha, según el gráfico se comente en frecuencia o en longitud de onda...

En cambio, la intensidad de la luz se asocia fácilmente a la fuerza de gravedad, porque lo oscuro nos parece más denso, más pesado, y lo claro más ligero, aéreo. Eso no ocurre con el sonido: cuando se hace más intenso, no nos parece que suba o baje, sino que se extiende y amplifica, por lo cual solemos referir dicha intensidad a un *volumen sonoro*.

Por ello, encontramos, excepcionalmente, expresado por algunos autores, un paralelismo directo entre la frecuencia del sonido y la intensidad del color, como en el caso siguiente:

"El que no sea capaz de distinguir la diferencia entre una nota más alta y otra más baja, probablemente no debería hacer música.

Si se aplicara una conclusión paralela al color, casi todo el mundo resultaría incompetente para su utilización correcta. Son muy pocas las personas capaces de distinguir una intensidad luminosa alta de una baja (lo que se suele llamar valor alto y bajo) entre tonalidades diferentes. Ello es cierto a pesar de nuestra lectura cotidiana de numerosas imágenes en blanco y negro."

Josef Albers[1]

Al principio de "La interacción del color", J. Albers estudia el paralelismo convencional entre frecuencia del sonido y frecuencia de la luz. Pero, cuando llega a discutir la relación entre percepción y gravedad, es la intensidad de la luz que se compara con la altura musical.

Podríamos luego concluir que la relación entre la fuerza de la gravedad y la percepción produce en esta una especie de quiasma, pero incompleto, ya que a nadie se le ocurriría establecer un paralelo entre la intensidad del sonido y el color en sí.

Finalmente, se establece otro paralelo, a otro nivel, entre la audición de la frecuencia y la visión del espacio. Ambas dimensiones son tratadas de manera semejante por los órganos receptores correspondientes: según la ubicación espacial de la luz percibida, se excita determinada zona de la retina; según la ubicación frecuencial del sonido percibido, se excita determinada zona del órgano de Corti. Así, una luz que llega desde arriba (abajo) será percibida en la parte inferior (superior) de la retina, un sonido agudo (grave) será percibido al principio (en el fondo) de la cóclea.

Esta discriminación por zonas ha hecho del ojo un órgano más especializado en la percepción del espacio, y del oído un órgano más especializado en la percepción de la frecuencia. Ambas prioridades se hallan diferentemente compensadas: gracias a la forma de la oreja, el oído es capaz de percibir el espacio (con cierta torpeza), mientras que la colaboración entre los tres tipos de conos en la retina confiere al ojo humano una capacidad de percibir la frecuencia casi única entre los mamíferos (pero no exenta, tampoco, de cierto grado de simplificación).

[1] "La interacción del color", Josef Albers, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Forma, 1979.

Origen de las ilustraciones

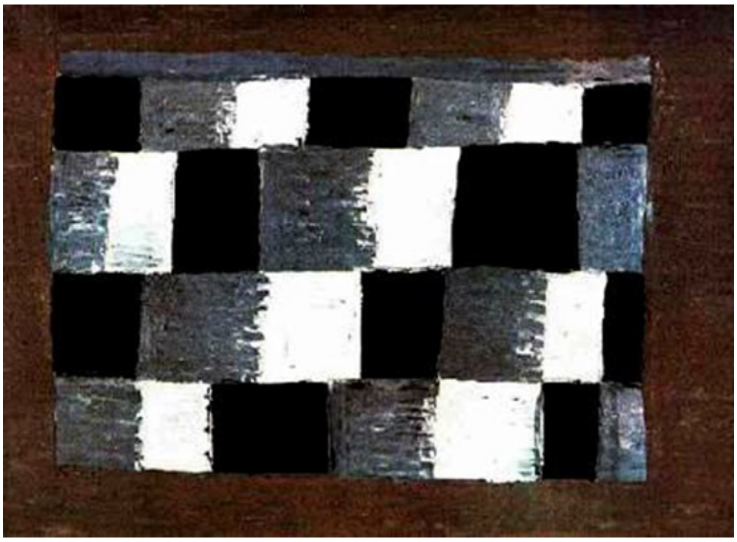
p.006 iz.: - Cabeza de mujer (1500) de Leonardo Da Vinci, dibujo al carboncillo con albayalde sobre papel marrón (Florencia, Galleria deggli Uffizi), *in* http://www.grandspeintres.com/vinci/galerie.

p.007 iz.: - La Virgen y su hijo con Santa Ana y el joven San Juan Bautista (1501) de Leonardo Da Vinci, dibujo al carboncillo con albayalde sobre papel marrón, 104.6 x 141.5 cm (London, National Gallery), *in* http://www.grandspeintres.com/vinci/galerie.

p.008 iz.: - "El parlamento de Londres en la niebla" de Claude Monet, *in* "Art de la couleur", Johannes Itten, Dessain & Tolra, 1985.
- "Autoretrato" de Pablo Picasso (Museo Picasso de Barcelona), *in* postal n° 545 del museo, Barcelona, 2003.

- 3 -

El ojo y el oído



Un tablero es una matriz, que puede leerse horizontal, vertical o diagonalmente. Los colores añaden eventualmente una tercera dimensión, sugiriendo la gravidez (claroscuro) o la profundidad (cálido-frío). Se da también un juego entre la separación neta de las casillas, o su disolución mediante gradaciones. En 1930, Paul Klee compone varios tableros, en busca del tiempo y de sus ritmos; volverá luego de forma más literal al ajedrez en "Überschach", un óleo de 1937.

"Tempo of Three, Quartered" y "Rítmico", Paul Klee (1930).

3. El ojo y el oído

Llamamos *ojo* el cerebro condicionado por la visión, y *oído* el mismo cerebro condicionado por la audición. La conformación del cerebro humano a sus órganos es el resultado de un largo proceso evolutivo, y nos es imposible imaginar una mente autónoma, separada de los sentidos. Ni siquiera un ciego de nacimiento nos podría contar cómo sería el hombre sin sus ojos.

"Hasta hace poco, ejercía en Essen el cirujano oftalmólogo Meyer-Schwickerat, internacionalmente famoso por su método de efectuar intervenciones en la retina con luz fuertemente enfardelada [luz de láser]. Leí hace años un comentario suyo que parecía, a él tal vez menos que a mí, una inversión de valores. Dijo que cuando intervenía los ojos, en el fondo operaba el cerebro.

Me impactó esta observación, porque en mi actividad profesional como diseñador gráfico yo había llegado tempranamente a la convicción de que no había solamente un pensar lógico y calculador, sino un pensar en imágenes, un pensar visual. En los años cincuenta, esto se oponía diametralmente a la tradición científica de la edad moderna, según la cual, percibir y pensar son dos cosas distintas."

Otl Aicher[1]

La diferencia fisiológica principal entre la vista y el oído consiste en que podemos dirigir la mirada, y cerrar los ojos, mientras que nuestros oídos registran continuamente la totalidad del campo sonoro circundante. Un sonido siempre igual, sin evolución, o que evoluciona de manera repetitiva, se nos hace rápidamente insoportable, por rica y variada que sea su estructura frecuencial, porque no podemos mover en él nuestra fantasía sin sentirlo a la vez continuamente presente, en su totalidad. Para ser agradable, un "paisaje sonoro" necesitará luego imperativamente estar sometido a cambios continuos e importantes, al contrario de su equivalente visual, que la mirada puede recorrer indefinidamente, creando su propio movimiento en la fijeza del entorno.

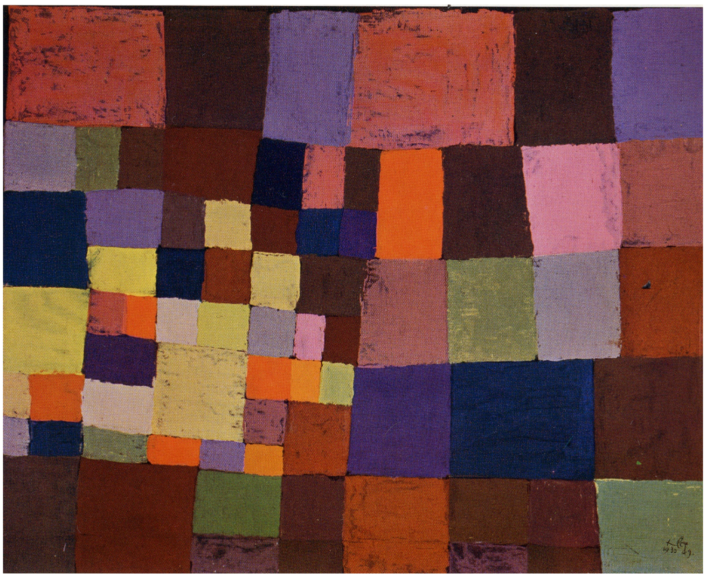
Por ello, jamás el hombre ha inventado un arte del sonido detenido, y la misma idea de un arte tal nos parece extravagante. Pero existe todo un arte de la luz detenida: la pintura. Luego, ella no tiene equivalente entre las artes auditivas, mientras que la música sí puede hallarlo entre las artes visuales, y de hecho ya lo tiene hoy, por lo menos potencialmente, con el cine de animación. Sólo las dificultades técnicas superiores en el manejo de la luz explican que este arte sea el más joven de todos, y el más discutido.

De hecho, muchos autores afirman que no puede existir una "música de luz", y el argumento aducido es el siguiente: los colores desaparecen en su mezcla, y resulta luego imposible concebir acordes de colores a semejanza de los acordes sonoros. En la mezcla de sonidos, seguimos oyendo los sonidos mezclados: percibimos las partes y el todo; en la mezcla de luces, el ojo percibe solamente un nuevo color: las partes se disuelven en el todo. Por lo tanto, el oído es mucho más sensible al aspecto frecuencial que el ojo. Pero esta ventaja se halla balanceada por la relativa pobreza de la audición en el aspecto espacial: ubicamos difícilmente los sonidos, y menos en el plano vertical respecto al cual los oídos son simétricos.

Si la naturaleza nos hubiese dotado con estas orejas flexibles que ostentan tantos animales, seríamos seguramente mejores cazadores, pero quizá hubiéramos perdido algo más importante en el cambio: el perfecto equilibrio entre ojo y oído que nos caracteriza. Ambos sentidos no sólo perciben dos mundos diferentes, irreductibles uno a otro, sino que lo hacen de la manera más opuesta, y luego más variada posible. No existe entre ambos la ambigüedad que observamos entre la vista y el tacto. El ojo y el oído son perfectamente complementarios, sin redundancias.

---

[1] "Analógico y digital", Otl Aicher, versión castellana: Yves Zimmermann, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 2001.



En la música, se utilizan matrices para establecer reglas previas de composición: los intervalos o las notas se ordenan en las casillas; luego, se viaja en el tablero según reglas más estrictas o más libres, de modo que los movimientos permitidos o prohibidos van estructurando la composición, o incluso la interpretación, según improvisaciones más o menos controladas...

“Ritmos más estrictos y más libres” y “Jardín en flores”, Paul Klee (1930).

Los compositores de música siempre se han sentido atraídos por el dominio del espacio, desde los hermanos Gabrieli, Claudio Monteverdi o Henry Purcell hasta Charles Ives ("Preguntas sin respuestas"), Karlheinz Stockhausen ("El canto de los adolescentes"), Pierre Boulez ("Responso") o Luigi Nono ("Prometeo"). Ahora, ¿porqué los compositores de animación no aprovecharían la mayor riqueza que su arte les ofrece en esta aspecto para compensar la obligación, para ellos, de yuxtaponer sus colores en acordes siempre *arpegiados*?

En la cita de Boulez incluida a continuación, cabe observar que, cuando el compositor compara la pintura con la música, no está resaltando las diferencias perceptivas entre artes visuales y artes auditivas, sino entre artes detenidas (como la pintura) y artes en movimiento (como la música o la animación).

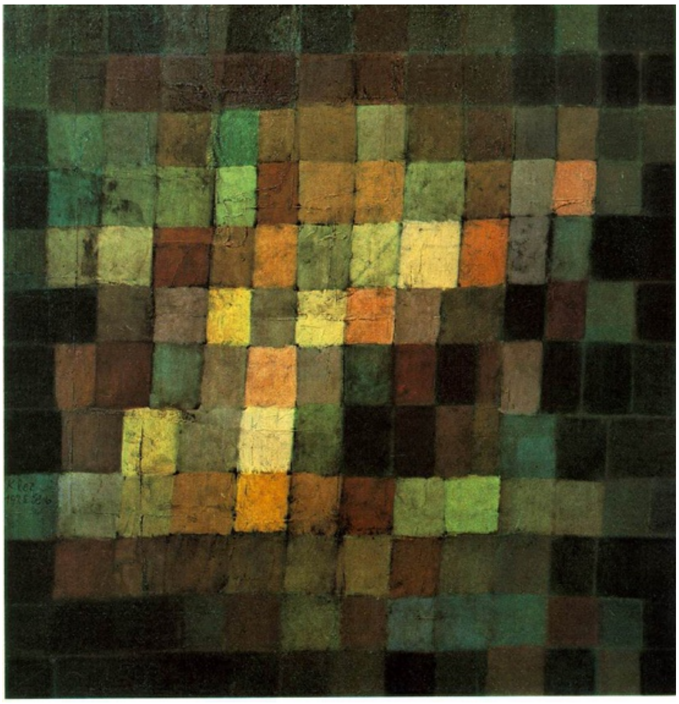
"A un cierto momento, Klee ha trabajado mucho tomando como motivo el tablero de ajedrez. No que fuera obsesionado por el juego de ajedrez, pero hallaba en el tablero un tema denso y en estrecha relación con el universo musical: el de la división del tiempo y del espacio, entendida como división horizontal (el tiempo) y división vertical (el espacio). ¿Qué ocurre cuando se lee una partitura? El tiempo es horizontal, va siempre de la izquierda hacia la derecha; el espacio está representado por los acordes, por las líneas melódicas, por los intervalos que son tantas divisiones distribuidas, visiblemente, en vertical. La componente vertical del tablero expresa los intervalos, mientras que la horizontal representa la división del tiempo. El interés de este principio reside en las variaciones a las cuales Klee lo somete.

En la obra intitulada *Rítmico,* por ejemplo, usa el tablero normal, blanco y negro. Pero nos demostrará que no es necesario limitarse a la alternancia de blanco y negro, que el ritmo de una tablero puede no ser solamente dos. Puede ser tres si el tablero es blanco, negro y azul. Una otra división del espacio nos llevará a encontrar no sólo el módulo dos, sino el módulo tres, o el módulo cuatro, o todos los otros módulos que se puedan emplear.

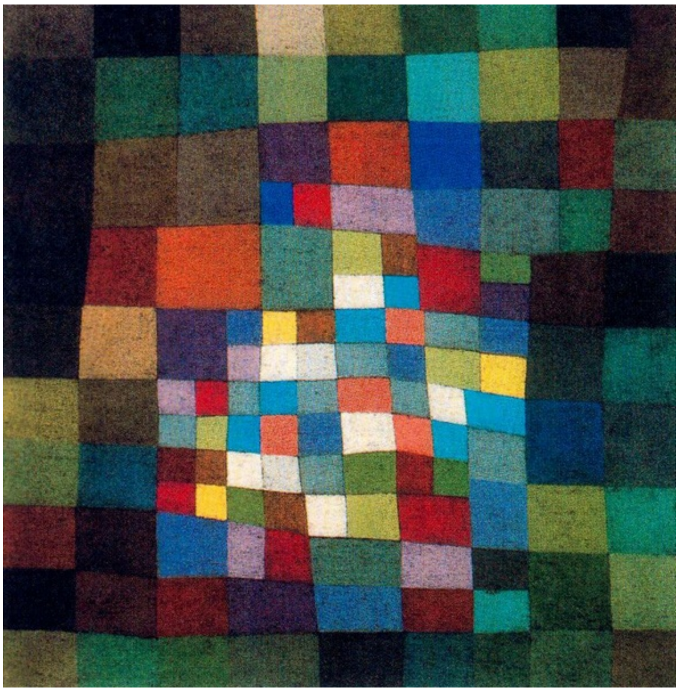
Nada impide ir más lejos, investigando las variaciones del módulo. ¿Porqué repetirlo de modo mecánico: blanco negro azul, blanco negro azul, etcétera? Sería fastidioso. Se podrá renovar esta división aunque sea sólo cambiando los colores: azul blanco negro, luego blanco negro azul, a condición de trazar siempre la separación con un color diferente, a menos que se elija al contrario ligar los módulos con un color común. Pueden encontrarse miles de modos de reflexionar sobre este tema.

Uno podría ser modular el módulo, eso es: partiendo de une tablero con base dos, extender el módulo de dos a cuatro, por ejemplo, para luego restringirlo. En este punto se habrá creado una gran forma en el tablero con la división del espacio, mostrando que el módulo se ensancha y luego se restringe. Así, no sólo se ha definido un espacio estriado y dividido en unidades definibles, sino que el espacio ha sido modulado según una cierta directiva que permite medir su magnitud y al mismo tiempo la evolución de su desenvolverse.

Me he detenido en el principio del tablero de ajedrez porque resulta muy importante en la música. También en música el concepto de tiempo se basa sobre un módulo. El tiempo no se define en el absoluto, la noción cronométrica carece de interés e interviene sólo cuando se compone un programa de concierto, o en la ocasión de una grabación, porque ambos tienen vínculos de duración. A nadie se le ocurriría entusiasmarse por la duración cronométrica de un movimiento de sinfonía o de una pieza musical cualquiera. Lo que importa es identificar el tiempo: se lo identifica a través de una pulsación, llamada generalmente ritmo. Una pulsación, que sea regular o irregular, ayuda a medir el tiempo así como el módulo del espacio permite concebir la distancia, pero ella es también el módulo del tiempo que permite hacerlo directivo. Intentaré dar un ejemplo: es quizás un paralelo demasiado literal, pero si tenemos una pulsación cada dos tiempos, luego cada tres, luego cada cuatro tiempos, se alarga la sensación de la pulsación; se puede luego restringirla, haciendo la pulsación irregular para desorientar la percepción. Así se organiza el tiempo como se organiza el espacio. La acción, sin embargo, no es la misma y se debe tener presente una diferencia importante cuando se hace este tipo de paralelo. El efecto de



En estos dos tableros de Paul Klee, anteriores a los cuatro precedentes, el ritmo deja el paso al contraste cálido-frío. Arriba, los verdes circundantes están atraídos hacia el centro, más cálido y luminoso, donde el “sonido” despliega su energía. Abajo, en cambio, los azules fríos y los agujeros blancos crean una depresión central, estéril como el “desierto”. De cualquier modo, por su discretización del espacio, el tablero siempre facilita la analogía musical: tableros rítmicos, tableros para componer, tableros para liberar los sonidos de la partirura, o para presentarlos, abstractos, callando, a la mirada silenciosa...



“Antiguo sonido, abstracto sobre negro” (1925) y “En el desierto” (1914), Paul Klee.

espacio en un cuadro, aunque grande, es dado por el hecho que lo envolvemos en una sola mirada, que viendo inmediatamente sus límites percibimos al instante toda su construcción y recibimos su presencia en su totalidad. En la música, la percepción del tiempo, del módulo, es totalmente distinta: se fundamenta mucho más sobre el instante, un instante que, además, no se repite. Delante del espacio representado por el cuadro, aunque dividido como el de un tablero, la visión es al inicio global. La visión dividida que sigue permitirá apreciar aún más el espacio global. En música ocurre todo lo contrario; se aprecia el instante o por lo menos la relación entre un instante y otro; se puede entonces medir el que vendrá si la pulsación es regular o, retrospectivamente, el que ha venido si se ha tomado conciencia de la pulsación y del hecho que ella nos ha llevado de un punto a otro. Sólo al fin de la obra se obtiene una visión global, pero siempre virtual. La visión global del cuadro, al contrario, es real, mientras que su visión dividida es casi virtual, porque hay que forzarse para aislarla.

En música, el elemento tiempo, el módulo de tiempo, habla inmediatamente a los sentidos y es percibido en el instante. La reconstrucción de la obra en su globalidad es una reconstrucción imaginaria. No se tiene nunca una visión real de una obra musical cuya percepción es siempre parcial. La síntesis no puede hacerse sino después, virtualmente."

Pierre Boulez[1]

El oído identifica en la frecuencia una serie de intervalos que se pueden expresar como fracciones entre números enteros. Con dos de ellos solamente - la octava (2/1) y la quinta (3/2) - es posible encontrar todos los demás. Con doce de ellos solamente, se ha escrito toda la música occidental, desde la edad media hasta el siglo XX.

Los compositores fueron conducidos naturalmente a tratar otro aspecto del sonido, el tiempo, con el mismo rigor aritmético. A partir de una pulsación dada, determinaron una escala de duraciones, expresable con fracciones enteras, que se refiere a un módulo, el *tempo*, del mismo modo que la escala de frecuencias se refiere al diapasón. Así, en la música, el tiempo, al igual que la altura, es *discreto* y *relativo*. Luego, se hizo lo mismo con la intensidad, al notar la dinámica debajo del pentagrama, a partir del contraste *forte/piano*.

En estos tres aspectos, lo continuo puede enriquecer lo discreto, pero de manera segundaria, casi accidental, mediante indicaciones como *glissando* (altura), *crescendo* (intensidad) o *ritenuendo* (tiempo).

Sólo a mediados del siglo XX, con el desarrollo de la música electrónica, se hizo posible precisar la dinámica y tratar los dos aspectos restantes del sonido - la espacialización y el timbre -, salvándose finalmente los límites técnicos antes infranqueables.

En las artes, lo discreto - o discretizado - presenta una ventaja determinante: permite estructurar fácilmente una obra, desarrollando a partir de unos pocos elementos múltiples combinaciones. Por ello, esta escala musical que la naturaleza del oído había regalado a los compositores, los pintores la quisieron trasladar a su paleta, y de allí nacieron los sistemas teóricos del color, basados todos ellos en una discretización arbitraria. Con sus tableros, Paul Klee no hacía más que discretizar también el espacio, y los arquitectos antiguos, discretizando los árboles, ordenaron sus columnas.

[1] "Il paese fertile", Pierre Boulez, versión italiana: Guillemette Denis, Leonardo Editore, Milano, 1989.

Origen de las ilustraciones

p.010 iz.: - “Tempo of Three, Quartered” (1930) de Paul Klee, colores en pasta, papel cortado y cartón (colección privada, Alemania) *in* http://pintura.aut.org.
- “Rítmico” [Rhythmisches] (1930) de Paul Klee, óleo sobre yute, 69.6 x 50.5cm (Paris, Musée national d’art moderne, Centre Georges Pompidou) *in* “Il paese fertile”, Pierre Boulez, Leonardo Editore, Milano, 1989.

p.011 iz.: - “Ritmos más estrictos y más libres” [Rhythmisches strenger und freier] (1930) de Paul Klee, aguada sobre papel, 47 x 61.5 cm (Munich, Städtische Galerie im Lenbachlaus] *in* “Paul Klee”, Susanna Partsch, Taschen Verlag GmbH, Köln, 1990.
- “Jardín en flores” (1930) de Paul Klee, pastel y color al pegamento, 51.5 x 41.5 cm (Berne, colección Werner Allenbach) in “Paul Klee”, éditions Albert SKIRA, Suisse, 1960.

p.012 iz.: - “Antiguo sonido, abstracto sobre negro” (1925) de Paul Klee, óleo sobre cartón, 15 x 15 in. (Basilea, Kunstsammlung), *in* http://pintura.aut.org.
- “En el desierto” (1914) de Paul Klee, acuarela sobre papel, 17.4 x 13.9 cm, Zurich, Franz Meyer), *in* http://pintura.aut.org.

- 4 -

Abstracción, memoria

Los iluminadores franceses tardo-medievales (siglos XIV y XV), maestros del color, dibujan a menudo el arco iris, generalmente en escenas bíblicas. El rojo está arriba o abajo (arco primario o secundario), o no está; los colores son fruto de la observación, o desenvuelven un papel simbólico, o participan meramente de la composición cromática general; son dos, tres o cuatro; nunca siete.

Arcos iris en ejemplares del "De civitate dei" (Fr. 21, siglo XV, Paris), del "Libro de Modus y Ratio" (Fr. 12399, 1379, Paris), del "Speculum historiale" (Fr. 50, 1463, Paris), de la "Biblia historial" (Fr. 4 y Fr. 10, siglo XV, Paris) y de las "Metamórfosis" de Ovidio (Fr. 137, siglo XV, Flandes).

4. Abstracción, memoria

Para una teoría de la percepción comparada, las diferencias fenomenales entre sonido y luz, y luego las diferencias fisiológicas entre el oído y el ojo, no son nada en comparación con la diferencia esencial que vamos a recordar ahora.

¿Recordar?

Lo cierto es que esta diferencia fundamental, que debería encabezar todos los libros dedicados a la percepción del sonido o del color, nunca la encontramos escrita en ninguna parte...

"Si decimos "rojo" (el nombre de un color) y hay cincuenta personas escuchándonos, cabe esperar que haya cincuenta rojos en sus mentes. Y podemos estar seguros de que todos esos rojos serán muy diferentes.

Incluso si especificamos un color determinado que todos nuestros oyentes hayan visto innumerables veces, como el rojo de los anuncios de la Coca-Cola, que es el mismo en todo el país, seguirán pensando en muchos rojos diferentes.

Incluso si todos los oyentes tienen delante de sí centenares de rojos para de ellos entresacar el de la Coca-Cola, de nuevo elegirán colores muy diferentes. Y ninguno podrá estar seguro de haber encontrado el matiz de rojo exacto.

E incluso si mostramos el redondel rojo de la Coca-Cola con el nombre en blanco en medio, de modo que todo el mundo fije la vista en el mismo rojo, cada uno recibirá la misma proyección en su retina, pero nadie podrá estar seguro de que todos tengan la misma percepción.

Si de ahí pasamos a considerar las asociaciones y reacciones experimentadas en relación con el color y el nombre, lo más probable es que de nuevo haya una dispersión general en muchas direcciones diferentes.

¿Qué demuestra todo esto?

En primer lugar, que es muy difícil, por no decir imposible, recordar los diferentes colores. Esto confirma el importante hecho de que nuestra memoria visual es muy pobre en comparación con nuestra memoria auditiva. A menudo esta última es capaz de repetir una melodía que sólo se ha oído una o dos veces.

En segundo lugar, la nomenclatura del color es muy insuficiente. Aunque hay innumerables colores - tonalidades y matices -, el vocabulario cotidiano sólo cuenta con una treintena de nombres para designarlos."

Josef Albers[1]

En "La interacción del color", J. Albers pone en evidencia dos peculiaridades del color. En primer lugar, memorizamos mucho mejor los sonidos que los colores. Por otra parte, cuando dos personas miran un mismo color, nunca pueden asegurarse que ven lo mismo. El autor está entonces muy cerca de la explicación de ambos hechos, pero prefiere utilizarlos para justificar una afirmación que aparece más adelante:

"Para empezar a estudiar cómo engaña el color y cómo sacar partido de este hecho, el primer ejercicio consiste en hacer que un mismo color parezca diferente.

En la pizarra y en nuestros cuadernos escribimos:

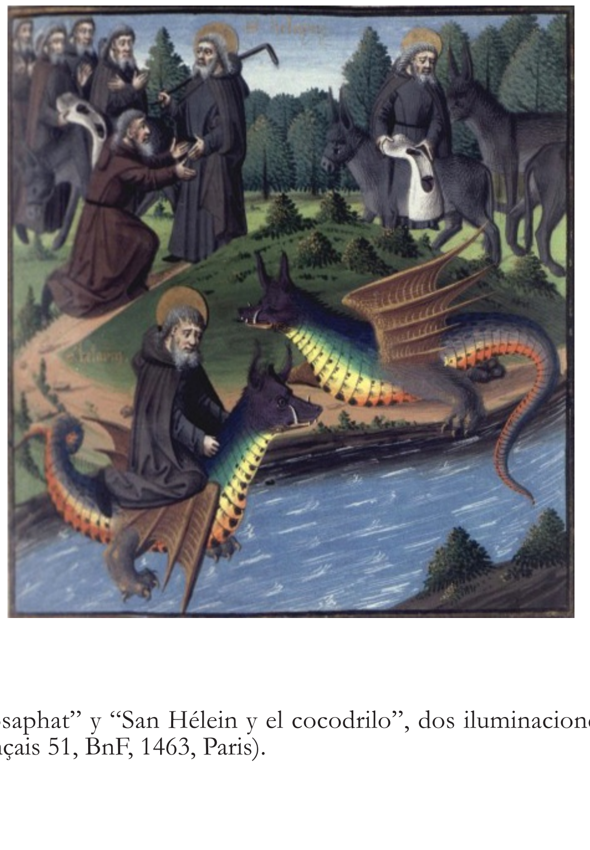
El color es el más relativo de los medios que emplea el arte."

Josef Albers[2]

Uno de estos ejercicios, el que ilustra la cubierta del libro, consiste en recortar una tira de papel naranja, emplazarla verticalmente sobre un fondo constituido por un azul celeste (arriba) y

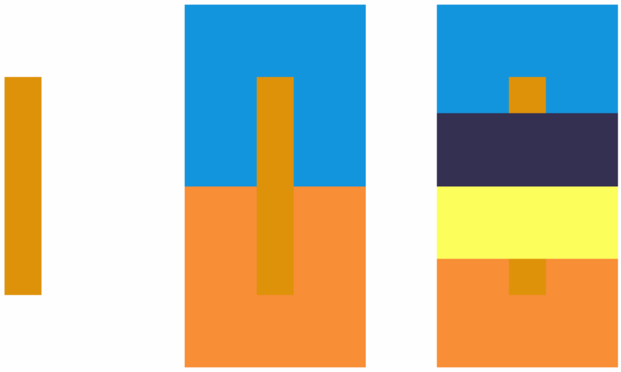
[1] "La interacción del color", Josef Albers, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Forma, 1979.
[2] "La interacción del color".

Hacia finales del siglo XV, la iluminación francesa vive una evolución rápida y prodigiosa, debido, probablemente, a la mayor difusión y al perfeccionamiento de los instrumentos de óptica. A través de las lentes, se observan bellas irisaciones, que el genial iluminador del manuscrito Fr. 51 (según la clasificación de la BnF) plasma en los soberbios vientres de sus dragones (ar.) y "cocodrilos" (ab.), como en el arco iris de la página anterior (md.iz.). Se trata - y no es nada casual - de un ejemplar del "Espejo histórico" de Vincent de Beauvais, uno de los grandes enciclopedistas del siglo XIII, junto con Thomas de Cantimpré y Barthélémy l'Anglais, cuyo "Sobre las propiedades de las cosas" se conserva en más de doscientos manuscritos latinos y en innumerables traducciones. El "Speculum historiale", como el "De propietatibus rerum", dió a los iluminadores la ocasión de un uso más *científico* (en el sentido medieval) de los colores, descritos por los enciclopedistas como accidentes de la materia, según la teoría aristotélica. Estamos aún lejos, pues, del espectro newtoniano, como propiedad intrínseca de la luz y orden general de los colores. Sin embargo, con dos siglos de antelación, el cocodrilo de San Hélein manifiesta ya muy exactamente el dictámen del prisma...



"San Barlaam enseñando a Josaphat" y "San Hélein y el cocodrilo", dos iluminaciones del "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis (Français 51, BnF, 1463, Paris).

un naranja más claro (abajo), y añadir en medio de la composición dos tiras horizontales, una violeta (arriba) y una amarilla (abajo), de modo que tapen casi totalmente la primera tira naranja, exceptuando sus dos extremidades.



Se puede comprobar entonces que estas extremidades ya no parecen iguales: el cuadrado superior se ve mucho más claro que el cuadrado inferior, a pesar de que ambos pertenezcan a la misma tira... Pero lo que ha cambiado, en este caso, no es el color en sí (el naranja no se desplaza ni hacia el rojo ni hacia el amarillo), sino el brillo del color, es decir su intensidad. Para el ojo, la intensidad de la luz es muy relativa, tanto como lo son, para el oído la intensidad y la frecuencia del sonido. Ninguno de los ejercicios de "La interacción del color" nos muestra claramente que el color en sí sea también relativo.

Ahora, ¿cuál es la explicación de la interpretación errónea de Albers como de sus dos observaciones acertadas?

El oído tiene voz para expresarse, mientras que el ojo carece de un órgano emisor. Esta es la diferencia magna entre ambos sentidos.

Si una melodía nos gusta, la podemos repetir indefinidamente, cantándola, aunque sea interiormente. La repetición es la clave de la memoria, y tenemos buena memoria de los sonidos porque nuestro cerebro se ha conformado tanto a percibir como a emitir los sonidos.

El pintor más ejercitado, cuando vuelve a su taller, se halla incapaz de plasmar en un lienzo los colores de la pintura que acaba de estudiar durante horas en un museo. Apenas tenemos memoria de los colores, porque somos corporalmente incapaces de repetirlos o de simularlos. El color se mantiene siempre a distancia de nosotros.

Y así podemos corregir la aserción de Albers:

Entre todos los fenómenos de la percepción, el color es el menos relativo, pero el más distanciado.

Origen de las ilustraciones

p.014_iz: - "Resurrección de los muertos", Français 21, fol. 243v, BnF, *ex* "De civitate dei", Augustinus (s.) (trad. Raoul de Presles), principios del siglo XV, Paris.
- "Modus y Ratio rezando", Français 12399, fol. 100, BnF, *ex* "Livres de Modus et Ratio", Henri de Ferrières, 1379, Paris.
- "Adoración de Dios", Français 50, fol. 13, BnF, *ex* "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis (trad. Jean de Vignay), 1463, Paris.
- "San Juan recibiendo el Libro", Français 4, fol. 257v, BnF, *ex* "Bible historiale", Guiard des Moulins, principios del siglo XV, Paris.
- "Angel ostentando el Libro", Français 10, fol. 594v, BnF, *ex* "Bible historiale", Guiard des Moulins, principios del siglo XV, Paris.
- "Arco iris", Français 137, fol. 57, BnF, *ex* "Metamorphoseon libri xv", Ovidius, (trad. anónima), finales del siglo XV, Flandes.

p.015_iz: - "San Barlaam enseñando a Josaphat", Français 51, fol. 175, BnF, *ex* "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis (trad. Jean de Vignay), 1463, Paris.
- "San Hélein y el cocodrilo", Français 51, fol. 158, Bnf, *ex* "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis (trad. Jean de Vignay), 1463, Paris.

- 5 -

El púrpura

A pesar de sus observaciones naturalistas, el autor del manuscrito Fr. 51 sigue observando otras reglas cromáticas, como cuando describe las nueve jerarquías angelicales (ab.iz.), depurándose desde los colores terrenales hacia los azules celestes y los celestiales rojos purpurinos, según una teoría neoplatónica que remonta a Pseudo-Dionisio. Este tema, como el de los siete cielos ptolemáicos, inspira a sus contemporáneos magníficos órdenes cromáticos, que deben mucho más a la filosofía que a la observación.

Adoración de dios en “Les très belles heures de Notre Dame de Jean de Berry”, cristo en majestad en el “Brevario de Martín de Aragón”, jerarquía celestial en el “Speculum historiale” (Fr. 51), esquema de cosmografía en los “Échecs amoureux”.

5. El púrpura

En el espacio visual, su jardín, Iris se manifiesta siempre de manera fugaz e ilusoria. Hija de Electra, madre del Amor, amante del viento Céfiro, lleva los mensajes de los Dioses, comparte la misión del ambiguo Hermes.

> "Los dioses son acusados por Homero y Hesíodo
> de todo lo que entre nosotros es vergonzoso y censurable:
> los vemos dedicarse al robo, al adulterio
> y entregarse entre sí a la mentira engañosa."
>
> "Piel negra y nariz chata: así los Etíopes
> representan a sus dioses, mientras que los Tracios
> les dan ojos garzos y cabellos de fuego."
>
> "Lo que llaman Iris no es por su naturaleza
> sino una nube que parece violeta, escarlata
> y verde pálido a nuestros ojos."

Jenófanes[1]

En su carga contra el politeísmo antropomorfo de los viejos poetas, Jenófanes es quizá el primer filósofo griego en interpretar el arco iris. Le arrebata la divinidad, pero refuerza su carácter ilusorio: *una nube ... parece ... a nuestros ojos.*

A quién crea que el arco iris puede desplegar claramente los siete colores de Newton, vale la pena oponer una descripción actual del fenómeno:

"Las diferentes clases de arco iris son función del tamaño de las gotas de lluvia:
- para gotas de 1 a 2 mm: el arco contiene sobre todo verde, violeta y un poco de rojo, los arcos supernumerarios numerosos hacen alternar el verde y el violeta;
- para gotas de 0,5 mm: el rojo es aún más débil, mientras que la alternancia verde-violeta subsiste;
- para gotas de 0,3 mm: el rojo ha desaparecido completamente, los otros colores están bastante bien desarrollados, mientras que los arcos supernumerarios se hacen cada vez más amarillos;
- para gotas de 0,2 mm: los arcos supernumerarios se desatan unos de otros;
- para gotas de 0,1 mm: el conjunto es más amplio, más pálido, sólo domina el violeta; el primer arco supernumerario está bien separado del eje primario; es blanco;
- para gotas de 0,06 mm: el arco primario contiene una banda blanca;
- para gotas inferiores a 0,05 mm: el arco es completamente blanco."

M. G. J. Minnaert[2]

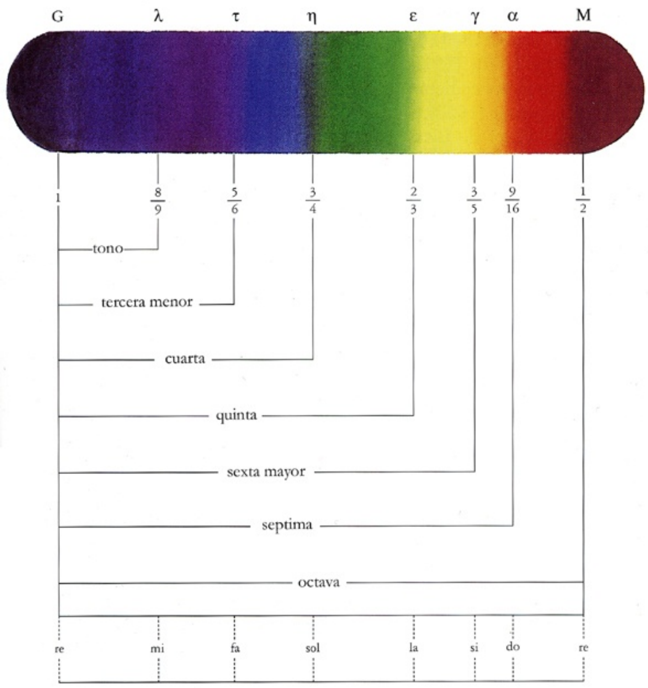
El arco de Jenófanes no era más, por lo tanto, que una nube de gotas gordas... En cuanto a la Diosa, se jugó de las imperfecciones que los vidrios romanos y medievales prestaban a sus irisaciones, dejándose ver mucho, pero no mejor. Finalmente, el pulidor siglo XVII la pudo atrapar en sus artefactos de óptica, y su traje multicolor se deshilachó en el prisma de Newton. Apareció entonces algo nunca visto antes: la serie de los colores saturados, en toda su plenitud, rigurosamente ordenados.

Pero la observación de los prismas da para mucho más...

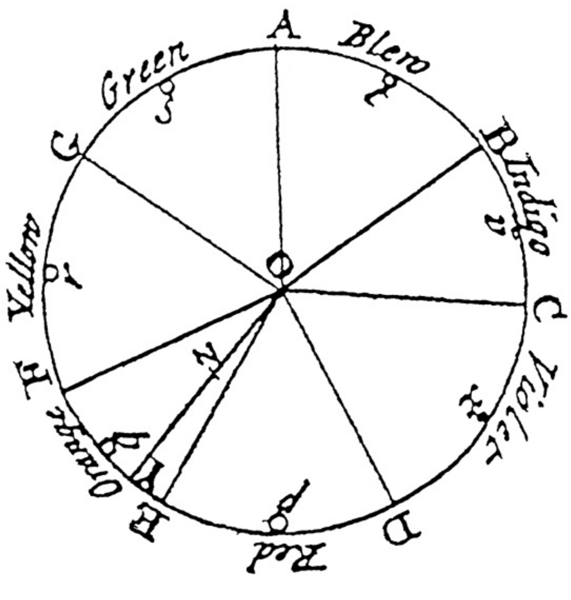
---

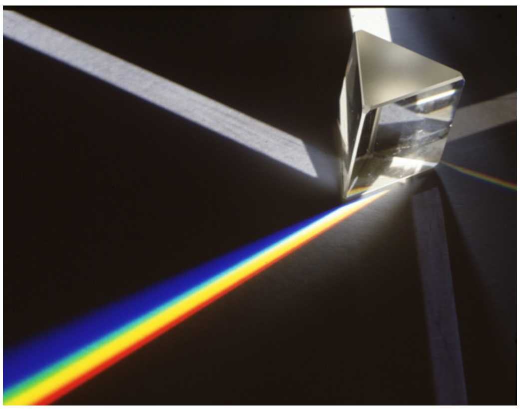
[1] "Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988. Xénophane *in* "Contre les mathématiciens", Sextus Empiricus (p. 117), "Stromates", Clément d'Alexandrie (p. 118), Scolie à l'Iliade (p. 122)

[2] Citado en: "Traité des couleurs", Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.



El esquema superior (ar.) muestra la relación establecida por Isaac Newton entre el espectro cromático y la escala musical en el modo de re. Del experimento del prisma (ab.dr.), deduce su círculo cromático (ab.iz.). En la fotografía del prisma, se puede ver que el verde aparece lejos de la refracción, como mezcla de azul y amarillo: esta característica es la que llevó Goethe a rechazar la teoría newtoniana, y a proponer un círculo cromático muy diferente (ver p. 3)...





Esquema de los colores y tonos musicales de Newton; círculo cromático de Newton; refracción de la luz a través de un prisma.

En su "experimento crucial", Newton[1] utilizó un segundo prisma para comprobar que un color particular, separado de los demás gracias a su desviación particular en la refracción a través del primer prisma, vuelve luego a sufrir siempre la misma desviación, sin dividirse más.

Si volvemos a mezclar todos los colores separados por el prisma, formamos de nuevo la luz blanca inicial.

Si mezclamos todos los colores menos uno, aparece un nuevo color, que llamamos *complementario* del color aislado, porque la mezcla de ambos produce blanco. Si por ejemplo, aislamos el violeta, la mezcla de los demás colores produce un *amarillo*, que llamamos así porque se parece mucho al amarillo del espectro, aunque se ve más blanquecino, menos saturado. Este color se describirá luego con dos parámetros: su *frecuencia dominante*, es decir la frecuencia del color puro al que se parece, y su *saturación*, es decir su grado de blanqueo, que lo distingue del color puro correspondiente, por ser el producto de una mezcla.

Los pares de complementarios usuales son: amarillo/violeta, naranja/azul y rojo/verde. Sólo sabemos a qué se refieren estos nombres cuando realizamos un experimento que nos muestre directamente los complementarios (por ejemplo: a través de las sombras de color).

Cuando aislamos del espectro cierta tonalidad de verde, aparece un fenómeno muy notable: la mezcla de los demás colores produce un nuevo color, el púrpura (o "lila", o "magenta",...), que no corresponde a ningún color del espectro.

En general, al someterse el ojo a la mezcla de dos luces saturadas, realiza una especie de promedio, con lo cual funde ambos colores mezclados en un nuevo color, situado entre ambos en el espectro. Así, percibe como amarillo la suma de una luz verde con una luz roja. Pero, cuando se enfrenta a la mezcla de los dos extremos del espectro, el rojo y el violeta, es como si realizara una síntesis "a espaldas del espectro", inventando el púrpura, un color que no se puede calificar con una frecuencia dominante, porque no tiene correspondiente en el espectro...

Como consecuencia, el espectro de los colores no se presenta ante el ojo como un segmento, enmarcado por los umbrales de la percepción, entre los infrarrojos y los ultravioletas, sino como un círculo, cerrado por el púrpura, que se instala entre el rojo y el violeta, sin solución de continuidad.

Con esta propiedad, el ojo relativiza los colores, cuyo orden se muerde la cola: ningún color es el primero, y ninguno el último. En la intensidad, el ojo siente sus límites, entre la oscuridad y el encandilamiento, pero, en el aspecto frecuencial, no es así: el ojo no se siente limitado por dos macizos impenetrables, porque su mundo es circular, y lo puede recorrer sin fin. Para el ojo, la ventana perceptiva de la física es una abstracción.

Al parecer, Newton no podía seguir todo este razonamiento, que precisa un aparato experimental bastante complejo. Sin embargo, intuyó la distribución del círculo cromático. ¿Cómo lo hizo? Probablemente, siguiendo la analogía de la escala musical.

Si duplicamos la frecuencia de un sonido, el oído percibe un intervalo tan simple, la *octava*, que le confiere un papel identificador. Así, los músicos dan el mismo nombre a dos notas separadas por una octava, porque "suenan igual", a pesar de que una se perciba por encima de la otra. Cuando tecleamos seguidamente todas las notas del piano, desde abajo hacia arriba, sentimos un movimiento en espiral: a la vez continuamente ascendente, y repetidamente circular.

Esta espiral de las alturas sonoras y el círculo cromático son dos propiedades de la percepción humana que comparten un mismo poder relativizador, aunque el oído lo lleva mucho más lejos que el ojo, ya que la "octava de los colores" - si se la pudiera llamar así - es única, y sus intervalos son arbitrarios. Newton sólo se equivocó a medias con su analogía musical, la cual no debía a una rara fantasía, sino a una larga tradición que su casi contemporáneo Blaise Pascal había llamado:

"el espíritu de geometría"

---

[1] Ver la "carta a Oldenburg" y también: "Óptica", Isaac Newton, versión castellana de Carlos Solís, Ediciones Alfaguara, Madrid, 1977.

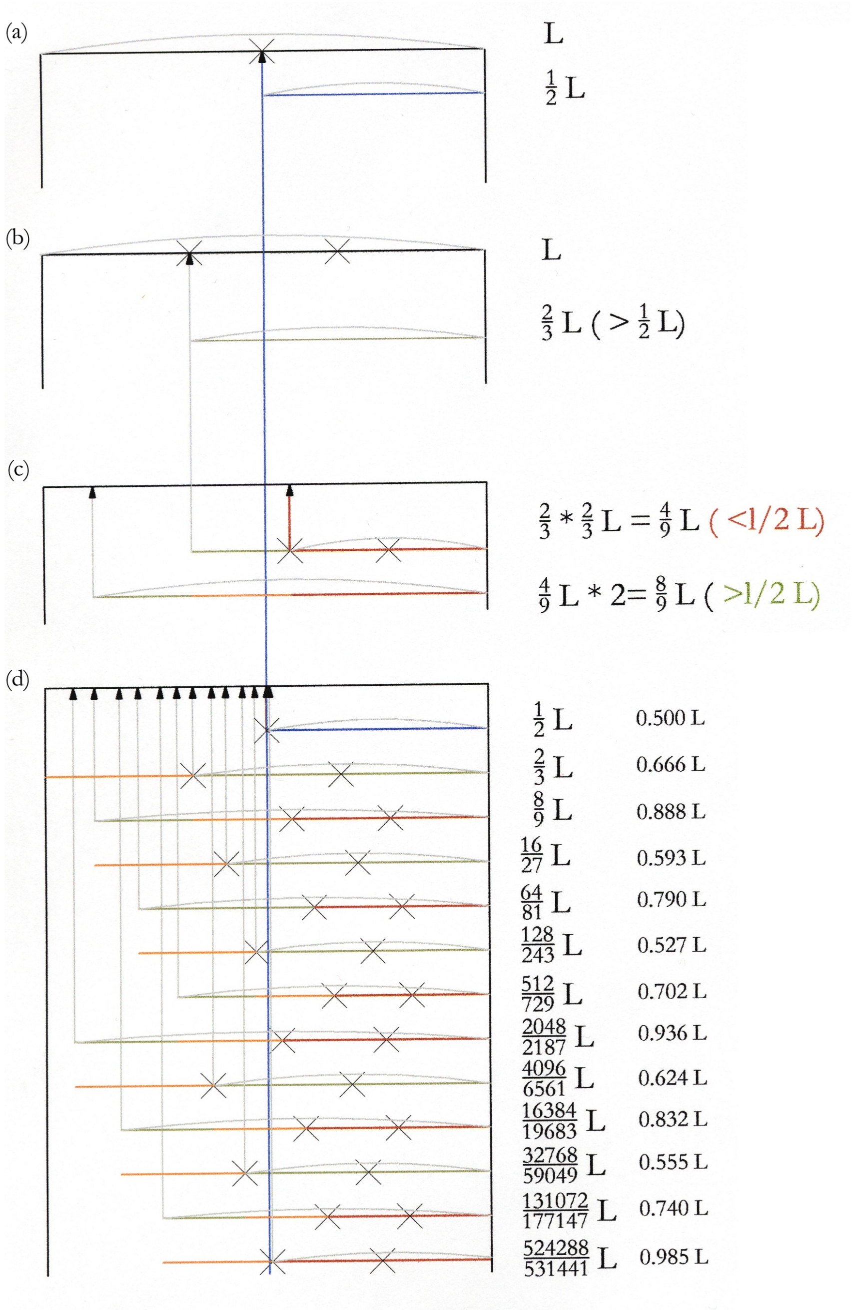
Origen de las ilustraciones

p.017_iz: - "Adoración de Dios", Nouvelle acquisition latine 3093, fol. 240, BnF, *ex* "Horae ad usum parisiensem" (o: "Les très belles heures de Notre Dame de Jean de Berry", il.: Maître du parement de Narbonne, Maítre du baptème, frères de Limbourg), hacia 1380, Paris.
- "Cristo en Majestad", Rothschild 2529, fol. 104v, BnF, *ex* "Breviarium cisterciense", (o: "Bréviaire de Martin d'Aragon"), hacia 1398-1403, luego 1420-1430, Cataluña.
- "Jerarquía celeste", Français 50, fol. 14v, BnF, *ex* "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis (trad. Jean de Vignay), 1463, Paris.
- "Esquema de cosmografía", Français 143, fol. 20, *ex* "Échecs amoureux", Évrard de Conty (il.: Robinet – Testard), hacia 1496-1498, Cognac.

p.018_iz: - "Esquema de los colores y tonos musicales de Newton", *in* "Traité des couleurs", Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.
- "Círculo cromático" de I. Newton, *in* "Óptica", Isaac Newton, Ediciones Alfaguara, Madrid, 1977.
- Refracción de la luz a través de un prisma (foto de origen desconocido).

- 6 -

La escala musical



Este gráfico muestra cómo proceder para construir la escala de doce sonidos a partir del monocordio. Primero, se averigua que la división de la cuerda en dos partes iguales (a) produce el intervalo más consonante, la *octava*, que se considera identificador: la cuerda y su mitad suenan *igual*, "a la octava". Luego, para rellenar esta octava, se buscan longitudes intermedias, entre la media cuerda y la cuerda entera. Para ello, se hace servir solamente el segundo intervalo más consonante, la *quinta*, que se realiza al dividir la cuerda en dos tercios (b), dando una tercera nota entre los dos extremos. Al repetir esta operación (c), se comprueba que la quinta de esta primera quinta produce una longitud insuficiente, inferior al valor mínimo manifestado en el gráfico por la vertical azul. Se duplica entonces esta longitud, aprovechando el papel identificador de la octava. Al repetir doce veces esta operación (c), duplicando siempre las longitudes insuficientes (en rojo) para que quepan en la octava (en verde), se realiza una *progresión por quintas*, hasta la duodécima nota, que resulta ser casi idéntica a la primera debidamente octavada: la razón de la pequeña diferencia es la famosa *coma pitagórica*.

Constitución pitagórica de la escala dodecafónica, mediante una progresión por quintas (el autor & Gori Moya).

6. La escala musical

El aspecto frecuencial del sistema de composición musical está fundamentado en una propiedad física - la estructura armónica de los sonidos periódicos -, una propiedad aritmética - la casi igualdad entre el duodécimo término de la progresión triple y la decimonovena potencia de dos -, y un dispositivo experimental simple: por ejemplo, una cuerda fijada en ambos extremos y tensada sobre una regla graduada, de modo que se pueda dividir con precisión, al presionarla sobre uno de los renglones de la regla.

El oído averigua primero que, más se acorta la cuerda, más su sonido es agudo; posteriormente, que las divisiones simples (la mitad, dos tercios, tres cuartos,...) producen, con respecto a la cuerda entera, intervalos consonantes (respectivamente: la octava, la quinta, la cuarta,...); finalmente, que si se repite la misma división sobre la cuerda acortada, se percibe el mismo intervalo (por ejemplo, al dividir la cuerda en dos, luego en cuatro, luego en ocho, se oyen, sucesivamente, tres octavas ascendentes).

Con una cuerda muy larga y muy pesada, cuya vibración es luego muy lenta, se puede comprobar visualmente que la altura percibida es proporcional a la frecuencia de vibración y, por lo tanto, inversamente proporcional a la longitud de la cuerda. Luego, lo que el oído identifica como el *intervalo* entre dos notas corresponde, físicamente, a una *razón*, es decir un factor multiplicativo, cuyo producto por la frecuencia de la nota inferior del intervalo da la frecuencia de su nota superior.

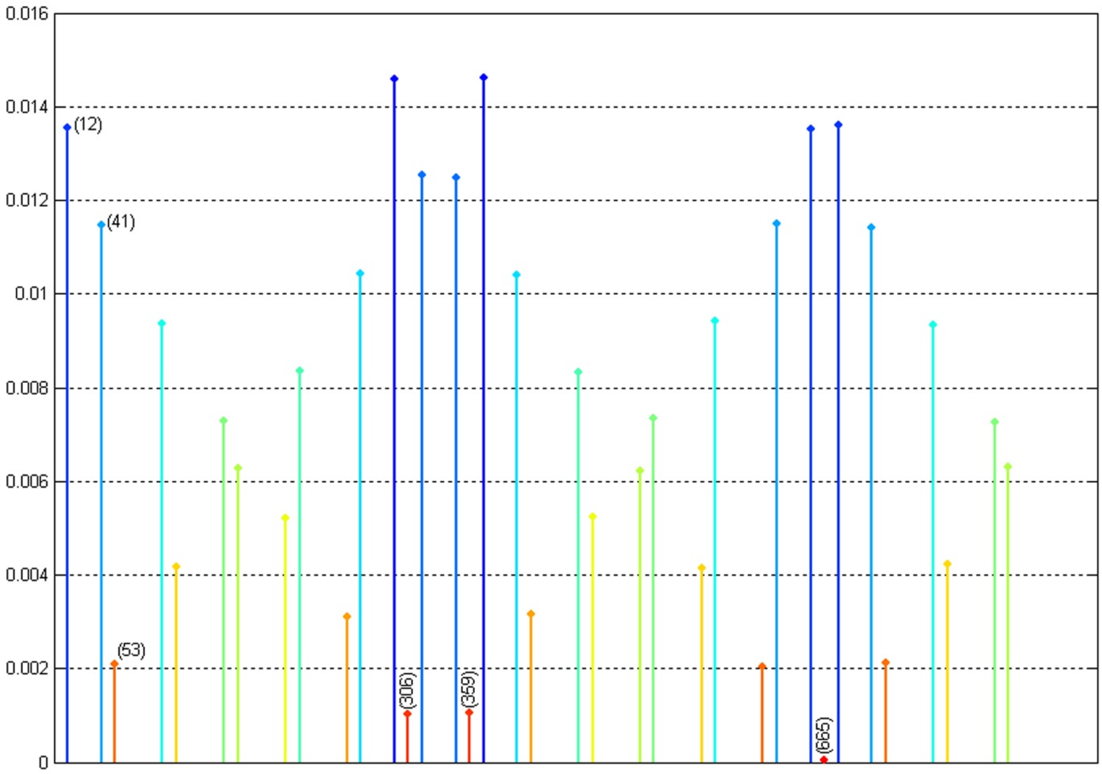
Con una cuerda de longitud L, podemos producir los siguientes intervalos simples, entre la cuerda entera y su división:

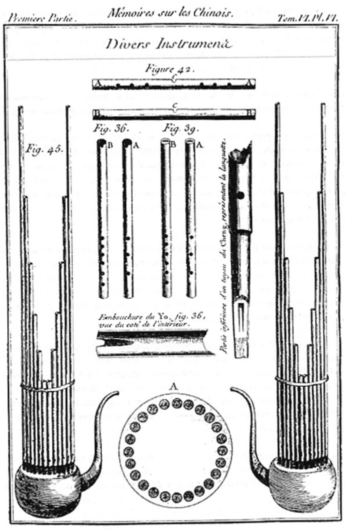
División	razón	intervalo
L	1	unísono
L/2	2/1	octava
2L/3	3/2	quinta
3L/4	4/3	cuarta
4L/5	5/4	tercera mayor
5L/6	6/5	tercera menor
8L/9	9/8	tono

Vemos que la serie de razones se interrumpe antes de incluir el número 7. Los siguientes intervalos serían demasiado próximos entre sí, por lo cual se salta directamente al tono, que es ya disonante: a dos cantantes, les resulta difícil entonar una misma melodía a intervalo de tono, y el resultado se oye como un "frotamiento", eso es: *disonante*. En cambio, las terceras ya son consonantes y los intervalos superiores aún más, hasta la octava, el intervalo más consonante de todos. De hecho, cuando un hombre y una mujer creen cantar juntos al unísono, una octava separa sus voces. De ello viene, sin duda, el que la octava siempre se haya percibido como intervalo *identificador*: duplicar la frecuencia de un sonido sólo modifica su altura absoluta (eso es: un *salto de octava*), no su altura relativa, dentro de un conjunto de sonidos.

Por lo tanto, el problema de la escala musical se resume a rellenar la octava con un máximo de intervalos consonantes, de una forma lógica que permita luego el mayor número de operaciones. Cada vez que una razón nos haga pasar los límites de la octava, la podremos dividir por dos, sin modificar la naturaleza del intervalo correspondiente.

Comprobamos, por ejemplo, que la suma de una quinta y de una cuarta da una octava, pues el producto de sus razones da la razón de la octava: $3/2 * 4/3 = 2$. La octava se descompone también en una cuarta, una tercera mayor y una tercera menor ($4/3 * 5/4 * 6/5 = 2$), o en dos cuartas y un tono ($4/3 * 4/3 * 9/8 = 2$). Más curioso es el resultado de la división de





Podemos luego seguir progresando por quintas, en busca de una nota final más próxima a la nota inicial, reduciendo la coma. En el gráfico superior, las ordenadas marcan el valor con el cual la razón obtenida en distintas etapas de la progresión supera la razón unitaria ideal: si esta se alcanzara (o sea: si la diferencia se anulara), la última nota de la progresión sería igual a la primera. Tras doce quintas, comprobamos que esta diferencia es de 0.0136 (corresponde a la coma pitagórica: 531441/524288 = 1.013643); se reduce un poco tras 41 quintas, y bastante más con 53, como lo descubrió King-Fang. A partir de allí, sólo se numeran en el gráfico los casos que minoran el mejor resultado anterior. Tras un cálculo propiamente astronómico, el astrónomo Khien-Lon-Ki descubrió los casos parecidos de 306 y 359 quintas. Gracias al ordenador, podemos ahora proponer la prodigiosa escala de 665 notas, casi perfecta, pero, eso sí, perfectamente inservible...

Estudio de la progresión por quintas (el autor & Luc Masset); ilustración original de las "Memorias sobre los Chinos" de Joseph-Marie Amiot (1779).

la cuerda en seis partes iguales (razones 1; 6/5; 6/4; 6/3; 6/2; 6/1), que produce los intervalos del *acorde perfecto menor* (tercera menor, quinta y octava)...

Sin embargo, estas primeras observaciones no permiten siquiera arrancar la composición de una escala completa. Para ello, hace falta un procedimiento generalizable. En torno al siglo VI a.C., la escuela pitagórica trasladó a Europa unos razonamientos ya bien conocidos en Oriente: quizá en Egipto, seguramente en Caldea y, con anterioridad, en China.

La idea consiste en utilizar solamente los dos intervalos más consonantes: la octava y la quinta. A partir de una nota cualquiera, que define la octava por rellenar, se sube de una quinta, hasta una segunda nota. A esta, se le aplica también una quinta, para obtener una tercera nota. Como esta se halla más allá de la octava por rellenar, se la rebaja de una octava. Y se sigue así, progresando por quintas y regresando por octavas, hasta encontrar la duodécima nota, que resulta ser casi igual a la primera, debido a la siguiente propiedad aritmética:

$$3^{12} = 531441 \approx 524288 = 2^{19}$$

Dicho de otro modo, doce quintas son casi iguales a siete octavas:

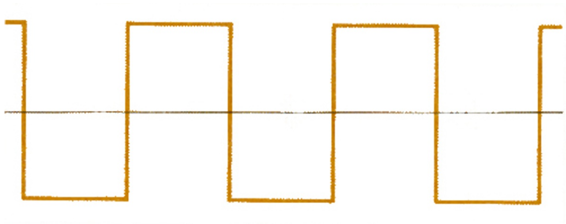
$$(1.5)^{12} = 129.746338 \approx 128 = 2^{7}$$

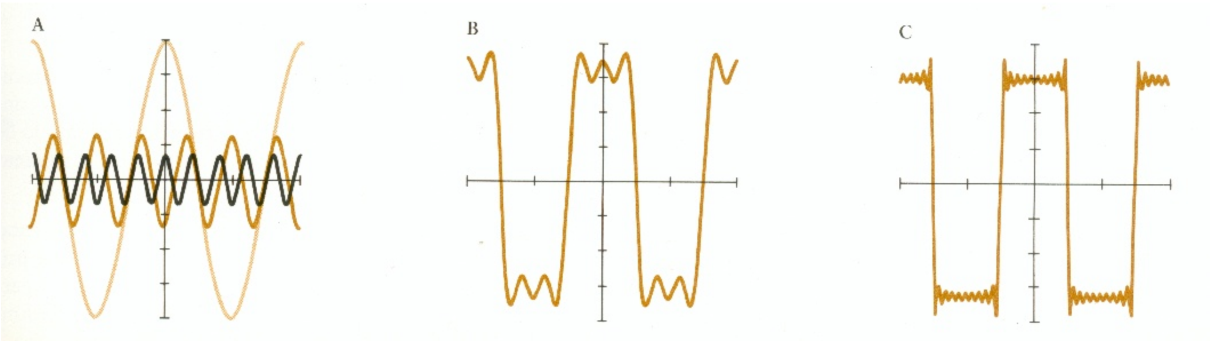
A la razón de la pequeña diferencia, se la llama *coma pitagórica*, y vale $3^{12}/2^{19} = 1{,}013643$. Al no existir esta, el problema estaría ya resuelto: una vez ordenadas dentro de la octava, las doce notas se encontrarían todas separadas por un mismo intervalo, el *semitono* (la mitad de un tono). Pero no es así, y uno de los semitonos se distingue de los demás por una coma pitagórica; todos los intervalos que lo incluyen se diferencian igualmente de los mismos intervalos construidos sin incluirlo... Aún así, la escala formada por progresión de quintas sigue siendo excelente, porque las doce quintas que se pueden formar en ella son exactas, y la quinta es un intervalo muy importante para la música, el más importante después de la octava.

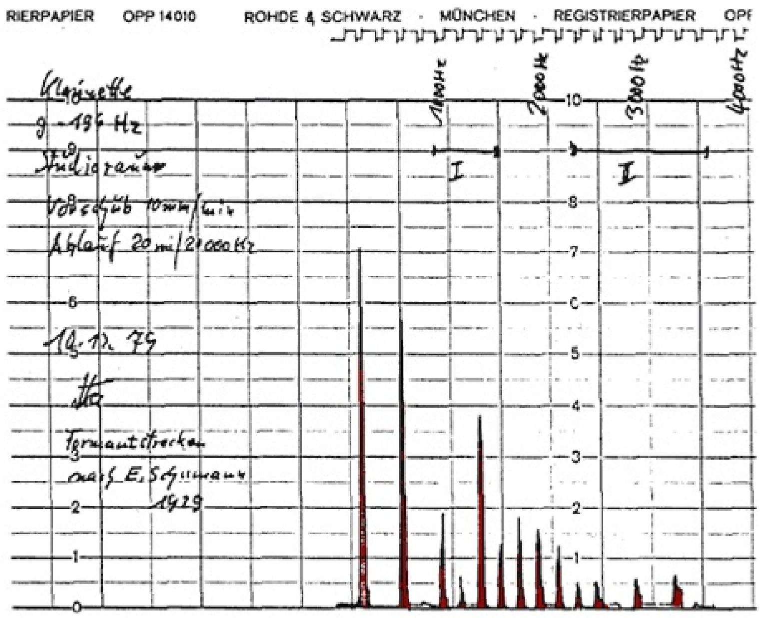
Sin embargo, la aproximación de la coma no podía satisfacer los chinos[1], que consideraban el *lu*, es decir el sonido ordenado, como un principio de equilibrio universal. Se buscó, pues, reducir la coma, llevando más lejos la progresión de quintas. En el siglo I a.C., King-Fang mostró que 53 quintas eran casi iguales a 31 octavas, reduciéndose así la coma a un valor de 1.002, ya casi unitario. Pero una escala de 53 notas es difícil de manejar... Los árabes, amantes de la aritmética, implementaron escalas prolijas en su instrumento más sofisticado, el *qanûn*. Pero la mayoría de los instrumentos no permiten tanta sutileza, y la voz humana menos. Decididamente, doce es un buen número... Para la anécdota, mencionemos a Khien-Lon-Ki, astrónomo del siglo V d.C., que prolongó el ciclo de quintas hasta 360...

En China todavía, se ideó luego otro sistema. Ya que la escala debe tener doce notas, ¿porqué no conferir directamente a la razón del semitono el valor de la duodécima raíz de 2? Eso es ya la idea del *temperamento igual*, donde la coma está repartida igualmente entre todos los intervalos. En el siglo XVIII, cuando el jesuita Joseph-Marie Amiot visitó el imperio, los chinos ya sabían evaluar los términos de la progresión geométrica de razón $\sqrt[12]{2}$ con una precisión de cuatro decimales, y aplicarlos a tubos de bambú con sobrada exactitud. Con la *campana amarilla*, cuyas dimensiones y composición estaban perfectamente definidas, disponían además de un diapasón universal.

[1] Las referencias a la musica china están citadas en: "Petite histoire de l'acoustique", Pierre Liénard, Lavoisier, Paris, 2001.







Arriba: Una onda periódica de forma rectangular puede construirse a partir de una onda sinusoidal [es decir: un sonido puro] de misma frecuencia (en (a): curva amarilla), sumándole sus armónicos debidamente ponderados (en (a): el primer armónico, con frecuencia doble, en naranja, y el segundo, con frecuencia triple, en negro), obteniéndose rápidamente una simulación correcta (en (b), con dos armónicos) e incluso muy precisa (en (c), con diez armónicos), como en cualquier otro caso de onda periódica (teoría de Fourier). Abajo: El espectro frecuencial de un sonido de clarinete, donde se aprecian los distintos armónicos, cuyas amplitudes relativas determinan el timbre particular de este instrumento.

Descomposición en series de Fourier de una onda rectangular; espectro frecuencial de un sonido de clarinete.

El problema, con el temperamento igual, es que todos los intervalos son - muy ligeramente - falsos. El problema - más grave - con todas las teorías que acabamos de exponer, es que son finalmente más aritméticas que musicales: Platón, ya, reprochaba a los pitagóricos su excesiva matematización de la música. A mitad del siglo IV a.C., Aristóxenes de Tarento, valiéndose del mismo reproche, fundó su propia definición de la escala musical sobre otro principio, más físico: la estructura armónica del sonido.

¿De qué se trata?

> " La calidad, no la cantidad,
> como Aristóxenes, hacia 320
> antes de J.C., lo reconoció,
> cuando se opuso a
> las teorías platónicas –
> pitagóricas = calidad
> para las experiencias – los
> sentimientos – el recuerdo –
> el entendimiento. Y no
> cifras, ni cantidad, ni
> esferas."
>
> *Luigi Nono*[1]

Hasta ahora, hemos presupuesto dos entidades matemáticas elementales: los sonidos puros (que presentan una sola frecuencia) y los intervalos simples. El problema, es que su realización física no se encuentra en la naturaleza.

El oído no es más que experiencia de oír; el ojo es sólo experiencia visual. El orden físico de los colores puros no se despliega claramente en la naturaleza, ni se deduce del pincel, y los hombres lo desconocieron. ¿En qué experiencia se habrá entonces formado su oído, para jerarquizar tan precisamente en consonancias y disonancias intervalos inencontrables entre sonidos puros que sólo pudo realizar la electrónica del siglo XX?

La mayoría de los sonidos naturales - trueno, cataratas de aguas,... - presentan una estructura frecuencial tan rica y desordenada que el oído no puede ni siquiera caracterizarlos con una frecuencia dominante. Sin embargo, hay ciertos sonidos, escasos pero muy notables, que sí tienen altura: los trinos de las aves, el viento a través de las cañas,... y lo más importante: estos sonidos, la industria humana los puede fácilmente reproducir, y perfeccionar.

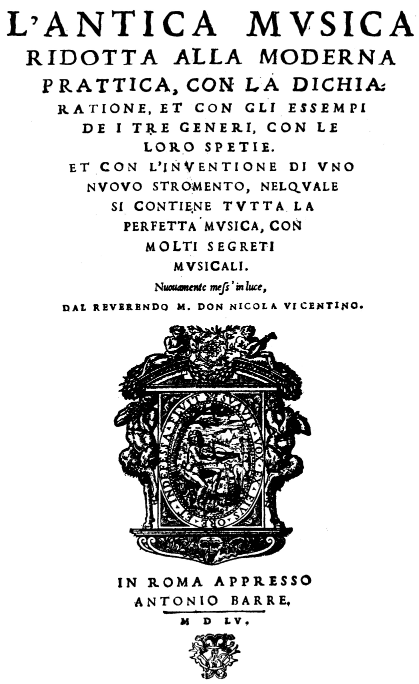
Resulta tentador imaginar que los primeros humanos experimentaron sus instrumentos de viento, de cuerda y de percusión al mismo tiempo que desarrollaban su voz, para crear, en un mismo esfuerzo, el lenguaje y el canto.

Ahora bien, los sonidos más depurados de la música no son puros: abarcan siempre un gran número de frecuencias. Pero son periódicos, es decir que su vibración se repite igual en cada vaivén. La teoría de Fourier nos muestra que cualquier onda periódica se descompone en una serie de armónicos, que son múltiples enteros de la frecuencia fundamental. En un sonido periódico, la *fundamental* es la frecuencia dominante, que da la altura del sonido, mientras que las intensidades relativas de sus *armónicos* producen el *timbre*. Todas estas frecuencias se funden en un solo sonido, con su timbre particular, pero, a diferencia de lo que ocurre con la mezcla de colores, las frecuencias mezcladas siguen percibiéndose individualmente. Dos fenómenos físicos refuerzan esta percepción: la resonancia y el batido.

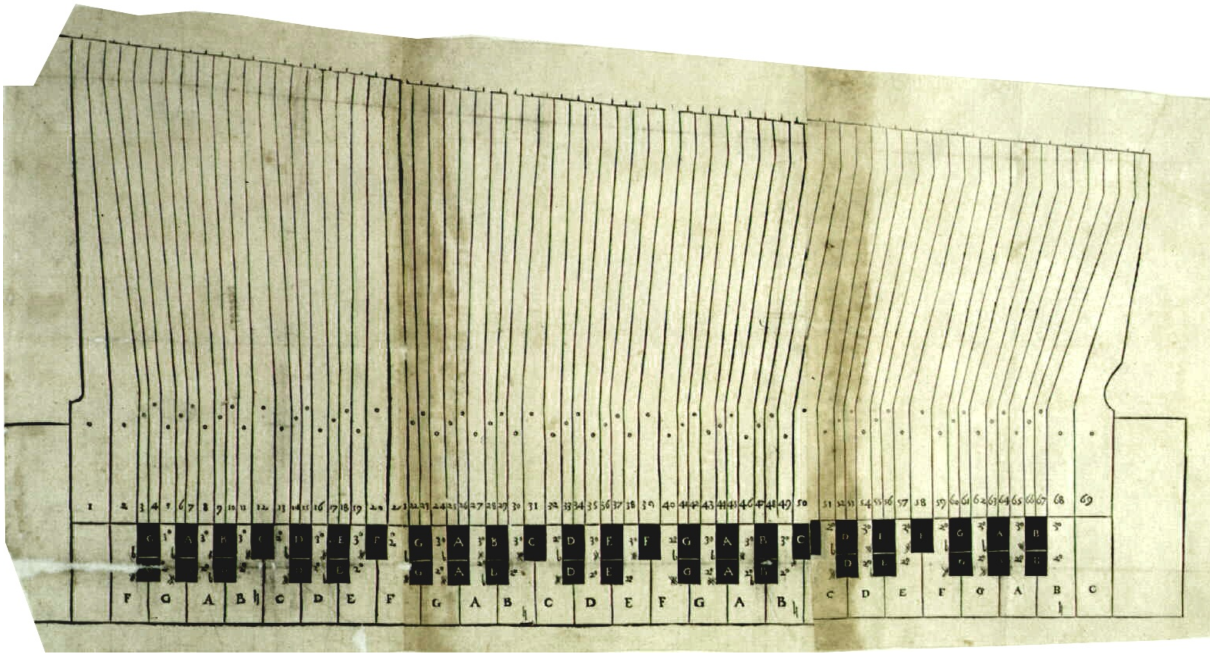
Si producimos un sonido fuerte y breve al lado de un arpa, cada cuerda del arpa cuya frecuencia propia sea igual a la de cualquier frecuencia emitida por el sonido entrará en *resonancia*,

---

[1] "Écrits", Luigi Nono, versión francesa dirigida por Laurent Feneyrou, Christian Bourgois Éditeur, 1993.


L'ANTICA MVSICA
RIDOTTA ALLA MODERNA
PRATTICA, CON LA DICHIA-
RATIONE, ET CON GLI ESSEMPI
DE I TRE GENERI, CON LE
LORO SPETIE.
ET CON L'INVENTIONE DI VNO
NVOVO STROMENTO, NELQVALE
SI CONTIENE TVTTA LA
PERFETTA MVSICA, CON
MOLTI SEGRETI
MVSICALI.
Nuouamente mess' in luce,
DAL REVERENDO M. DON NICOLA VICENTINO.

IN ROMA APPRESSO
ANTONIO BARRE.
M D LV.



Con su "nuevo instrumento", Nicola Vicentino - que Luigi Nono cita en su conferencia aquí reproducida (ver p. 25) - pretendía recuperar la variedad de las escalas musicales de Aristóxenes, que se había ido perdiendo a medida que los compositores medievales desarrollaban el sistema modal.

Portada de "La música antigua reducida a la práctica moderna" de Nicola Vicentino (1555); final del libro, donde se propone un teclado ampliado, para aumentar el número de notas en cada octava.

por simpatía. Las vibraciones del arpa nos informarán luego de la composición armónica del sonido.

Cuando dos sonidos casi iguales se emiten juntamente, se producen interferencias, las cuales modulan la nota resultante, con una frecuencia de *batido* igual a la diferencia entre las dos frecuencias emitidas. Este fenómeno se utiliza para afinar los instrumentos. Así, en una quinta desafinada, por ejemplo, el segundo armónico de la nota inferior producirá un batido con la nota superior; al ajustar la quinta, este batido se irá ralentizando, hasta desaparecer.

Las propiedades físicas de los armónicos, de la resonancia y de los batidos explican, juntamente, porqué el oído humano aprecia los intervalos simples y es extremadamente sensible a sus imperfecciones. Pero pasa algo...

La lista de los primeros armónicos de un sonido periódico de frecuencia *f* cualquiera, con los intervalos entre cada armónico y la fundamental, es la siguiente:

Armónico	razón	intervalo
f	1	fundamental
2f	2	octava
3f	3/2	quinta
4f	2	octava
5f	5/4	tercera mayor
6f	3/2	quinta
7f	7/4	~ séptima disminuida / menor

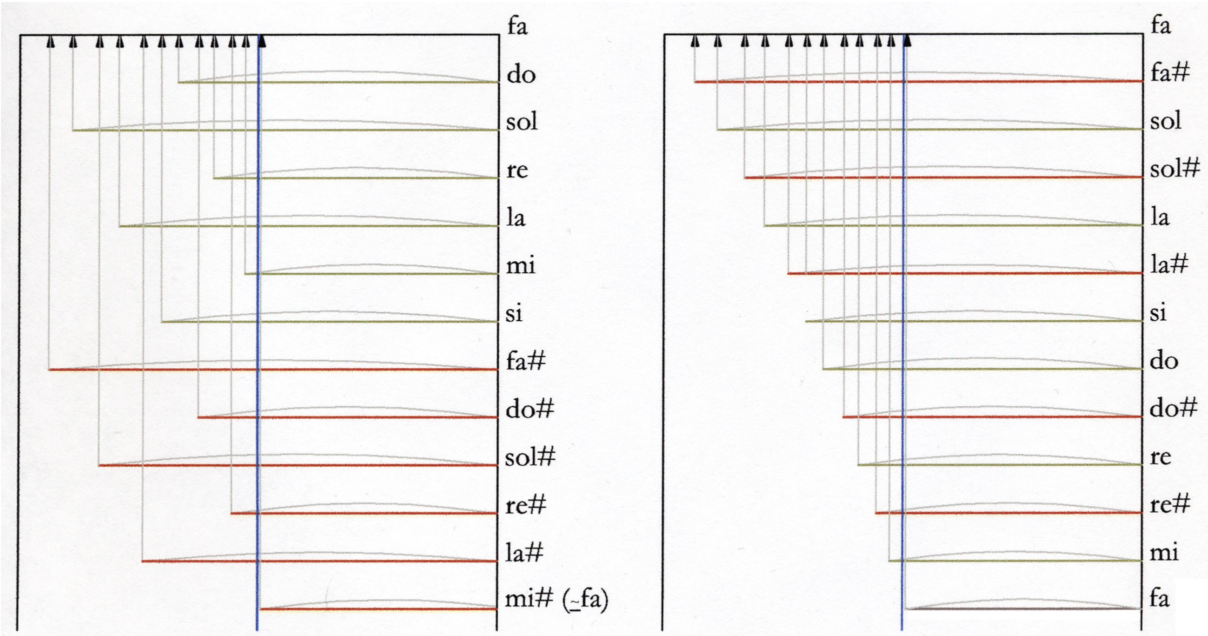
Primera observación: Los seis primeros armónicos, consonantes, forman un *acorde perfecto mayor* (tercera mayor, quinta y octava). Cuando varios instrumentos entonan este acorde, reproducen la estructura armónica del sonido periódico. Además, es cuando la triple serie de sus armónicos se solapa al máximo: casi no engendran frotamientos. Entre todos los acordes de tres sonidos distintos, éste es el más consonante.

Segunda observación: El orden de los armónicos no es exactamente el mismo que el de los intervalos simples anteriormente establecido: aquí, la tercera mayor (razón 5/4) aparece mucho antes que la cuarta (razón 4/3). En la polifonía medieval, los acordes de cuartas eran considerados muy consonantes. En el renacimiento, desaparecieron por completo, sustituyéndose las cuartas por quintas y terceras. Sin apenas exagerar, se puede decir que, en este trance, la música pasó de ser esencialmente aritmética a ser esencialmente armónica.

Tercera observación: La teoría de Aristóxenes, basada en la estructura armónica del sonido, explica mucho mejor que la de los pitagóricos, basada en los intervalos simples, porqué ciertos intervalos suenan naturalmente consonantes al oído. Notamos que todo sonido periódico encierra en sí mismo un acorde muy rico. Bien nos pueden contar que la música europea se hizo polifónica solamente a partir del siglo IX o X, la verdad es que la música misma nació de la polifonía. En realidad, las melodías populares más simples no son más que ejemplificaciones arpegiadas del acorde simultáneo formado directamente por el sonido periódico...

El doble engendramiento de la escala por la aritmética y por la física no basta para suscitar un sistema de composición fundamentado en el contraste consonante/disonante. Por una parte, la teoría de los armónicos explicita las consonancias, pero queda estática, porque no puede suscitar un desarrollo lógico de las disonancias complementarias. Por otra parte, la progresión por quintas ofrece una escala completa de doce semitonos, pero esta escala resulta también muy estática, porque se repite igual cuál sea la nota a partir de la cual se entona.

Para dinamizar la armonía, hace falta reducir la escala, para que despliegue dos tipos de intervalos en vez del único semitono. Eso se consigue al limitar la progresión de quintas a cinco notas (por ejemplo: fa – do – sol – re – la) o a siete notas (por ejemplo: fa – do – sol – re – la –



Toda la dificultad de la siguiente explicación viene de que sólo tienen nombre, en nuestros idiomas, las siete notas de la escala heptafónica, la cual es posterior, en un desarrollo lógico, a la escala de doce sonidos... El presente gráfico pretende ayudar a salvar este mal paso. Una vez resuelto el problema del temperamento (por ejemplo: distribuyendo igualmente la coma entre las doce quintas), las doce notas contenidas en la octava (iz.) se reordenan (dr.) en longitud de cuerda decreciente (es decir: en frecuencia creciente, subiendo la escala), obteniéndose, al añadir la octava, doce intervalos iguales - los *semitonos* -, que corresponden cada uno, en la afinación del temperamento igual, a una razón igual a la duodécima raíz de dos. Ahora, si seleccionamos solamente las siete primeras notas de la progresión por quintas (iz. en verde), obtenemos una escala fragmentada (dr. en verde) a cuyas notas podemos entonces aplicar los siete nombres de la *escala heptafónica* (fa-sol-la-si-do-re-mi-(fa)). Luego, observamos que el semitono sólo se preserva en dos lugares (entre si-do y entre mi-fa), dándose, entre las demás notas, debido a los huecos creados, un intervalo doble: el *tono*. Por esta razón, la quinta si-fa se singulariza, siendo la única en contener dos semitonos, lo cual la *disminuye* con respecto a las demás. En la progresión de quintas (iz.), la sucesión fa-do-sol-re-la-mi-si se ha de continuar *alzando* debidamente el fa (mediante una *alteración*: fa#), y las notas siguientes, para preservar las quintas justas. Estas notas *sostenidas* son las que completan (en rojo) la escala heptafónica, rellenando sus huecos (dr.). Una vez entendido eso, podemos entonar la escala heptafónica a partir de cualquier nota, transformando el *modo de fa* aquí organizado en, por ejemplo, el más conocido *modo de do*: do, re, mi, fa, sol, la, si, do...

Constitución lógica de la escala heptafónica (el autor & Gori Moya).

mi – si). Una vez reordenadas las notas dentro de la octava, se obtiene, en el primer caso, la escala *pentatónica*, formada únicamente por tonos y dos terceras menores y, en el segundo, la escala *heptafónica*, formada únicamente por tonos y dos semitonos.

El primer sistema, adoptado en China, en la India, y probablemente en la América precolombina, ofrece luego cinco *modos* de entonar la gama, ya que, según la nota por la cual se empieza, existen cinco posiciones posibles para las terceras menores dentro de la octava, caracterizando los cinco modos diferentes:

Do re – fa sol la – do
Re – fa sol la – do re
Fa sol la – do re – fa
Sol la – do re – fa sol
La – do re – fa sol la

De la misma manera, el segundo sistema, adoptado en la India, en Caldea, en Grecia y luego en toda Europa, ofrece siete modos de entonar la gama, con siete posiciones posibles para los semitonos mi-fa y si-do. Los griegos consideraban cada uno de estos modos como capaz de suscitar una emoción particular (alegre, fúnebre, pomposo,...).

De paso, la descripción de la escala heptafónica nos permite explicar los nombres de los intervalos que hemos estado utilizando a lo largo de este texto, sin poder aún justificarlos. Las lenguas europeas sólo tienen nombre para siete notas, las cinco otras se describen con alteraciones (fa *sostenido* o mi *bemol*, por ejemplo). Se llama *segunda* el intervalo que separa dos notas consecutivas de la escala heptafónica: equivale a un tono (segunda *mayor*: do-re) o a un semitono (segunda *menor*: mi-fa). Los demás nombres corresponden a las notas que hay que contar en un intervalo, incluyendo sus extremos. Así, do-mi es una *tercera* (do, re, mi) y do-sol una *quinta* (do, re, mi, fa, sol). Una tercera se dice *mayor* cuando cuenta dos tonos (do-mi) y *menor* cuando cuenta un tono y medio (re-fa). Con las alteraciones, se pueden formar intervalos *aumentados* (como la cuarta do-fa#) o *disminuidos* (como la cuarta do#-fa).

Las escalas heptafónicas tienen, pues, un carácter, y permiten, al pasar de una a otra dentro de una misma pieza musical, es decir al *modular*, luego al *transponer*, engendrar una gran variedad de caracteres y de sentimientos. Para obtener esta variedad, había que buscar el número más diferente de doce: siete es la mejor elección, seguida directamente por cinco.

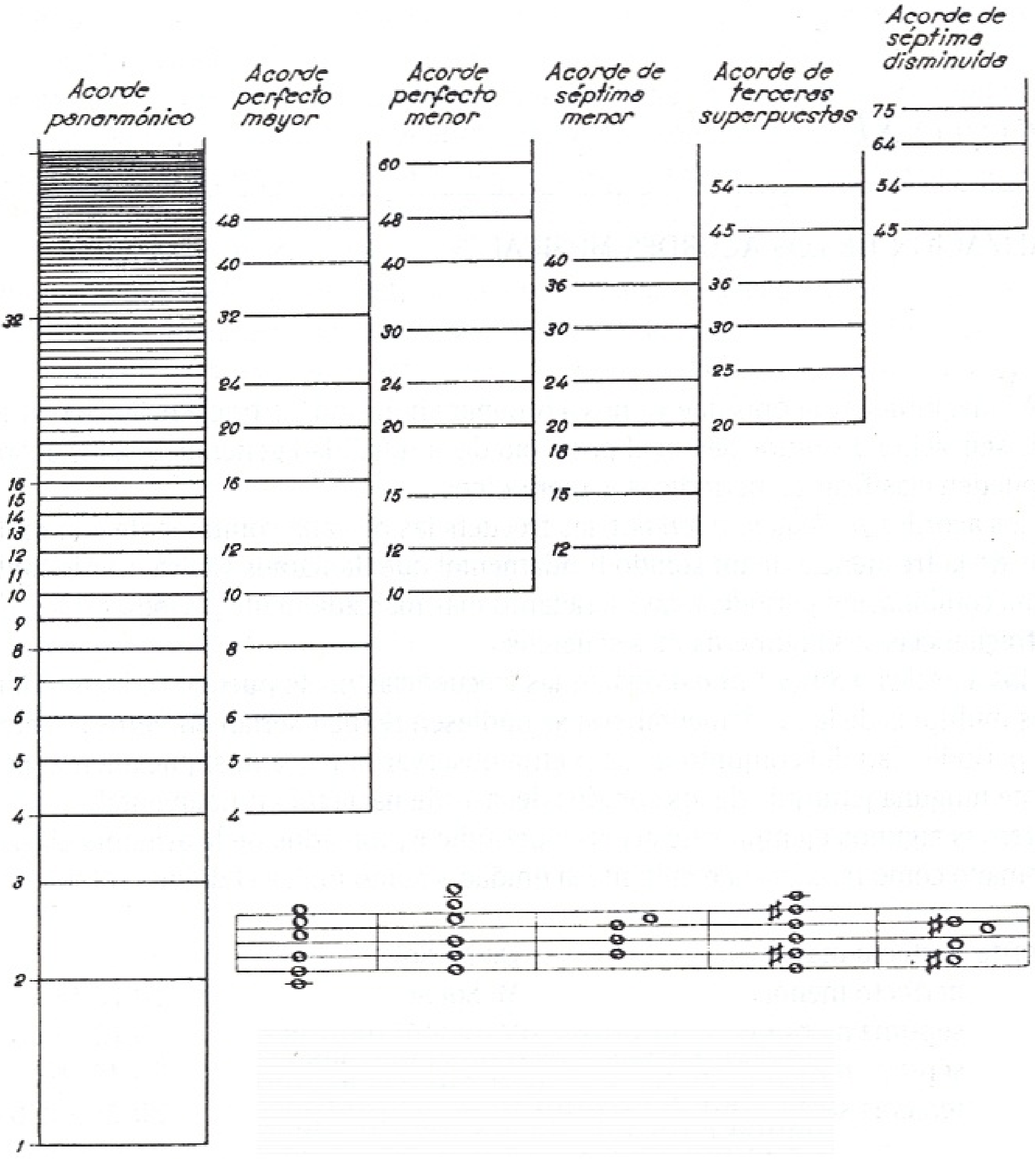
Al tomar conciencia de la lógica interna de todo este desarrollo, no es de extrañar el que haya podido ser llevado en paralelo en zonas culturales tan poco comunicadas como Grecia, China y, quizás, América...

Eso es lo esencial sobre los intervalos de la música. Mejor dicho, lo era, hasta la segunda mitad del siglo XX, cuando la electrónica permitió, por fin, hurgar más a fondo en las propiedades del sonido, librándose de todas las ataduras, menos, desde luego, las que limitan el oído humano. Para explicar esta libertad conquistada, nada mejor que citar a uno de los grandes compositores del siglo XX, Luigi Nono. Cómo sus escritos no están muy difundidos en castellano, me ha parecido útil traducir largamente la conferencia que dio, en 1989, en la cartuja de Villeneuve-lès-Avignon:

"Aristóxenes, 300 años a.C., ha dicho que todo está en el contraste. Aristóteles y Platón han hablado de la capacidad del sonido.

El sonido cuantitativo y el sonido cualitativo.

Aristóxenes ha hablado del sonido cualitativo, no solamente como sonido pre-dado, prefijado, precisado para el cual es necesario seguir una metodología. Pero ha hablado también de la necesidad y de la posibilidad de la subdivisión sin fin. Naturalmente, eso ha producido, en la



Este interesante gráfico visualiza, en la columna de la izquierda, los primeros armónicos, múltiples enteros de un sonido fundamental *f* cualquiera. Se muestra luego cómo las notas de distintos acordes clásicos, construidos sobre la misma fundamental, corresponden a estos armónicos. Así, el acorde perfecto mayor, el más consonante de los acordes tonales de tres sonidos, se halla completamente representado con los armónicos 4, 5 y 6, y sus repeticiones octavadas. Los dos primeros armónicos (octava y quinta) se encuentran en todos los acordes, menos en el de séptima disminuida, constituido por una superposición de terceras menores, que no contiene la quinta justa. Como lo decía Arnold Schönberg, vemos luego cómo las distintas combinaciones posibles van produciendo consonancias cada vez más *alejadas*. Para un oído tonal, se llega rápidamente a la percepción de *disonancias*. La frontera entre consonancia y disonancia - si es que existe - es cuestión de interpretación, de formación, de hábito auditivo. A través de los siglos, los compositores europeos la fueron definiendo (sistema modal), reforzando (sistema tonal), alejando (desde Bach a Wagner), desdibujando, hasta abolirla en el siglo XX.

Los acordes tonales jerarquizados por la estructura armónica del sonido periódico.

época, una magna discusión, una gran lucha ayer como hoy. Pensamos, por ejemplo, al concilio de Trento, donde se revisaban los *intervo musicales*, un sistema muy práctico.

Vicentino dice, en *L'Antica musica ridotta alla moderna prattica* (1555), unas cuantas cosas que encuentro justamente muy importantes. Quizás veréis en ello el cómo de los instrumentos de la época o quizás escucharéis unas cosas que no es posible entender con la racionalidad. ¿Cómo puede ser que escuchéis cosas que no tienen relación con los sentimientos, la memoria y la *psukhê*? Eso es exactamente la polémica en la formulación de *La República*, donde Platón escribe que la gimnasia sirve a la armonía del cuerpo humano y la música a la armonía de la mente. No son cuestiones dadas. De ciclo en ciclo se ha discutido. Paul Klee, en el *Cuaderno de esbozos de la Bauhaus*, ha recordado que entre dos puntos sólo hay dos relaciones: ninguna o una relación directa. Luego, se ha criticado esta afirmación y se ha dicho que la relación más directa entre dos puntos no es la más correcta. Pero hay también una infinidad de relaciones posibles. Pensad en la idea extrema de Aristóxenes, que todo puede ser subdividido mientras se mantenga el control del oído. Eso es romper directamente la costumbre de considerar los sonidos o las señales como elementos prefijados. Eso es romper enseguida el intervalo o volver a nombrarlo.

El intervalo, es la relación. Las cosas son racionales entre 4, 5 o *x* con *x* relaciones de posibilidades. En el libro de Paul Klee, hay una sucesión de indicaciones de posibilidades. La señal no permanece fijada. Dicho de otro modo, el do no es el do menor o mayor, sino una señal que tiene en sí particularidades y cualidades siempre por reinventar, siempre por activar, con una capacidad de la crítica, del conocimiento y de la memoria. Ahora, hay dos puntos que es posible relacionar y entonces, estos puntos se convierten en señales a poner en relación con otras relaciones. Pensad en Aristóxenes: podemos dividir hasta cuartos de tono. Pensad en la música árabe y en el texto de un joven alemán que ha estudiado en esta música hasta 33 divisiones; él también explica con vivacidad las posibilidades de la música árabe en Safyy ad Dîn, asiento teórico del siglo XIV. Él también dice que hay un marco de posibilidades no solamente limitado así, sino que al interior existen muchas otras posibilidades, hasta las posibilidades de la música de hoy (sea el *publison* o el *halaphon*). La posibilidad de superponer sonidos perfectamente singulares.

Aquí surge un problema: la escucha. Es cierto, objetivamente cierto, la escucha no es directa ni fácil, como la escucha de una obra del pasado. Por otra parte, no tenemos la capacidad de una escucha directa como para la música árabe o un canto hebraico o incluso el tipo de ritmos en las orquestas de percusiones de los Pigmeos y de los Angoleños, estos últimos estando en contacto con la música de los Incas. Es un musicólogo cubano que ha estudiado esta formación de las orquestas de percusiones donde los ejecutantes tocan con la diversidad de los ataques y ligados. Luego, una elección extremadamente problemática, que se plantea hoy, es de considerar el sonido, pero no en relación con tres o cuatro sonidos como en Ligeti por ejemplo, o como en el primer Stockhausen, o como en otros. Ahora, pensamos en diferentes subdivisiones, pensamos en diferentes relaciones, pensamos en diferentes capacidades del oído y de la técnica sobre todo. Para la pedagogía, es un campo extremadamente abierto y muy difícil cuando vemos cómo se enseña en los conservatorios, en casi todo el mundo. Vemos hasta qué punto los conservatorios son verdaderamente un momento de conservación y no un lugar donde se dan las informaciones para inventar algo. No es un lugar para dar una metodología y para aplicar esta metodología, sino para dar un pensamiento de la música, la cual tiene en sí misma numerosos puntos comunes con la física. Pienso en Max Planck. Pienso en toda la nueva biología que se desarrolla hoy en las universidades americanas sobre la relación entre la memoria, la crítica, la fantasía y lo que llamamos la experimentación. La experimentación: la cosa nueva que pone todo en movimiento en nuestra manera de ser, en la memoria, en la racionalidad y en la crítica.

Por ejemplo, tenéis un sonido, un si bemol. Hoy, con la tecnología, con el *live electronic*, es posible utilizar solamente una parte del sonido, una parte del aire, o de repente todo el sonido, con una dirección y una densidad particulares, o al contrario terminar solamente con un soplo. No hay entonces un si bemol, pero el flautista utiliza el soplo más vecino al si bemol. Es posible, con el *live electronic*, exaltar aquello. Veis por lo tanto todo lo que se puede extraer, con la

Estas miniaturas de finales del siglo XV ilustran diversamente el hecho de que los colores se desvanecen en la oscuridad. Más tarde, los pintores tenebristas trabajarán esencialmente este tema...

La noche en iluminaciones perteneciendo a "Historias de Troya" (BnF, Fr. 59 [ar.iz.]), "Historias de Alejandro Magno" (BnF, Fr. 49 [dr.]) y "Flor de las historias" (BnF, Fr. 55 [ab.iz.]).

tecnología, de un solo sonido que hemos sido acostumbrados a considerar preciso, uniforme, unitario. Eso es también la tecnología de las maderas en Japón y de las flautas en Corea: el resultado es estrictamente idéntico. Si retomáis la película de Tarkovski, *El Sacrificio*, la flauta escrita por Takemitsu es una flauta de la India, sin tecnología, que sólo utiliza la capacidad del aire, la capacidad de utilización de la boca. No solamente de la boca entera. Y todo eso es se puede hacer porque es imposible detectar el paso de un clarinete contrabajo a un tuba de 16 pistones o a una mezzo-soprano cuando tocan extremadamente *piano*. Es imposible porque todos los motivos, todos los acontecimientos instrumentales, y todas las superposiciones armónicas van a desaparecer. He utilizado muy a menudo esta técnica que lleva a una escucha extremadamente intensa, extremadamente rarefacta, a una escucha del "nada escuchar". Pero lo más importante es sobre todo que no se reconoce ni el tuba, ni el contrabajo, ni la mezzo-soprano.

Demostráis entonces que hay una posibilidad de subdivisión, como lo decía Aristóxenes, y como los estudios electrónicos y los ordenadores pueden hacerlo hoy. Podemos también analizar el canto griego, ver y controlar cómo el canto hebraico lleva en sí mismo milésimos de tono. Naturalmente, hay que educar el oído y hacer que eso se convierta en un hábito. Pero pienso que está muy relacionado con una parte del sistema cultural de hoy.

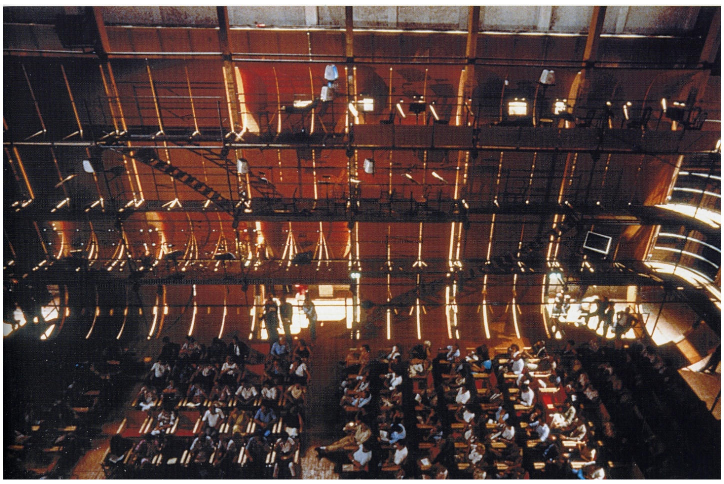
Una técnica que analizamos también, con el profesor Haller, es la posibilidad de organizar una composición a partir de una sola nota, de una sola altura, utilizando el *halaphon*. Es decir: altavoces en diferentes situaciones con la misma altura. La diversidad de las velocidades y de las direcciones, con un sonido único, creando una especie de separación en la selección del intervalo, como lo dije antes. Sólo con un sonido, filtrando los espectros, podemos utilizar solamente eso o aquello, dejando el resto para más tarde. Demos a un sonido un tempo particular (digamos 60) y una unidad de dirección a través de los cinco altavoces. El mismo sonido puede partir también en sentido inverso con un tempo de 120. Podemos así romper el sonido pero, sobre todo, superponerlo, combinarlo con otro elemento. Quizá con otro sonido que sigue tal o cual dirección. Puede tratarse de velocidad, y obtenéis algo totalmente distinto, diferente, y no es lo mismo para la dinámica, para la dirección, para la continuidad o para la discontinuidad. Deberíamos hablar aquí de espacio, porque de todo lo que he hablado hasta ahora, es la innovación más importante. Esta transformación continua o no, innovadora o no.

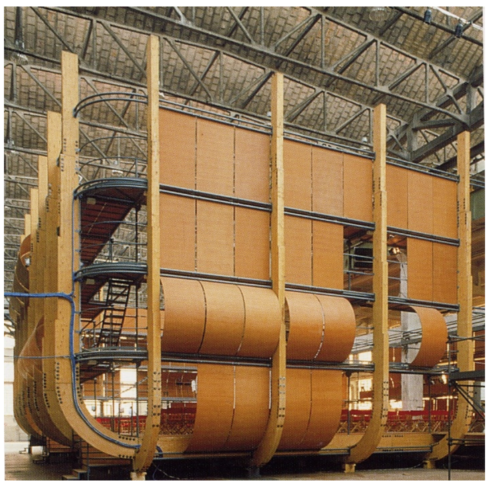
Un cuadro de Mondrian: ¿dónde está el centro, dónde está el fin, los límites, el principio? Toda mi concepción está en este cuadro. Lo mismo en Magritte, con el rojo, el negro y el blanco: ¿dónde están los límites del blanco, del rojo y del negro, y todas las variaciones interiores con la extinción de los colores y todas las diferenciaciones en el uso de los pinceles? Veis que hay aplicaciones en la pintura que están perfectamente aceptadas. Pero en la música, la cosa no es tan natural, ni habitual, ni totalmente integrada.

Otra cosa, la capilla de Gaudí, en España, en la colonia Güell, con tres elementos solamente: piedra, estaño, cerámica, y nada más. Toda la construcción, todas las relaciones, todas las convenciones están enteramente quebrantadas con tres elementos. Llegado a este punto, quisiera haceros escuchar una obra. Se trata del *Diario Polacco*. [...]

Voy a terminar con *Spem in allium* de Tallis, el ejemplo tipo de una pieza espacial. Una pieza con el aire también. Están los ocho coros que mantienen relaciones con el espacio, la música misma tiene una relación con el espacio. Con ocho coros, sólo se pueden utilizar la tónica y la dominante. Pero lo extraordinario, es que con esta supuesta reducción de las posibilidades, Tallis explora el espacio, hace vivir el espacio, hace que el espacio mismo se vuelve cantable. En la época de Tallis y en la época de los Gabrieli, los compositores escribían para el aire libre, para un espacio especial de madera, o con características relacionadas con la Chiesa Madonna dell'Orto. Hay, por ejemplo, una música de Andrea Gabrieli donde nos encontramos en presencia de elementos japoneses en la música porque la pieza ha sido escrita para tres príncipes japoneses que llegaban a Venecia.

"Retomemos la historia de la idea. Nono piensa en el espacio musical para Prometeo como en una especie de arquipiélago. Se trata, claro, de una expresión poética, evocadora, pero también de una referencia bastante precisa. Cuando nos encontramos en una isla al interior de un arquipiélago, de cualquier forma que nos giremos, no hay manera de abrazar con la mirada el sistema en su totalidad, instantáneamente: el campo visual humano es demasiado limitado para que sea posible. No podemos ver siempre todo cuanto nos rodea. Sin embargo, es posible sentir la presencia de lo que tenemos detrás. Sobre una isla, por ejemplo, el viento que proviene del lado opuesto al que miramos crispa la superficie del agua delante de nosotros. Vemos siempre y solamente una parte del todo, pero podemos percibir el todo captando, gracias a nuestros sentidos, los efectos de las causas que nos son invisibles.





Partitura, montaje y representación del "Prometeo" (1984). Texto: Renzo Piano.

Otro concepto: no es solamente la prestación de un intérprete, siempre hay que empujar al máximo, hacia las fronteras de lo posible, el máximo de elementos que transforman el sonido, el ligado en la ejecución, los auditores, el público. Cosa típica de la música del Renacimiento: siempre en altura. San Marco y todas las demás iglesias. Una música donde las *cantorie* están dispuestas en altura, y nunca abajo. Arriba, con dos, cuatro o cinco posibilidades, he contado en la catedral de Granada hasta ocho posibilidades de emplazamiento de dos o tres voces, o en la gran catedral del Escorial la posibilidad de tener hasta ocho órganos. Creo que muchos de estos cambios pueden ayudarnos a cambiar como músicos y como hombres, o a participar en el cambio necesario hoy. Quizás. Quizás no. Pero soy partidario de esta necesidad que luego podemos discutir, criticar, o condenar. Pero siento allí, verdaderamente, directamente, una nueva, una otra era, una otra luz también. Y sobre todo, en el plano pedagógico, la capacidad de dar informaciones como lo he hecho. Sólo doy informaciones. Y no me gusta, lo digo francamente, lo de "esta noche, pensad en mí". Sólo son cosas posibles para mí; no todos han de hacer lo mismo. Creo, al contrario, que, en el momento pedagógico, debemos estudiar de otra manera y que cada uno debe encontrar su propia especificidad, su propia razón de vivir, su propia razón de poder hablar con los demás."

Luigi Nono[1]

A través de su música, de sus indagaciones y de las informaciones que Luigi Nono aporta en esta conferencia, el compositor no deja de interrogar el oído y sus características fundamentales: hay una percepción *relativa*, mientras el fenómeno percibido se mantiene alejado de los límites perceptivos, y hay problemas que se plantean de manera naturalmente *discreta*, pero hay también una percepción discreta *por naturaleza* (y no discretizada): la de la altura musical.

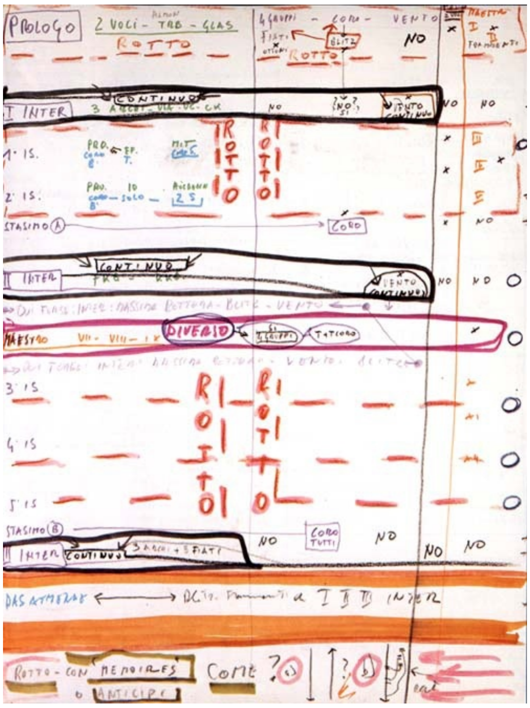
Cuando Nono amplía la lista de los intervalos clásicos, lo hace por subdivisión, como Aristóxenes: "todo puede ser subdividido mientras se mantenga el control del oído", es decir: los intervalos siguen correspondiendo a razones determinadas, siguen discretos, quizás hasta los "milésimos de tonos" del canto hebraico.

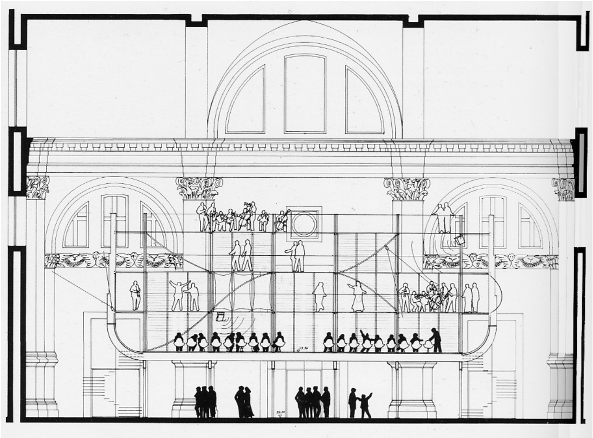
En los sonidos periódicos, el aspecto frecuencial se divide en dos sensaciones - la altura y el timbre – un poco como ocurre con la frecuencia de la luz, entre color en sí y saturación. En la música instrumental clásica, el timbre es forzosamente discreto: cada instrumento tiene su propia estructura armónica, con pocas posibilidades de variación. Pero estas posibilidades pueden reforzarse, al trabajar los ataques y los modos de juego, al modificar el instrumento (el piano preparado de John Cage) o al transformarlo mediante la electrónica. También existe la posibilidad de tocar muy suave, cerca del umbral donde todos los gatos son pardos, confundidos los sonidos como los colores bajo la dudosa luz del crepúsculo.

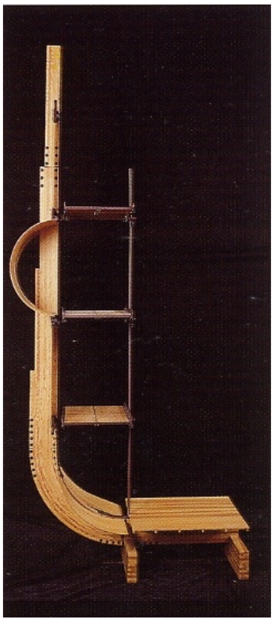
Con la electrónica, otros compositores, los llamados "espectrales", irán más lejos, poniendo fin a la clásica distinción entre los sonidos (periódicos) y los ruidos (que no tienen altura). La frecuencia dominante desaparece con la periodicidad del sonido, y sólo queda el timbre, es decir: el espectro frecuencial. Las *melodías de timbre* de los dodecafonistas eran eminentemente discretas: el sonido pasaba de un instrumento a otro. Aquí, en cambio, vemos una fascinación por la estructura en sí, por la música de los polifonistas flamencos medievales: algo sutil, pero que casi no se mueve. ¿Enriquecimiento o empobrecimiento? ¿Se gana o se pierde?

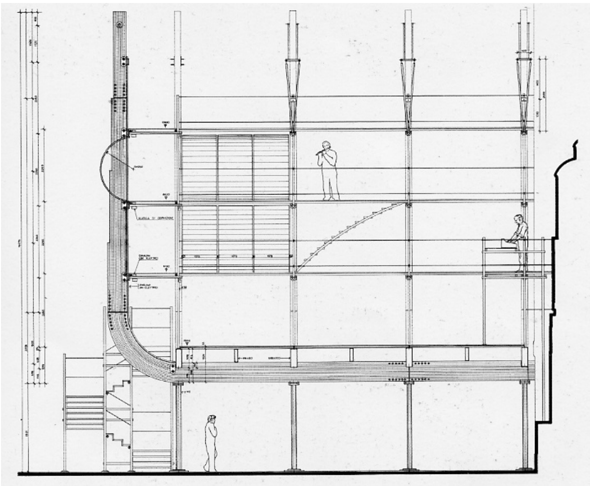
Nono cierra su conferencia con una afirmación esencial para todas las artes: "siempre hay que empujar al máximo, hacia las fronteras de lo posible, el máximo de elementos que transforman el sonido, el ligado en la ejecución, los auditores, el público". Estamos lejos de la aserción paradójica según la cual "menos es más". No: menos es menos; el artista se ve a veces impulsado a limitar, a simplificar sus medios, pero siempre para desarrollar en nuevas direcciones; a veces, "menos permite más", pero lo que cuenta es: más, siempre más, para el oído perezoso,

[1] "Écrits", Luigi Nono, versión francesa dirigida por Laurent Feneyrou, Christian Bourgois Éditeur, 1993.









De estas premisas nace la concepción a la base de toda la implantación del decorado: un arquipiélago en el centro del cual se encuentra el público, rodeado por una escena musical que no puede verse nunca juntamente en su totalidad, pero que siempre puede percibirse enteramente gracias a la música, que, como la brisa marina, nace a nuestras espaldas, pero manifiesta sus efectos delante de nuestros ojos.

Nos damos cuenta de que la consecuencia inmediata de tal organización ideal es la mobilidad del escenario: solistas y cantantes deben poder desplazarse alrededor del público, a lo largo de la línea del horizonte del arquipiélago en el centro del cual los espectadores se mantienen inmóviles, confortablemente sentados. Quisiera subrayar este último hecho, que considero poco corriente. Creo que hay que insistir en esta noción de confort, diría incluso ritualizarla, en nuestro caso. Los que asisten al espectáculo del Prometeo están sentados en confortables sillones.

"Prometeo", obra de Luigi Nono, texto de Massimo Cacciari, montaje escénico de Renzo Piano. Texto: Renzo Piano.

que siempre prefiere escuchar lo que ya conoce, que se conforma y se congratula tan fácilmente, que no quisiera enterarse del cambio por venir, del cambio necesario.

Un ejemplo, a través de un problema para la composición: la relatividad de las alturas tiene sus límites, porque el oído humano sólo percibe las frecuencias hasta quince o veinte mil hertzios. Por lo tanto, el timbre se va empobreciendo con la altura: en un sonido de 4000 Hz, sólo podemos percibir tres armónicos, mientras que un sonido de 40 Hz nos ofrece centenares de ellos. Una reacción posible a este fenómeno fue la de las instituciones musicales en los dos últimos siglos. Los directores quisieron constantemente alzar el diapasón, para que la orquesta sonara más "brillante", y atraer así al público. Y los cantantes se quejaban de que se los llevara a cantar cada vez más agudo, al límite de sus posibilidades, como virtuosos, fenómenos de feria: cantantes eunucos para sonidos castrados...Otra reacción posible: ahora, con la electrónica, se puede manipular el espectro, enriquecer los agudos o empobrecer los graves a voluntad, "utilizar solamente eso o aquello, dejando el resto para más tarde". Un si bemol no es nada más que un sonido por construir, y luego, por poner en proporción con otros sonidos. Sólo en la relación, en la relatividad, se enriquece la comunicación, como en el cuadro de Mondrian: "¿dónde está el centro, dónde está el fin, los límites, el principio? Toda mi concepción está en este cuadro".

Los compositores contemporáneos balancean una y otra vez entre los discreto y lo continuo, en busca del mayor enriquecimiento: ¿lo discreto, como en la capilla Güell, donde "con tres elementos solamente: piedra, estaño, cerámica, y nada más, toda la construcción, todas las relaciones, todas las convenciones están enteramente quebrantadas", o bien lo continuo, como en el cuadro de Magritte, donde se desvanecen los límites entre colores? La gran innovación de la época es la posibilidad de manejar libremente el sonido en el espacio. Utilizando el *halaphon*, los sonidos viajan, aceleran o se detienen. La continuidad del espacio puede desteñir en el tratamiento del tiempo, a través de las velocidades, como, en el pasado, la influencia del sistema frecuencial había desembocado en la discretización de las duraciones y del espacio (disposición de los coros en determinados lugares de la iglesia). Pero, en el mismo párrafo, el compositor habla del tempo con el vocabulario antiguo: pasar de 60 a 120 significa duplicar la pulsación, imponerle una razón 2. Y concluye sobre el espacio: "esta transformación continua o no, innovadora o no"...

Concluiremos con el primer músico de Europa cuyo nombre haya llegado hasta nosotros. El pitagórico Damón, que enseñó la música a Sócrates y a Periclés, es conocido por haber introducido uno de los modos de la escala:

> "El modo lidio, relajado, al opuesto del modo mixolidio, y vecino del modo iónico, es, según la tradición, invención del ateniense Damón."
>
> *Seudo-Plutarco*[1]

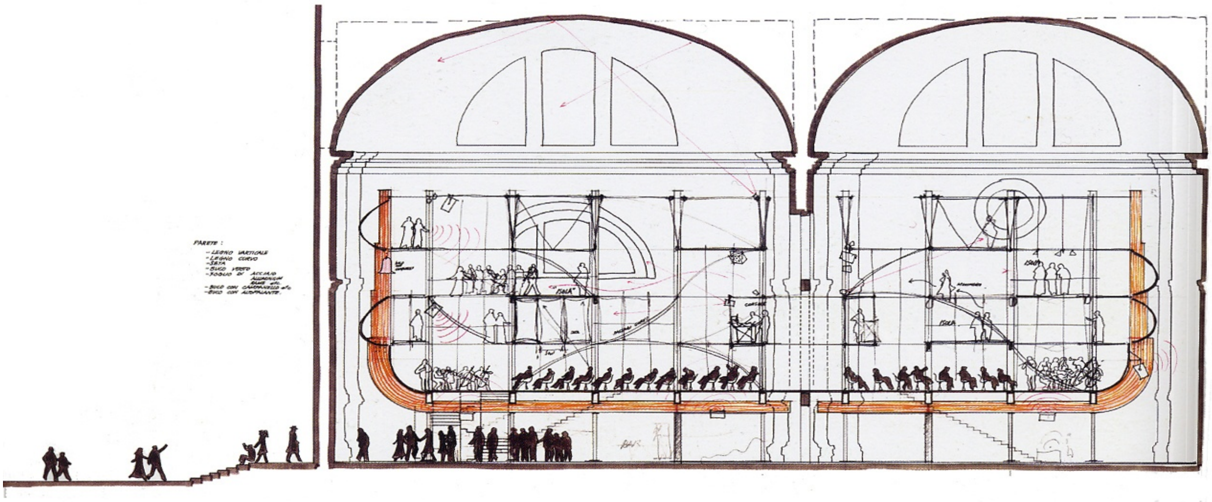
Se sabe también de él que estudió detenidamente la influencia de los modos y ritmos musicales sobre la psicología humana y, en buen pitagórico, las posibilidades pedagógicas y legislativas resultantes:

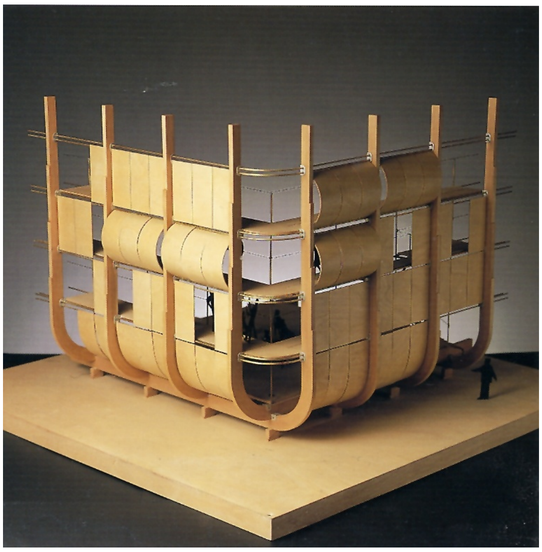
> "Bueno, dije, sobre este punto consultaremos otra vez a Damón, que nos dirá cuáles son los ritmos que convienen a la bajez de alma, a la desmedida, a la locura y a las otras especies de malas conductas, y cuáles son los que se deben reservar a las conductas contrarias."
>
> *Sócrates, según Platón*[2]

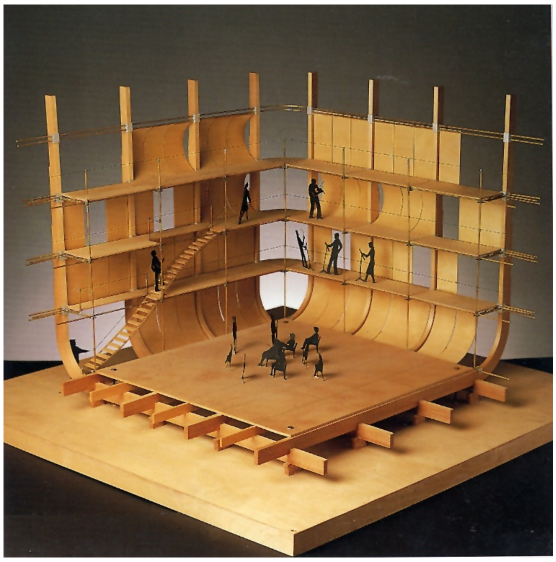
---

[1] "Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988. Damon, *in* "De la musique", Pseudo-Plutaque (p. 458).

[2] Damon, "Les présocratiques" (p. 459), in "La République", III, 400 a, Platon.







Son, pues, los acontecimientos del escenario los que, desplazándose alrededor, vienen al encuentro de la mirada del espectador y entran en su campo visual. De lo que se halla entonces escondido a sus espaldas, el espectador percibe el sonido vivo; de lo que acabará haciéndose visible, real ante sus ojos, no oirá más acaso que el espectro, electrónicamente desvanescente y lejano.
Viene ahora el momento de describir la instalación general:
Para Prometeo, he imaginado algo que se parece a un violín o mejor dicho a un laúd o a una mandolina: un instrumento de música tan grande (8000 o 9000 m^3) que pueda contener todo el espectáculo, público incluído. La música que allá nace hace entrar en vibración naturalmente esta enorme caja de resonancia y, al mismo tiempo, los músicos y los espectadores, literalmente integrados a este cuerpo en resonancia. La madera es el material rey, primero porque sus propiedades nos permiten realizar un medio acústico conforme a las exigencias de Nono. Pero hay otras razones tan importantes…"

Renzo Piano

"Prometeo - Tragedia de la escucha", Luigi Nono. Texto: Renzo Piano.

Por ello, no ha faltado quién haya querido ver en él el padre de la musicoterapia... Esta es, desde luego, la interpretación pobre; pero, ¿qué dice Damón, en la única cita que conservamos de él, gracias a *La República*?

"De hecho, hay que recelar, si se adopta un género musical nuevo: porque nos arriesgamos a trastornar todo. *En ninguna parte se cambian los modos musicales sin que cambien también las leyes más importantes que rigen la ciudad*, dice Damón: es también mi convicción."

Sócrates, según Platón[1]

Luigi Nono no dijo otra cosa.

¿Acaso la pintura abstracta no ha cambiado nuestra visión del mundo?

¿Acaso la música de Arnold Schönberg no ha cambiado nuestra manera de oír el mundo?

[1] Damon, "Les présocratiques" (p. 460), in "La République", IV, 424 c, Platon.

Origen de las ilustraciones

p.020 iz.: - “La escala de las quintas”, dibujo propio; realización gráfica: Gori Moya.

p.021 iz.: - “Reducción de la coma”, dibujo propio; realización gráfica: Luc Masset.
- “El sonido del bambú (flautas *yo* y *ty*) y el sonido de la calabaza (*koang tseu*: 24 tubos sobre un volumen resonante), ilustración de “Mémoires sur les Chinois”, Joseph-Marie Amiot (1779), *in* “Petite histoire de l’acoustique”, Pierre Liénard, Lavoisier, Paris, 2001.

p.022 iz.: - Descomposición en series de Fourier de una onda rectangular, *in* “Los sonidos de la música”, J. Pierce, Ed. Labor, Barcelona, 1985.
- Espectro frecuencial de un sonido de clarinete, ilustración de “De la transformation des sons”, Hans-Peter Haller, *in* “Luigi Nono”, Ed. Festival d'Automne à Paris, Contrechamps, Paris, 1987.

p.023 iz.: - Portada de “L’Antica musica ridotta a la moderna prattica”, Nicola Vicentino, 1555, ejemplar de la BnF, cota: NUMM-58223.
- El teclado de Nicola Vicentino, Biblioteca vaticana, Casimiri II 173.

p.024 iz.: - “La escala heptafónica”, dibujo propio; realización gráfica: Gori Moya.

p.025 iz.: - “Acordes musicales”, Miguel Lorente, *in* “Acústica musical”, Gonzalo Fdez. de la Gándara & Miguel Lorente, ICCMU, Madrid, 1998.

p.026 iz.: - “Lucha de Hércules con Acheloos” Français 59, fol. 177, BnF, *ex* “Histoires de Troyes”, Raoul Lefèvre, finales del siglo XV, Bélgica.
- “Alejandro cruzando la Sogdiana”, Français 49, fol. 12, BnF, *ex* “Historiae Alexandri Magni”, Quintus Curtius, (trad.: Vasque de Lucène), finales del siglo XV, Flandes.
- “Judith abandonando el campo”, Français 55, fol. 122v, BnF, *ex* “Fleur des histoires”, Jean Mansel, finales del siglo XV, Francia.
- “Banquete en casa de Bessos”, Français 49, fol. 9, BnF, *ex* “Historiae Alexandri Magni”, Quintus Curtius, (trad.: Vasque de Lucène), finales del siglo XV, Flandes.

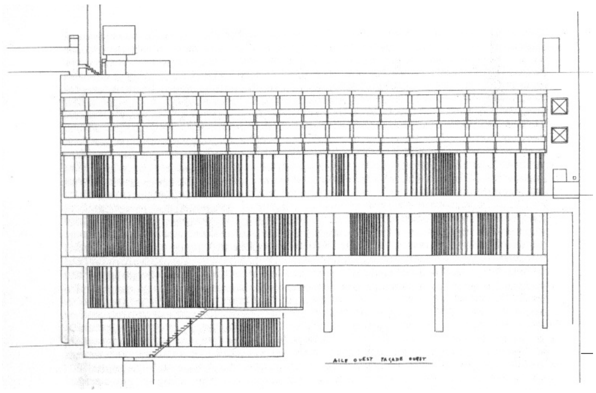
p.027 iz.: - Partitura del “Prometeo”, Luigi Nono, *in* http://www.festival-automne.com/public/ressourc/publicat/1987nono.
- Representación del “Prometeo” en la iglesia San Lorenzo de Venecia, *in* “Renzo Piano Building Workshop- complete works v.1”, Peter Buchanan, Phaidon Press Limited, London, 1993.
- Montaje del “Prometeo” en la fábrica desafectada dell’Ansaldo en Milano, *in* “Architettura & Musica”, Renzo Piano Building Workshop, edizioni Lybra Immagine, Milano, 2002.
- Texto: “Prometeo, un espace pour la musique”, Renzo Piano (1984) in “Luigi Nono”, Ed. Festival d'Automne à Paris, Contrechamps, Paris, 1987.

p.028 iz.: - Prólogo del “Prometeo”, Luigi Nono, *in* http://www.festival-automne.com/public/ressourc/publicat/1987nono.
- Dos secciones y detalle constructivo del dispositivo para el “Prometeo” (arq.: Renzo Piano), *in* “Architettura & Musica”, Renzo Piano Building Workshop, edizioni Lybra Immagine, Milano, 2002.
- Texto: “Prometeo, un espace pour la musique”, Renzo Piano (1984) *in* “Luigi Nono”, Ed. Festival d'Automne à Paris, Contrechamps, Paris, 1987.

p.029 iz.: - Sección larga del dispositivo para el “Prometeo” (arq.: Renzo Piano), *in* “Architettura & Musica”, Renzo Piano Building Workshop, edizioni Lybra Immagine, Milano, 2002.
- Dos fotografías de la maqueta del dispositivo para el “Prometeo” (arq.: Renzo Piano), *in* “GA Architect 14 - Renzo Piano Building Workshop”, Yukio Futagawa & Kenneth Frampton, A.D.A. EDITA, Tokyo, 1997.
- Texto: “Prometeo, un espace pour la musique”, Renzo Piano (1984) *in* “Luigi Nono”, Ed. Festival d'Automne à Paris, Contrechamps, Paris, 1987.

- 7 -

El sistema tonal



A mediados de los años cincuenta, Iannis Xenakis aprendió a manejar el modulor, para componer los *paneles de vidrio ondulatorios* en la fachada oeste del convento de la Tourette. Para gran satisfacción de Le Corbusier, aplicó luego tales proporciones en la composición de su primera obra musical, *Metastasis*. El estudio que hizo en ella de las curvas de glissandi, definidas por sus tangentes, volvió luego al espacio, sugiriéndole la solución de unas superficies regladas para realizar el pabellón Philips en la exposición universal de Bruselas (1958). Nunca, quizás, en la historia, se había alcanzado una colaboración tan estrecha entre música y arquitectura, desplegándose las mismas ideas, las mismas reglas, ante el ojo y el oído. ¿Se abrió entonces un camino prometedor, o un callejón sin salida? El lector, como nosotros, mire, escuche, y decida...

Fachada oeste del Convento de Sainte-Marie-de-la-Tourette à Eveux sur l'Arbresle, 1955. *Pans de verre ondulatoires.*

7. El sistema tonal

La libertad del oído y la amplitud de miras en las investigaciones y composiciones de Luigi Nono, Karlheinz Stockhausen o Pierre Boulez, en la segunda mitad del siglo XX, no hubieran sido posibles si, en la primera mitad, otros compositores no hubiesen abierto el camino, poniendo fin a la hegemonía del sistema tonal de composición. Para valorar la revolución dodecafónica, en particular, es imprescindible tener en mente los pocos principios fundamentales del sistema tonal, su fuerza, su desarrollo, y, finalmente, la imperiosa necesidad de su abolición.

En un artículo de 1962, recogido en el libro "Música. Arquitectura.", Iannis Xenakis propone una distinción muy útil para tal propósito:

"Vamos a considerar ahora la composición musical desde otro punto de vista, más fundamental, que permitirá una síntesis lógica, algébrica, de cualquier obra del pasado, del presente o del porvenir.

Sin entrar en los detalles de una demostración, podemos afirmar que los seres sonoros poseen caracteres que no son temporales y que estos caracteres son ordenables, que están provistos de una estructura de grupo y, por consiguiente, que pueden formar un espacio vectorial.

Tomemos un ejemplo muy simple: el intervalo melódico; una quinta es una relación de frecuencias que, tomadas sea simultáneamente bajo la forma de un acorde, sea melódicamente bajo la forma de una melodía, dan siempre una quinta. Por lo tanto, el intervalo melódico es efectivamente un carácter independiente del tiempo. Según la hipótesis tradicional que admitiremos provisionalmente, todo ser sonoro puede, al límite, ser reducido según tres caracteres, siendo estos irreductibles, la altura (bajo la forma de un intervalo), la intensidad (bajo la forma de decibelios), la duración (bajo la forma de múltiples de una unidad temporal), y, luego, todo ser sonoro puede ser considerado como una función lógica, en el sentido de la teoría de los conjuntos o de la lógica simbólica, de conjuntos de vectores del espacio vectorial de las tres dimensiones antes citadas.

Así, una composición musical puede considerarse primero bajo el ángulo de operaciones y relaciones fundamentales, independientes del tiempo, que llamaremos *estructura lógica o algebraica fuera-del-tiempo*.

Luego, una composición musical examinada desde el punto de vista temporal muestra que los acontecimientos sonoros crean, sobre el eje del tiempo, duraciones que forman un conjunto provisto de estructuras del grupo abeliano. Este conjunto se estructura gracias a un *álgebra temporal* independiente del álgebra fuera-del-tiempo.

Finalmente, una composición musical puede examinarse desde el punto de vista de la correspondencia entre su álgebra fuera-del-tiempo y de su álgebra temporal. Obtenemos la tercera estructura fundamental, la *estructura algébrica dentro-del-tiempo*."

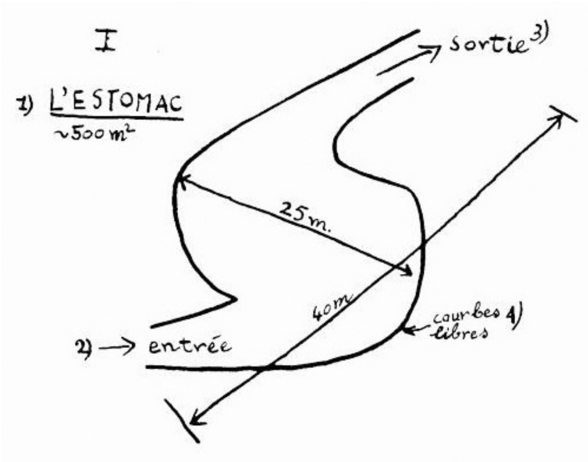
Iannis Xenakis[1]

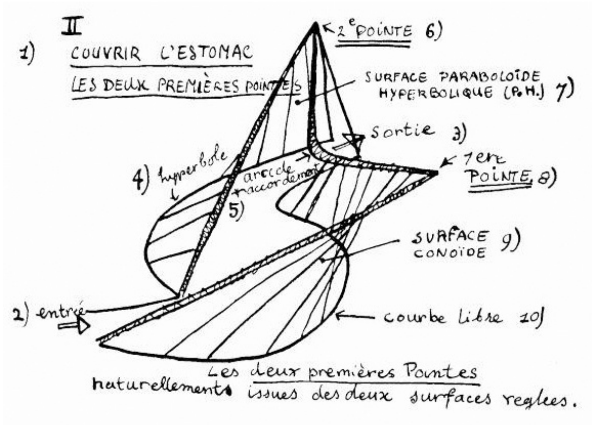
El sistema de composición que los griegos legaron a los bizantinos y a los árabes era, esencialmente, una estructura fuera-del-tiempo, con escalas de frecuencias muy desarrolladas y sutiles, formadas por un gran número de intervalos. En cambio, por su afán en desarrollar la música polifónica, los bárbaros de la Europa medieval sacrificaron todas las sutilezas monódicas, y se dirigieron hacia una estructura dentro-del-tiempo, caracterizada por la armonía y el contrapunto.

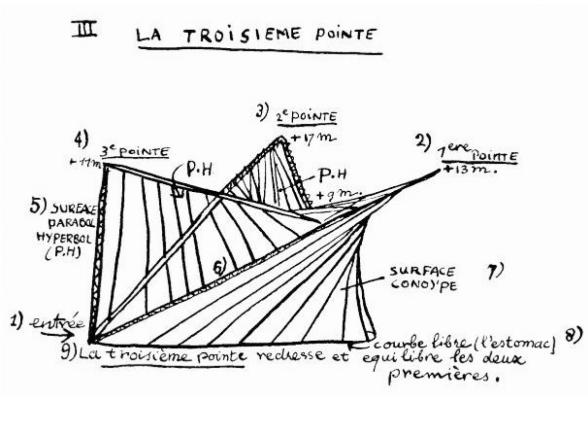
Bajo el dominio del *sistema modal*, hasta principios del siglo XVII, se usaron solamente los siete modos de la escala heptafónica, construida con tonos y semitonos, apuntando ya hacia la escala temperada: aunque ésta no se pudiera aún imponer del todo, se olvidaron los intervalos inferiores, y la división de la cuarta en treinta "microintervalos" (Aristóxenes), como las sutilezas

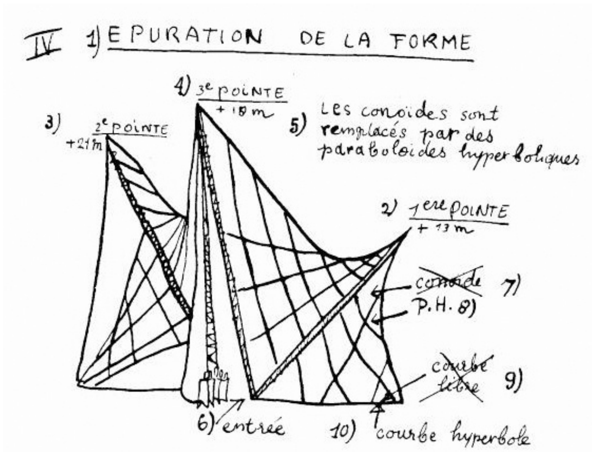
---

[1] "Musique. Architecture.", Iannis Xenakis, Éditions Casterman, Tournai, 1971.









Louis Kalff, director artístico de Philips, a Le Corbusier (1956):

"Quisiera que realizase el Pabellón Philips sin que sea necesario exponer nada de nuestras fabricaciones. Una demostración de las más audaces de los efectos del sonido y de la luz, donde el progreso técnico pudiera llevarnos al futuro".

Esquemas recapitulativos de I. Xenakis, resumiendo la evolución de su diseño del pabellón Philips.

de la coma pitagórica y de los consiguientes semitonos desiguales, pasaron al olvido, quedando solamente como limitaciones en la afinación de los instrumentos.

Para introducir al razonamiento polifónico, consideremos la pieza *Spem in allium* de Tomas Tallis (1573), escrita para cuarenta voces repartidas en ocho coros, que Luigi Nono describía así[1]: "el ejemplo tipo de una pieza espacial. Una pieza con el aire también. Están los ocho coros que mantienen relaciones con el espacio, la música misma tiene una relación con el espacio. Con ocho coros, sólo se pueden utilizar la tónica y la dominante. Pero lo extraordinario, es que con esta supuesta reducción de las posibilidades, Tallis explora el espacio, hace vivir el espacio, hace que el espacio mismo se vuelve cantable."

En la época modal, se componía indistintamente para instrumentos o para voces humanas, y las polifonías tenían generalmente cuatro o cinco voces distintas, todas con la misma importancia: no existían aún los solistas. Luego, sólo se podía innovar multiplicando las voces o distribuyéndolas en el espacio. Pero, con cuarenta voces repartidas en una iglesia reverberante, las notas se mezclan continuamente, y hay que simplificar al máximo la armonía para que no se forme un puré de sonidos cacofónicos. Tallis debía por lo tanto limitarse a la superposición de los intervalos más consonantes: la octava y la quinta.

Partiendo de una nota arbitraria, que podemos considerar como el suelo de la construcción armónica, y que se llama por ello *tónica*, se le superpone, a distancia de quinta, una segunda nota, que se llama *dominante* porque se instala como la segunda nota más importante de la escala compuesta sobre la tónica: la dominante y la tónica forman juntas un acorde de quinta, el más consonante entre todos los acordes de dos sonidos (las octavas no cuentan, ya que repiten las mismas notas).

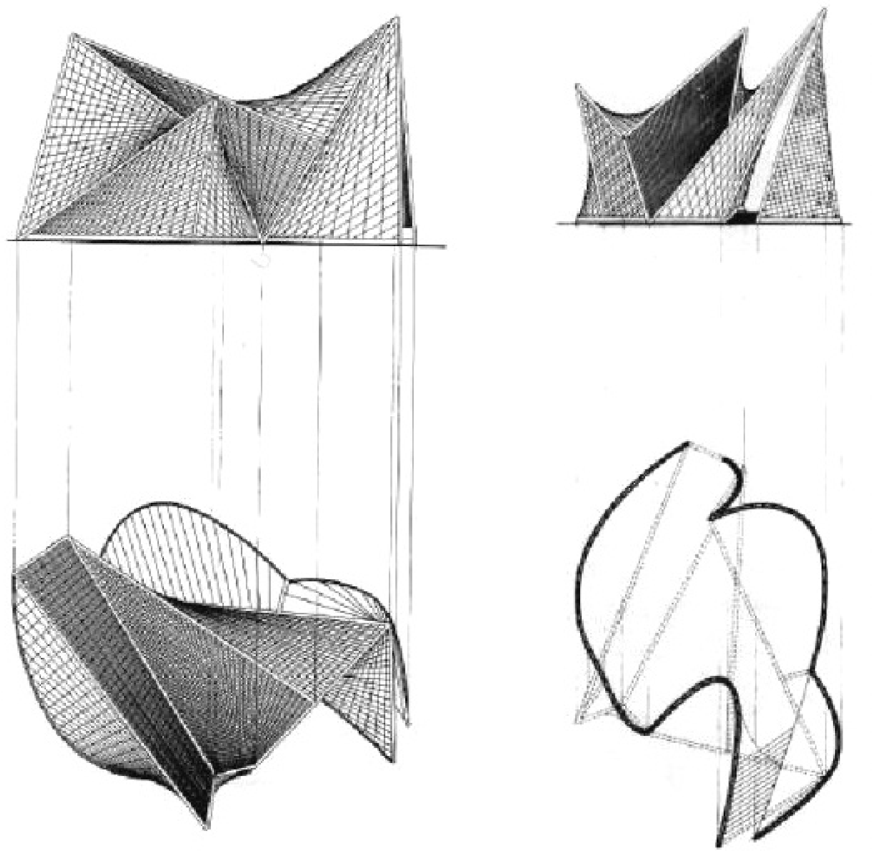
Recordemos ahora que los distintos modos de la escala no se distinguen por la altura de su tónica, sino solamente por la posición de los dos semitonos dentro de la escala. El modo de do, por ejemplo, los tiene entre la tercera y la cuarta nota (mi-fa) y entre la séptima y la octava (si-do). Este modo se puede entonar, por ejemplo, a partir de sol, si alzamos la nota fa de un semitono (fa#): comprobamos entonces que los semitonos vuelven a emplazarse en tercera (si-do) y en séptima posición (fa#-sol). Por lo tanto, las alturas son relativas (también podríamos cambiar el diapasón, que era muy fluctuante en la época), y sólo cuentan los intervalos.

Ahora bien, si formamos un acorde con solamente dos notas, a partir de una tónica cualquiera y de su dominante, no podemos decir a qué modo pertenece, ya que en todos los modos se forma el mismo intervalo de quinta justa (tres tonos y un semitono), excepto en el caso del modo de si, ya que las notas si y fa forman un intervalo menor, una quinta *disminuida*, que encierra los dos semitonos (si-do re mi-fa). Esa es la razón por la cual el sistema modal rechazó el modo de si, y sólo trabajó con los seis otros modos.

Excepto en el caso extremo de una obra como *Spem in allium*, conviene luego enriquecer los acordes, para disfrutar de la variedad de los modos. A la tónica y a la dominante, se les añade la *mediana*, situada a distancia de tercera con respecto a la tónica. Existen entonces dos variedades. En el caso del modo de do, la mediana se halla una tercera *mayor* por encima de la tónica (es decir: dos tonos), y se forma el *acorde perfecto mayor* (do-mi-sol-do: tercera mayor, quinta justa y octava). Lo mismo ocurre en los modos de sol y de fa. Aquel es el acorde de tres notas más consonante, ya que reproduce la estructura armónica del sonido periódico. En el caso del modo de la, en cambio, la mediana se halla una tercera *menor* por encima de la tónica (es decir: un tono y medio), y se forma el *acorde perfecto menor* (la-do-mi-la: tercera menor, quinta justa y octava). Lo mismo ocurre en los modos de re y de mi.

La polifonía engendra por lo tanto un dualismo, una oposición entre dos familias de modos, según se forme, sobre la tónica, un acorde perfecto mayor o menor. Si examinamos la primera parte de la escala, entre la tónica y la dominante, vemos que los modos de do y de sol suben de la misma manera (un tono, un tono, un semitono y un tono). Lo mismo ocurre con los modos de re y de la (un tono, un semitono, un tono y un tono). En cambio, los dos modos

[1] "Écrits", Luigi Nono, versión francesa dirigida por Laurent Feneyrou, Christian Bourgois Éditeur, 1993.



Le Corbusier, en respuesta a Louis Kalff:

"No les haré un pabellón, sino un *Poema electrónico* y una botella conteniendo el poema: 1° luz, 2° color, 3° imagen, 4° ritmo, 5° sonido, reunidos en una síntesis orgánica accesible al público y mostrando así los recursos de las fabricaciones Philips".

Dibujo multivista del pabellón Philips. Versión definitiva.

restantes son muy peculiares: el modo de mi es el único que empieza con un semitono (mi-fa), mientras que el modo de fa empieza con tres tonos seguidos, formándose una cuarta aumentada (fa-si). Ambos modos se utilizaron bastante durante la época modal, antes de caer en desuso en los albores de la revolución tonal.

A principios del siglo XVII, se puede hablar de una verdadera revolución en la música, con sus signos precursores (el madrigalismo, el desarrollo de nuevos instrumentos, como el violín,...) y luego su avalancha de reformas: aparición casi simultánea de la ópera, del concerto con solista, del bajo continuo,... La música se hacía más efectista, gracias a un nuevo sistema de composición, más eficaz.

El sistema tonal nació de una simplificación de los modos, que consistió en reforzar el dualismo mayor/menor ya presente en el sistema modal: con dos modos solamente, este dualismo se puede expresar de una forma más contrastada, más expresiva.

En un acorde de cuatro sonidos sobre la tónica, se utiliza, además de la tónica, de la mediana y de la dominante, la séptima nota de la escala, llamada *subtónica* porque se halla justo debajo de la tónica (repetida arriba para cerrar la octava). La subtónica se encuentra un tono por debajo de la tónica en los modos de la (sol-la), de sol (fa-sol) y de re (do-re). En el modo de do, se encuentra solamente a un semitono de distancia (si-do); en este caso, se la llama *sensible.*

Se puede mostrar que los modos de do y de la son los más diferentes entre sí, y que se complementan maravillosamente. Sólo ellos quedaron, y, de allí en adelante, se les llamó, respectivamente*, modo mayor* y *modo menor*.

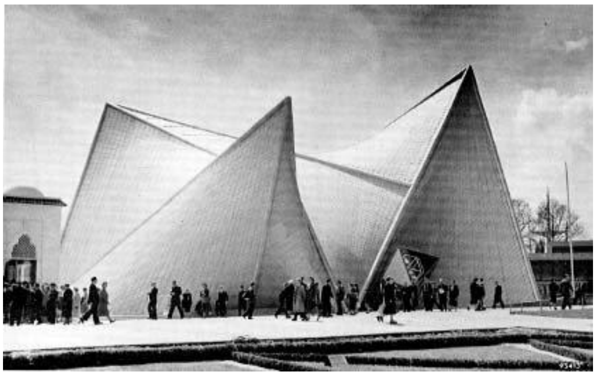
Recordemos una vez más que los modos sólo se refieren a la posición de los semitonos en la escala, y que se pueden construir sobre cualquier tónica, con las alteraciones correspondientes. Lo que distingue a Do mayor, como a la menor, es solamente que no necesitan alteraciones. Sol mayor, como mi menor, necesita una alteración (fa#), Re mayor, como si menor, necesita dos (fa#, do#),... Pero eso es sólo un problema de notación.

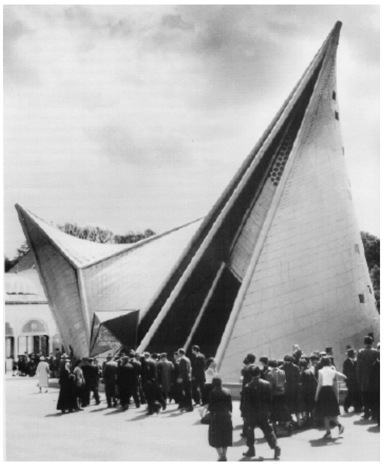
Transponer significa cambiar de tónica, en medio de una pieza, es decir trasladar la misma escala hacia arriba o abajo. *Modular* significa cambiar de modo, con la misma tónica, es decir pasar de mayor a menor o viceversa. Estos son los juegos permitidos por el sistema tonal. Se puede comprobar que, en medio de una transposición, es posible hacer aparecer todos los colores de los modos sacrificados en pro de la eficacia tonal, y, por lo tanto, que no se ha perdido nada consistente con la reducción a dos modos, ganándose en cambio contraste y eficacia. Sin embargo, en este trance, se ha convertido lo que Xenakis llamaba una estructura fuera-del-tiempo en una estructura dentro-del-tiempo: la variedad de los siete modos sólo se encuentra ahora en la dinámica de las transposiciones y modulaciones, sujeta a las estrictas reglas armónicas que permiten al sistema tonal funcionar...

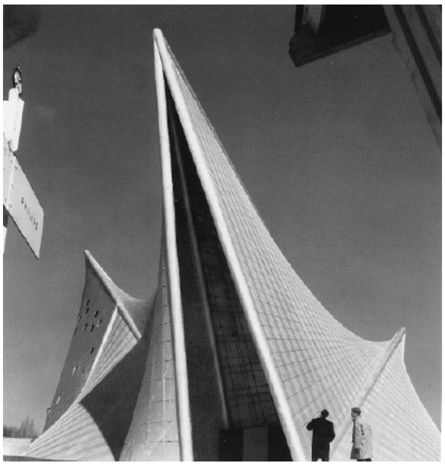
En una pieza de música sujeta a numerosas transposiciones y modulaciones, el problema, para el compositor, es de poder hacer sentir repetidamente al auditor en qué tonalidad se encuentra, para que pueda seguir la "intriga", sin lo cual todo el sistema pierde su interés....

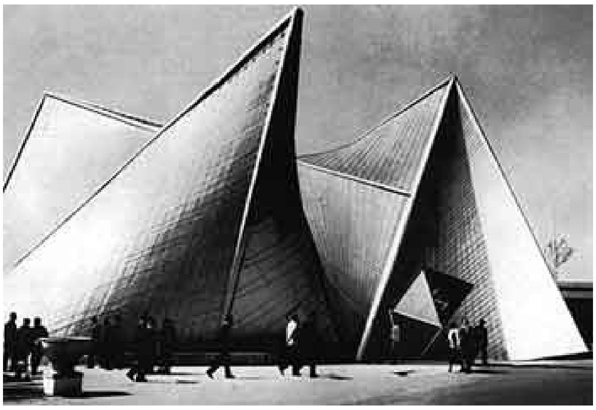
Si entonamos la escala natural (es decir: sin alteraciones) a partir de mi o de fa, aún el oído tonal de nuestros tiempos percibirá una melodía algo extraña, algo medieval. Es que, en un caso tan simple, el sistema tonal no dispone de los recursos que se ha forjado para imponer su ley: en una simple monodia, puede pasar de todo... Ahora, si creamos una melodía con las mismas notas, pero donde el do vuelve a menudo, con insistencia, y si acabamos en do, tendremos indudablemente una melodía en Do mayor. Pero nada impide que, en medio de esta melodía, hagamos una pequeña incursión en la menor, o, con las debidas alteraciones, un salto repentino a Sol mayor o a re menor...

Pasemos ahora a la armonía, a la construcción de los acordes. Un acorde perfecto mayor construido sobre do puede adaptarse a muchas circunstancias: do puede, desde luego, ser la tónica de Do mayor, pero puede ser también la mediana de la menor o la subtónica de Sol mayor,









En la exposición del 1958, el *Poema electrónico* de Le Corbusier ofreció al público la obra homónima de Edgard Varèse, y una pequeña composición de Iannis Xenakis, cuyo título - *Concret P.H.* - se refería a las superficies P.H. - es decir: los paraboloides hiperbólicos - formando la "botella" de Le Corbusier, que el arquitecto y compositor griego había transformado en un sombrero de tres picos. Sonidos electrónicos viajando por el espacio curvo, juegos de luces y proyecciones asombraron los más de dos millones de visitantes...

Fotos del pabellón Philips. En su interior, cuelgan (al parecer) los poliedros regulares de Platón...

sin que nuestro acorde se haya de modificar... Para afirmar la tónica, hace falta algo más: un segundo acorde, antepuesto al primero, que sea tan característico y a la vez tan inestable que indique de forma manifiesta, y a la vez necesite de forma imperativa, su resolución en el primero. Construiremos, pues, este segundo acorde sobre la segunda nota más importante de Do mayor, sobre la dominante sol. Pero el acorde sol-si-re es también un acorde perfecto mayor, tan estable como do-mi-sol. Lo convertiremos, pues, en un acorde de cuatro sonidos, añadiendo la séptima fa y, para redondear el asunto, alzaremos este fa de un semitono (fa#): así, obtendremos un acorde de séptima de dominante sol-si-re-fa# perfectamente inestable, porque encierra un semitono (fa#-sol), el intervalo más disonante de la escala temperada. Este acorde no puede quedarse así en el aire: pide a gritos su resolución en una consonancia, y el oído tonal más ignorante siente adonde tiene que dirigirse: al acorde do-mi-sol-do.

Con esta fórmula, hemos afirmado la tónica: al oír esta sucesión de dos acordes, todo el mundo siente que estamos en Do mayor. Tenemos, pues, un nivel de referencia: do está en el suelo, en el nivel I. Las demás notas están ahora férreamente jerarquizadas, tienen su nivel y su cota, referida a este suelo: sol está en el quinto piso, nivel V; mi en el tercer piso, nivel III; si en el séptimo piso (o en el primer subsuelo), nivel VII. La sucesión de los dos acordes explicados puede luego notarse V-I: es la *cadencia perfecta*, así llamada porque terminará siempre una pieza en Do mayor, asegurando su caída. Podemos luego desarrollar esta cadencia, por ejemplo con una sucesión III-IV-V-I de cuatro acordes: creamos así un camino armónico; una vez llevado allí, el auditor conoce su destino.

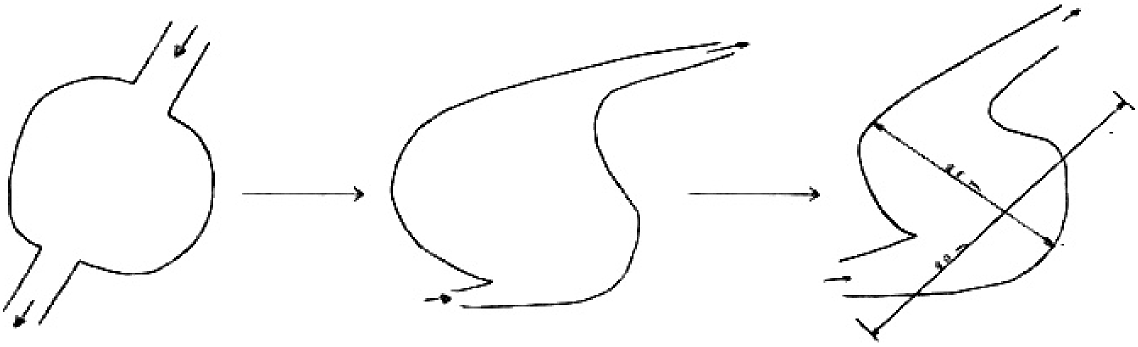
Una sucesión de acordes encaminados se llama *encadenamiento*, y es exactamente así: las notas de los acordes están encadenadas a su función dentro de la pieza, como los galeotes están encadenados a su remo, a su función de llevar la galera a buen puerto.

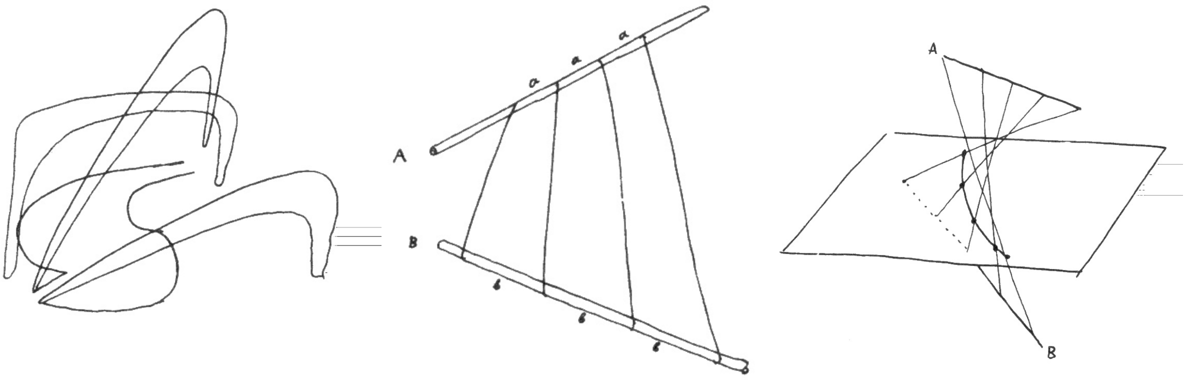
La *armonía* es la disciplina musical que describe la constitución de lo acordes. Pero sólo puede hacerlo explicando a la vez los posibles encadenamientos, que justifican sus características. En el sistema tonal, el léxico no puede separarse de la gramática, la morfología de la sintaxis... Sólo la función del acorde de séptima de dominante puede explicar porqué se ha alzado la séptima. En la expresión “séptima de dominante”, la palabra “séptima” se refiere a la constitución del acorde de cuatro notas, y la palabra “dominante” a su función dentro del encadenamiento tonal, y las dos palabras tienen que yuxtaponerse para describir el acorde. En palabras de Xenakis, la estructura fuera-del-tiempo (los acordes) y la estructura temporal (los encadenamientos) están irremediablemente vinculadas. El sistema tonal, como ya su antepasado modal, es luego una estructura dentro-del-tiempo. En eso ha desembocado el formidable anhelo polifónico de la Europa medieval, fenómeno único en la historia musical de la humanidad.

El sistema tonal está basado en dos principios elementales: la separación de los intervalos entre consonantes y disonantes, que remonta a Aristóxenes y a los pitagóricos, y luego la férrea jerarquización de las notas, propia de la polifonía medieval, que crea constantemente islotes de absoluto dentro del mar relativo de la percepción frecuencial.

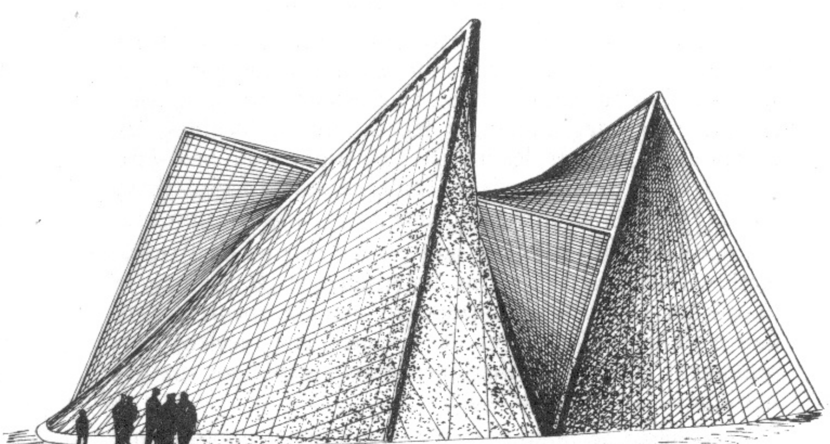
Una vez puesta en marcha, la eficiente simplificación tonal crea, de forma casi automática, aritmética, una serie de reglas segundarias que agilizan y completan el sistema. Estas reglas rigen aún toda la música de variedad, que suena constantemente en las calles y en los hogares de Occidente, sin que sus súbditos, a ella sometidos desde su nacimiento, puedan desviar la escucha - como se aparta la mirada - ni un momento. Y el oído, para sus colores, no es olvidadizo como el ojo. La música europea goza de un prestigio sin equivalente en el resto del universo, reforzado por la historia colonial. La música exótica que se nos ofrece hoy ha conservado los timbres de instrumentos distintos, y de idiomas diferentes a través del canto, pero su estructura armónica, casi siempre, se ha amoldado por completo a reglas desarrolladas en la sombra de los monasterios y de los palacios cristianos, que creemos ahora ser naturales, universales, irrevocables.

Los mejores compositores del siglo XX se dieron como misión quebrantar esta hegemonía, y triunfaron en sus obras como en las teorías anexas, aunque fracasaron socialmente.





Los tres primeros esquemas muestran cómo las necesidades de circulación (personas, luces y sonidos) en la "botella" inicial implicaron una planta en forma de "estómago", según la expresión de Le Corbusier. Iannis Xenakis no quedó del todo contento con su primer intento tridimensional: había que simplificar las curvas conoides, unificándolas todas en paraboloides hiperbólicos, y, sobre todo, había que mejorar el aspecto visual y las proporciones. Para ello, hacía falta una maqueta; una superficie P.H. se realiza fácilmente, torciendo un dispositivo de dos palitos unidos por cuerdas paralelas. Sin embargo, para deducir la traza en el geometral, y comprobar su adecuación a la planta decidida por Le Corbusier, hubo que remitirse a la *geometría descriptiva*, es decir: al método diédrico de Monge.



Esquemas de I. Xenakis explicando cómo realizó su segundo diseño, el definitivo.

No podían hacer otra cosa: como sistema expresivo, la tonalidad está agotada, completamente explorada, muerta desde hace mucho tiempo. Hoy, las obras neotonales no tienen más sentido que las arquitecturas posmodernas. Quizás nuestra época sufre un proceso de digestión, de asimilación, que nos vela momentáneamente los necesarios cambios...

En unas seis generaciones (por ejemplo: Monteverdi, Vivaldi, Bach, Mozart, Beethoven, Brahms), los compositores han estudiado y completado las posibilidades de la tonalidad. A finales del siglo XIX, viene una época donde la música tonal y la pintura figurativa sufren una serie de evoluciones paralelas, casi simultáneas. La frontera entre consonancias y disonancias no es precisa; las audacias de Wagner o las innovaciones de Debussy tienen mucho que ver con las investigaciones cromáticas de los impresionistas; se preguntan: ¿qué es el sonido?, ¿qué es el color? Pero la jerarquización de las notas resiste, como la posibilidad de identificar un paisaje, incluso en los cuadros de Turner o de Monet...

En torno a la primera guerra mundial, surge una serie de obras extraordinarias: "La consagración de la primavera" de Igor Stravinski, "Pierrot lunaire" de Arnold Schönberg,... Los movimientos expresionistas y atonales se oponen a las reglas, las rechazan, las olvidan, pero no las anulan: hace falta algo más, algo que impida sin ambigüedad toda identificación figurativa, toda jerarquización de las notas. Las revoluciones de la música dodecafónica y de la pintura abstracta tienen el mismo objetivo: acabar, de una vez por todas, con las argucias y las artimañas académicas.

La idea de Arnold Schönberg consiste en imponer una serie de doce notas distintas, una melodía donde aparecen forzosamente las doce notas de la escala temperada, una sola vez, de modo que ninguna de las notas puede repetirse antes de que todas las otras hayan sonado: eso basta para impedir al auditor cualquier posibilidad de identificar una nota como más importante, cualquier posibilidad de jerarquizar.

Se hacen luego necesarias nuevas reglas de composición. Una serie puede leerse al revés (de la derecha hacia la izquierda en la partitura, en *retrogradación*) y sus intervalos pueden invertirse (hacer subir los que bajan y viceversa, como si la serie se mirase en un *espejo*): ambas operaciones conservan las propiedades dodecafónicas de la serie (cada nota sigue diferente de las demás, los intervalos son conservados), y le ofrecen cuatro formas, a partir de las cuales puede desarrollarse la composición: la serie misma, su retrogradación, su espejo y la retrogradación de su espejo.

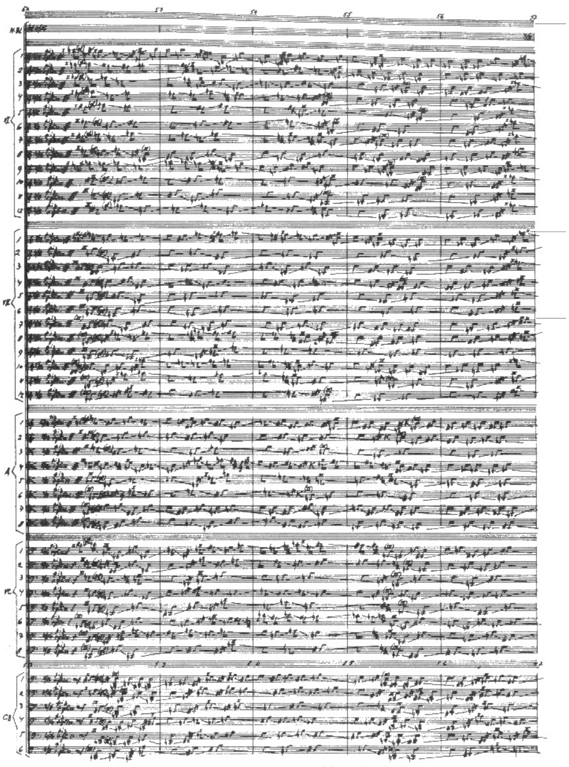
Para la organización de las alturas musicales, el dodecafonismo ofrece un marco más relativo, más dentro-del-tiempo y más discreto que el mismo sistema tonal. Las notas de la serie son totalmente relativas, inclusive localmente: sólo importan los intervalos, desde que se ha suprimido la afirmación de la tónica.

"El atonalismo, preparado por la teoría y por la música de los románticos, a finales del XIX y a principios del siglo XX, abandonó prácticamente toda estructura fuera-del-tiempo. Lo cual fue confirmado por la supresión dogmática de los Vienenses, que no aceptaban más que el último "orden total" de la escala temperada cromática. Entre las cuatro formas de la serie, sólo la inversión de los intervalos se relaciona con una estructura fuera-del-tiempo"

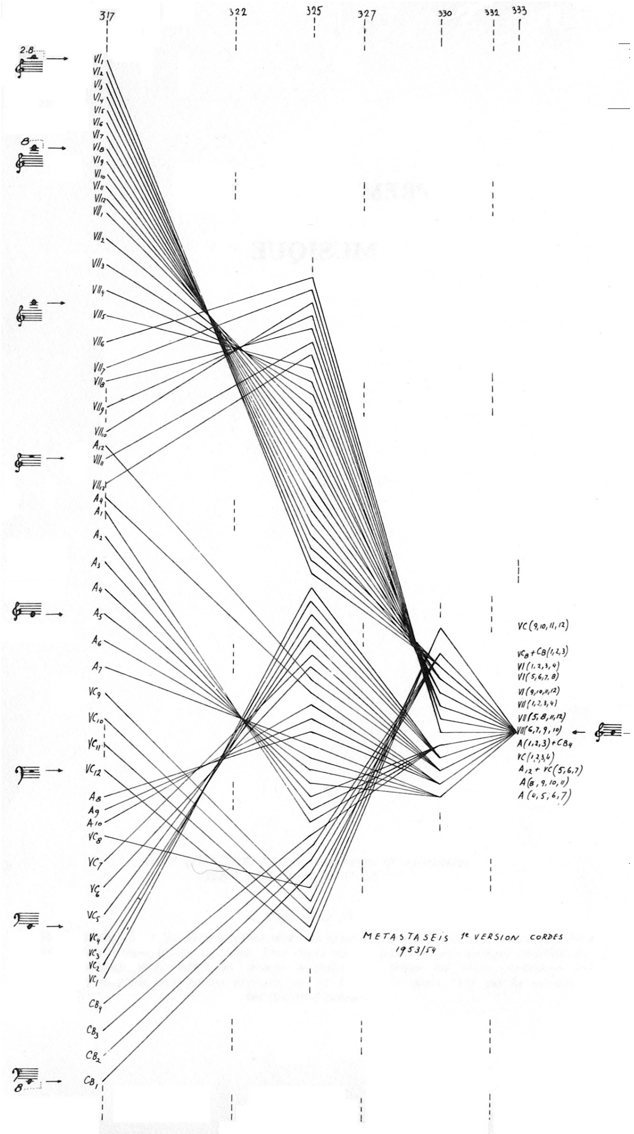
Iannis Xenakis[1]

Opinamos que Xenakis se hace aquí algo simplificador y atajante, quizás demasiado interesado en defender su propio proyecto. Desde luego, por su mismo rechazo de la armonía tonal, el corto período atonal de la música - el cual, por definición, no formó nunca ningún sistema - pensó de manera puramente temporal, sin esquemas predefinidos. En cuanto a la segunda escuela de Viena (Arnold Schönberg, Alban Berg y Anton Webern), una vez volcada al dodecafonismo, es cierto que sintió una atracción particular hacia la antigua polifonía (desde el medioevo hasta J.S. Bach), como se nota en la recuperación de viejos juegos mentales, tal el

[1] "Musique. Architecture.", Iannis Xenakis, Éditions Casterman, Tournai, 1971.



Metastasis. 1954. Page de partition d'orchestre.



Unos meses antes de diseñar el pabellón, en "Metastasis", su primera composición musical importante, Iannis Xenakis se había planteado el estudio de los *glissandi*, es decir: de la variación continua de las alturas sonoras. El esquema preparatorio de la derecha ya muestra cierta proximidad formal con las futuras superficies regladas que definirán el pabellón... Los 61 músicos tocan partes independientes; las pendientes de los glissandi para los instrumentos de cuerdas están calculadas individualmente; las estructuras de intervalos, duraciones, dinámica y timbres se combinan, mediante progresiones geométricas y secciones aúreas generadas por el modulor de Le Corbusier.

Partitura y esquema de "Metastasis", obra musical para 61 intérpretes de I. Xenakis (1953-1954).

canon: música dentro-del-tiempo, luego, pero de la manera más opuesta posible a la del romanticismo enemigo. En cuanto a los compositores actuales, incluso los más influidos por la música atonal o serial, hace tiempo ya que han recuperado toda la riqueza posible de las estructuras fuera-del-tiempo. Pienso, por ejemplo, a los sistemas de redes de notas, introducidos por Bruno Maderna y Henri Pousseur, que permiten preestablecer, con mucha riqueza, una serie de intervalos o de microintervalos, con o sin reglas de sucesión temporal.

En cuanto al tratamiento del sonido, el dodecafonismo abrió la puerta a una discretización generalizada, a partir de la serie de alturas. Ya Anton Webern, y luego los jóvenes compositores que se reunían en Darmstadt tras el fin de la segunda guerra mundial (Bruno Maderna, Pierre Boulez, Karlheinz Stockhausen, Luciano Berio, ...) se propusieron generalizar la serie, aplicando su idea a las duraciones, a los timbres, a las intensidades y hasta a la disposición espacial de los instrumentos: eso condujo a discretizar todos los aspectos del sonido, más allá de lo que había hecho el sistema tonal, generándose una verdadera aritmética musical combinatoria, con el riesgo de una excesiva matematización, de la aridez y de la esterilidad.

Para el oído, la percepción de la frecuencia es preferentemente discreta; para el ojo, la percepción del espacio es preferentemente continua. No es de extrañar, luego, que, cuando un músico se interesa por lo continuo, se impone la analogía con la pintura, mientras que, cuando un pintor se interesa por lo discreto, se impone la analogía musical. Pierre Boulez ilustra lo segundo en su libro sobre Paul Klee:

"Pero si consideramos el período caracterizado por la enseñanza [de Klee] en la Bauhaus, con sus formas más geométricas, la división del espacio, las superficies consteladas de pequeños puntos, parece imponerse la confrontación con el Webern de los *Opus* 15, 16, 17 poco anteriores; el Webern que no ha todavía adoptado la serie de doce notas y usa un estilo libre, pero ya muy controlado.

Mientras Klee esboza las superficies con texturas de pequeños puntos variando la densidad, Webern hace la misma cosa en música. Él, para expresar la duración de una nota, no la mantiene, pero la hace aparecer mediante notas picadas más o menos próximas, eso es: ejecutadas más o menos rápida o lentamente.

En mundos completamente distintos, uno para ocupar el espacio, el otro para ocupar el tiempo, ambos han encontrado la solución de los pequeños impulsos: colorados en pintura, rítmicos en música."

Pierre Boulez[1]

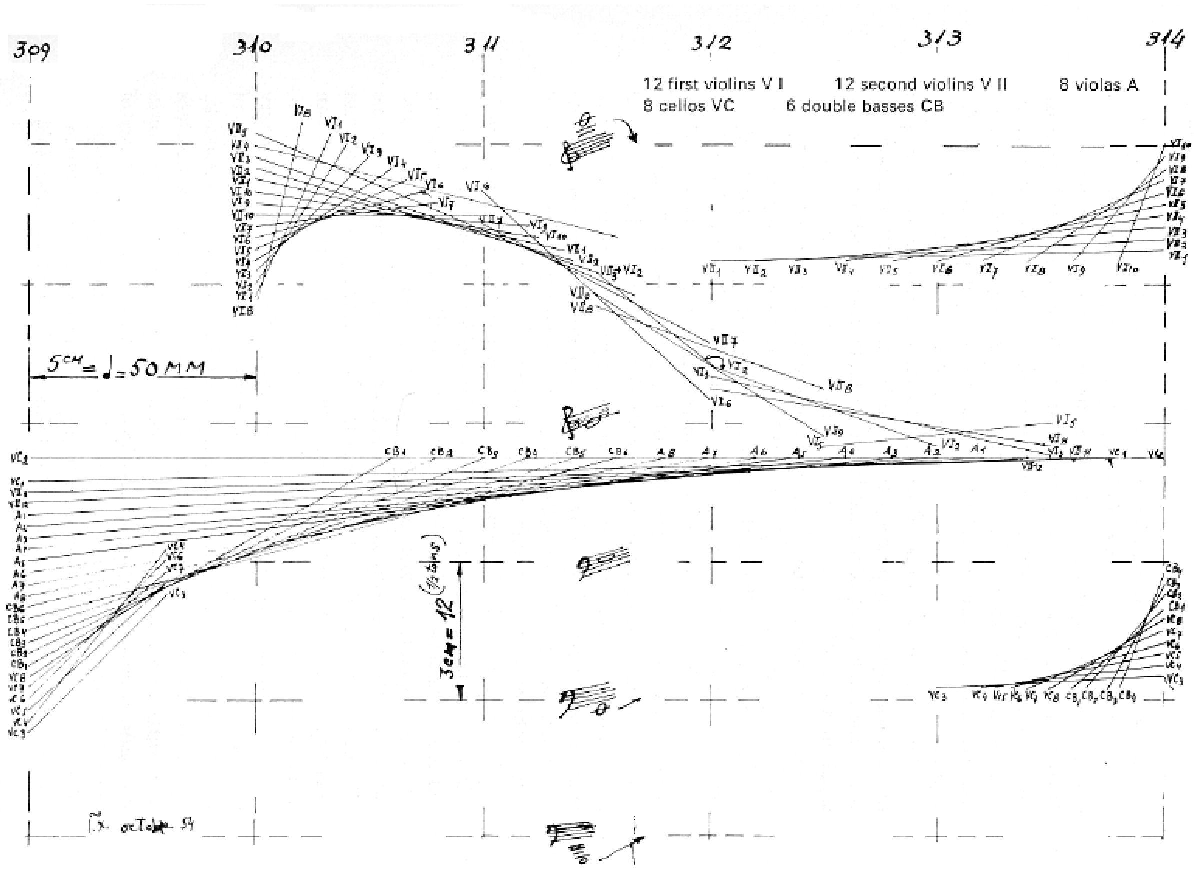
En oposición a Webern y a los post-webernianos, Iannis Xenakis forma el proyecto de calcar sobre la continuidad natural del espacio visual un "continuismo" musical totalmente original en su generalización, así explicado en un artículo de 1956:

"Parábola del espacio

Vivimos rodeados por superficies planas, cilíndricas, cónicas, etc., hechas por la mano de los hombres o por los conflictos de la naturaleza (montañas, mares, nubes). Esta categoría del entendimiento humano, es, como todos sabemos, por lo menos desde Kant, fundamental. El primer dominio de la inteligencia ha sido el definir las superficies elementales a partir del elemento espacial básico de la línea recta. En música, la recta más sensible es la de la variación constante y continua de las alturas, el glissando. Construir superficies (o volúmenes) sonoros a partir de glissandi, he aquí una investigación apasionante y rica en promesas. Inflexiones de las superficies curvas, amplificaciones, reducciones, torsiones, etc., todo este mundo nuevo está al

---

[1] "Il paese fertile", Pierre Boulez, versión italiana: Guillemette Denis, Leonardo Editore, Milano, 1989.



Para controlar las velocidades y aceleraciones de los *glissandi*, Iannis Xenakis traza las tangentes de sus curvas, es decir: pasa a la derivada primera. Formalmente, bastará considerar la tercera dimensión para concebir la solución de las superficies regladas. Los paraboloides hiperbólicos son relativamente fáciles de construir, y cumplen con el deseo de Le Corbusier, que quería proyectar sus imágenes sobre superficies curvas. Acústicamente, evitan los problemas de focalización característicos de la esfera y de los elipsoides. Sin embargo, en mi opinión, su principal atractivo es visual: parecen siempre familiares al ojo, no obstante sus múltiples cambios: cuando se comparan las distintas fotografías del pabellón, empero, se llega a dudar que estas vistas pertenezcan todas al mismo edificio... Decididamente, habrá que retomar el estudio de tales superficies, matemáticamente triviales, estructuralmente viables, visualmente sutiles...

Estudio de los glissandi en “Metastasis”, I. Xenakis.

alcance de la mano que sujeta la pluma y que lleva al oído y sobre el psiquismo. Las *Metástasis* son una primera versión de superficies regladas en el espacio sonoro (nada que ver con la estereofonía)".

Iannis Xenakis[1]

Entre los compositores de su época, Xenakis siguió una trayectoria peculiar, y a menudo marginal. Griego, diplomado como ingeniero, participó a la lucha de sus compatriotas contra la ocupación inglesa, al finalizar la segunda guerra mundial. Recibió una bala en la cabeza, que le dejó desfigurado para siempre. Dado por muerto, pudo refugiarse en París, donde lo cobijó la solidaridad del Partido Comunista Francés, mientras su propio país lo sentenciaba a muerte. Autodidacta en la música, pudo seguir, como alumno libre, las clases de Olivier Messiaen, el mejor profesor en esta época para quién quisiera aprender las formas de la música nueva. Al mismo tiempo, ingresó en el despacho de Le Corbusier, donde participó en varios proyectos, entre los cuales l'Unité d'habitation de Marsella. Tras haber realizado, sobre una idea de Le Corbusier, el pabellón Philips para la exposición universal de Bruselas (1958), se peleó con él por la autoría de esta obra. Se dedicó entonces mayoritariamente a la música, sin dejar nunca de proyectar pabellones efímeros.

Xenakis compuso su primera obra musical ("Metástasis") y su primer pabellón (el de Bruselas) utilizando las mismas ideas geométricas:

"Mi obra *Metástasis*, para gran orquestra, compuesta en 1953-1954, me ha sugerido, tres años más tarde, la concepción arquitectónica del Pabellón Philips que Le Corbusier me había pedido dibujarle. Este pabellón estaba enteramente concebido con superficies continuas engendradas por rectas que los constructores y operarios saben ejecutar".

Iannis Xenakis[2]

Estas curvas son paraboloides hiperbólicos, engendradas en el pabellón con las mismas directrices rectas que los glissandi instrumentales recorren en la obra musical. La analogía entre música y arquitectura, tantas veces evocadas en el pasado, no ha conocido nunca otra realización tan literal y, aunque sólo fuera por eso, la obra arquitectónica de Xenakis merecería mayor atención por parte de sus colegas...

El interés del compositor por las estructuras fuera-del-tiempo, como por lo continuo en música, explica su peculiar descripción de la historia musical, ya en este artículo de 1956:

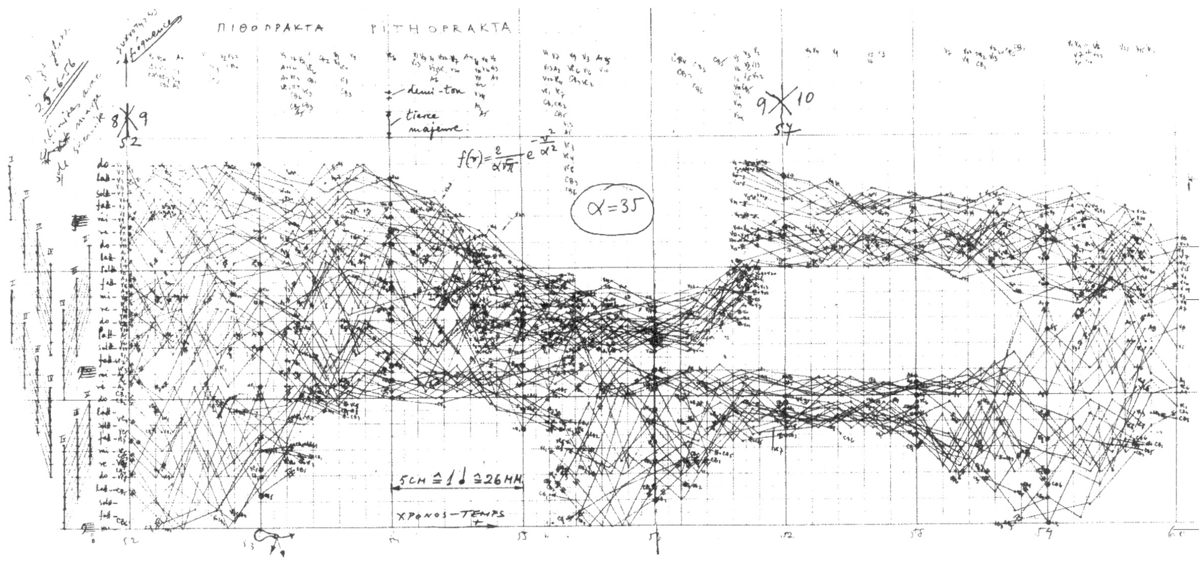
"El proceso del pensamiento musical instrumental es capital, porque él dará dentro de poco el substrato teórico y doctrinal para una música electrónica, concreta, o, en general, para una música de sonidos fabricados mecánicamente.

La música serial proponía un sistema cuya sustancia, en último análisis, estaba constituida por sus propiedades geométricas y cuantitativas. Por ejemplo, las cuatro formas de la serie para las geométricas, el número de semitonos en los intervalos para las cuantitativas. El pensamiento puro de las matemáticas era así conscientemente reintroducido en la composición musical. Las nuevas concepciones purificadoras quedaban, empero, encerradas en sus vainas lineales y los seres musicales sólo se formaban a partir de rosarios de doce sonidos a la manera de las combinaciones cromosómicas, cuyos constituyentes son los genes. Es como si la música dodecafónica hubiera liberado todos los sonidos temperados y, asustada ante este acto inaudito, se hubiera apresurado en cobijarse en formas de pensamiento perteneciendo a otros siglos.

¿Qué hacer con los ochenta sonidos del piano temperado, todos iguales, pero distintos?

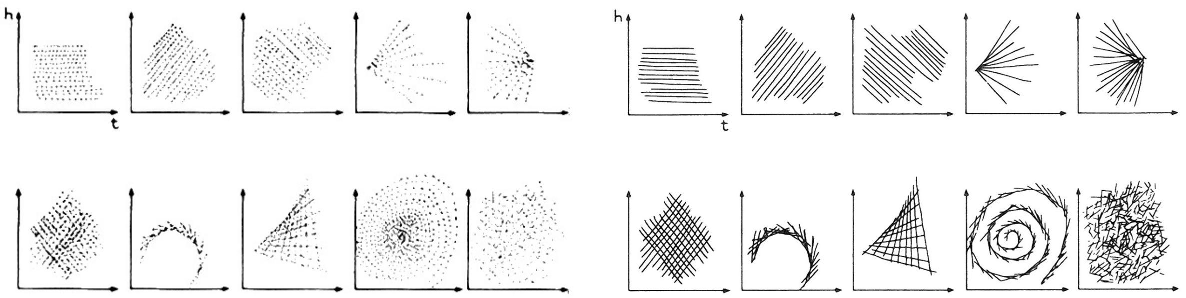
---

[1] "Musique. Architecture.", Iannis Xenakis, Éditions Casterman, Tournai, 1971.
[2] "Musique. Architecture.", Iannis Xenakis, Éditions Casterman, Tournai, 1971.



En el esquema previo de “Pithoprakta” (arriba), su siguiente obra para orquesta, Iannis Xenakis desarrolla una serie compleja de ramificaciones que guiarán la composición final de la obra, basada en la teoría de las probabilidades (música “estocástica”) y en la oposición entre lo continuo y lo discontinuo (*glissandi* y *pizzicati* asimilables a rectas y puntos). Composición gráfica, control global del resultado: temas que agitarán las siguientes décadas musicales...

Los *campos elementales reglados* (abajo), en sus manifestaciones continuas o discontinuas, ilustran uno de los artículos más ambiciosos de Xenakis (“Hacia una filosofía de la música”, 1968), y el vínculo inquebrantado que une sus prácticas musicales y arquitectónicas, a pesar de que las primeras, para entonces, han dejado, definitivamente, las segundas en la sombra.



Esquema de “Pithoprakta”, I. Xenakis (1956), obra musical para 50 instrumentos; “campos elementales reglados”.

Hasta aquí, con líneas melódicas, el arte polifónico la guiaba con una mano segura. Así, una frontera "mental" estaba creada, que impedía la explotación total del ensanchamiento dodecafónico.

Veremos enseguida cómo la teoría y el cálculo de las probabilidades liquidan este obstáculo, y nos permiten componer con ochenta o mil sonidos si queremos, utilizando estos sonidos de una manera global, en masa, y ya no linealmente. La polifonía se haría así un caso particular de esta música y una nueva plástica sonora sería creada".

Iannis Xenakis[1]

Un razonamiento característico de Xenakis, que lo acerca a su contemporáneo norteamericano John Cage, se transparenta en este texto: si los procedimientos deterministas de los post-webernianos han engendrado una música tan árida, tan compleja, que ya nadie es capaz de captar sus detalles en la audición, ¿porqué no adoptar directamente unos procedimientos probabilistas, cuyas leyes generales son precisamente las que sí se pueden captar inmediatamente? Controlar, pues, el conjunto, dejando los detalles al azar...

La otra forma de generalizar consiste en saltar a la continuidad, como en los glissandi de "Metástasis". En sus textos, Xenakis opone "continuo" a "discontinuo", y eso es muy revelador. Confunde lo discreto con lo discretizado, y hace de ello una subcategoría de lo continuo: lo discreto no sería más que una continuidad interrumpida, imperfecta, deficiente.

Esta observación es muy importante, porque encontramos la misma actitud en la mayoría de los comentaristas modernos de los presocráticos. Y eso, no es lo que enseñó la música al mítico Pitágoras, padre, si no de la ciencia europea, de nuestra teoría de la percepción.

[1] "Musique. Architecture."

Origen de las ilustraciones

p.031 iz.: - El refectorio del convento de la Tourette, I. Xenakis y Le Corbusier (1957-1960), *in* "Un couvent de Le Corbusier", Jean Petit, Ed. Forces Vives, Paris, 1961.
- "Convento de Sainte-Marie-de-la-Tourette à Eveux sur l'Arbresle, 1955. *Pans de verre ondulatoires*, fachada oeste.", I. Xenakis, *in* "Musique Architecture", Iannis Xenakis, Casterman s.a., Tournai, 1976.
- El gran pasillo del convento de la Tourette, I. Xenakis y Le Corbusier (1957-1960), *in* "Un couvent de Le Corbusier", Jean Petit, Ed. Forces Vives, Paris, 1961.

p.032 iz.: - "Cuatro esquemas del proyecto para el pabellón Philips", I. Xenakis y Le Corbusier (1956-1958), *in* http://home.hccnet.nl/a.meyer/philipspavilion58.

p.033 iz.: - Representación multivista del pabellón, *in* http://home.hccnet.nl/a.meyer/philipspavilion58.

p.034 iz.: - Seis fotografías del pabellón Philips, *in* http://home.hccnet.nl/a.meyer/philipspavilion58.

p.035 iz.: - Esquemas y perspectiva del proyecto para el pabellón Philips, I. Xenakis, *in* "Musique Architecture", Iannis Xenakis, Casterman s.a., Tournai, 1976.

p.036 iz.: - "Metastasis", I. Xenakis (1953-1954), página de la partitura de orquesta y esquema de la primera versión, *in* "Musique Architecture", Iannis Xenakis, Casterman s.a., Tournai, 1976.

p.037 iz.: - "Glissandi de cuerdas" en "Metastasis", I. Xenakis (1953-1954), *in* http://home.hccnet.nl/a.meyer/philipspavilion58.

p.038 iz.: - "*Pithoprakta*, para orquesta, 1956. Extracto del gráfico antes de la transcripción en notación musical tradicional", I. Xenakis, *in* "Musique Architecture", Iannis Xenakis, Casterman s.a., Tournai, 1976.
- Esquemas continuos y discontinuos, I. Xenakis, *in* "Musique Architecture", Iannis Xenakis, Casterman s.a., Tournai, 1976.

- 8 -

La proporción

La cueva de Lascaux, "Capilla Sixtina de la prehistoria" según F. Windels, muestra sus prodigiosas *perspectivas*, en los mismos colores de Empédocles: el *blanco*, el *negro*, el *rojo*, y toda una gama de *ocres* (o de *amarillos*, para Demócrito). Doce mil años después, los presocráticos no conocieron nada equivalente y, sin embargo, seguían pensando, visualmente, en el mismo campo cromático. Las fotografías en color aquí presentadas son las primeras que se hicieron en la cueva, poco después de su descubrimiento, para acompañar el bello y extraño texto que Georges Bataille dedicó al "Nacimiento del Arte" en Lascaux...

Vista general de la *gran sala* (o sala de los toros); entrada del *divertículo axial*, visto de la gran sala.

8. La proporción

"Los ojos y los oídos son malos testigos para las almas sordas a su lenguaje."
Heráclito [Sexto Empírico][1]

Con los griegos, antepasados directos de nuestra manera de mirar y escuchar el mundo, sentimos a menudo una familiaridad inmediata, heredera de una tradición filosófica y científica ininterrumpida. Cuando leemos e interpretamos a los presocráticos, lo hacemos a través de los escritos de otros griegos, que vivieron a veces siglos después, y filtraron sus fuentes, hoy perdidas, transmitiendo o velando para siempre, según sus propias inquietudes, concepciones para ellos ora muy recientes, ora muy antiguas. Así, mientras que Platón frecuentó a los pitagóricos en su época de esplendor, el neoplatónico Proclo (412-485) se hallaba ya a mitad del camino entre Pitágoras y Piero della Francesca... Ante tal continuidad, no podemos saber nunca si discutimos realmente los orígenes del pensamiento griego, o la idea que se hacían los griegos de sus orígenes...

Aún así, desde los milesios Tales, Anaximandro y Anaxímenes, que forman la primera escuela según la clasificación de H. Diels, podemos seguir una constante preocupación por las propiedades fundamentales de la percepción humana, que marcan las semejanzas y diferencias entre los cinco sentidos.

"Así como el antiguo Anaxímenes lo consideraba, no pensemos que nada sea ni caliente ni frío absolutamente en sustancia, pero creamos que son pasiones comunes de la materia, que sobrevienen tras las mutaciones. Pues dice que lo que se aprieta, se espesa y se estrecha en la materia, es lo frío: y lo que se rarifica y se *relaja* (pues usa de este mismo término), dice que es lo caliente. Por ello, no hay ningún despropósito en afirmar que el hombre con su boca sopla tanto lo frío como lo caliente; pues el aliento se enfría al apretar los labios, pero cuando sale de la boca trasera abierta, entonces es cálido, debido a la rareza."

[Plutarco][2]

No se puede expresar mejor la relatividad de la percepción. Los milesios estudiaron muy particularmente el cielo aparente, el único a su alcance desde luego, donde todo es, por fuerza, relativo. Tales intentó precisar la dimensión del sol, y la refirió al radio de su órbita (720 veces superior, según él) [Diógenes Laercio][3]; Anaxímenes se contentó con afirmar que "este sol es ancho como una hoja"[4], afirmación que retomó luego Heráclito, comparando el astro diurno con "el pie de un hombre" [Aecio][5]. Si observamos que nuestro pie es la única magnitud de referencia que permanece continuamente a igual distancia de los ojos, no deja de ser astuta, además de maliciosa, la observación del Oscuro efesio...

Heráclito, en especial, encuentra fórmulas fulminantes para caracterizar la relatividad geométrica ("Pues sobre la circunferencia, comienzo y final son comunes" [Porfirio][6]) o temporal ("Pues no se puede entrar dos veces en el mismo río" [Plutarco][7]), y se singulariza al hacer del conflicto el principio generador del mundo, luego de su percepción:

"Hay que conocer
que el conflicto es universal

---

1 "Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988. Héraclite (p. 170), *in* "Contre les mathématiciens", Sextus Empiricus.
2 Anaximène, "Les présocratiques" (p. 49), *in* "Du premier froid", Plutarque.
3 Thalès, "Les présocratiques" (p. 4), *in* "Vies", Diogène Laërce.
4 Anaximène, "Les présocratiques" (p. 50), *in* "Opinions", Aétius.
5 Héraclite, "Les présocratiques" (p. 146), *in* "Opinions", Aétius.
6 Héraclite, "Les présocratiques" (p. 169), *in* "Questions homériques sur l'Iliade", Porphyre.
7 Héraclite, "Les présocratiques" (p. 166), *in* "Que signifie le mot Ei", Plutarque.

“La cueva de Lascaux, en el valle del Vézère, a dos kilómetros de la pequeña ciudad de Montignac, no es solamente la más bella, la más rica de las cuevas prehistóricas con pinturas; es, en el origen, la primera señal *sensible* que nos haya llegado del hombre y del arte.

Antes del Paleolítico superior, no podemos decir exactamente que se trata del hombre. Un ser ocupaba las cuevas que se parecía, en un sentido, al hombre; este ser, en todo caso, trabajaba, tenía lo que la prehistoria llama una industria, talleres donde se labraba la piedra. Pero nunca hizo “obra de arte”. No lo hubiera sabido y tampoco, aparentemente, sintió su deseo. La cueva de Lascaux, que remonta sin duda, sino a los primeros tiempos, a la primera parte de la edad a la cual la prehistoria da el nombre de Paleolítico superior, se situa en estas condiciones al comienzo de la humanidad cumplida. Todo comienzo supone lo que lo precede, pero en un punto el día nace de la noche, y eso cuya luz, en Lascaux, nos llega, es la aurora de la especie humana. Es del “hombre de Lascaux” que sin duda y por primera vez, podemos decir en fin que, haciendo obra de arte, se parecía a nosotros, que evidentemente, era nuestro semejante.”

Dos toros enfrentados en la pared izquierda de la gran sala de los toros. Texto: “Lascaux ou la naissance de l’art”, G. Bataille.

que la discordia es el derecho
y que todas las cosas nacen y mueren según discordia y necesidad"

Heráclito [Orígenes][1]

Y Aristóteles concluye, en su "Ética a Eudemo":

"Heráclito censura el poeta que ha dicho:

Que perezca Conflicto entre los dioses y entre los hombres

porque no habría armonía, de no existir lo agudo y lo grave, ni vida sin la hembra y el macho, que son contrarios."

Aristóteles[2]

Resulta tentador ceder aquí a un salto especulativo, y considerar que esta afirmación anticipa realmente veinticinco siglos de la música europea, basada en el conflicto entre grave y agudo (es decir: en el aspecto de altura), entre intervalos consonantes y disonantes. Salvando el anacronismo, podríamos decir que la crítica heraclitiana a Homero censura el mismo sistema tonal, con su afán una y otra vez repetido de vencer en las apariencias el conflicto que realmente lo nutre, allí donde los compositores del siglo XX reconocerán finalmente el carácter generador, insalvable y luego fortalecedor del mismo conflicto...

En otro fragmento, Heráclito afirma que "los ojos son testigos más exactos que los oídos" [Polibio][3]. Tal jerarquización entre los sentidos, típica de la era moderna, no ha sido nunca hegemónica entre los griegos. En este caso, recordando la importancia de la noción de *opinión* en las reflexiones de Heráclito, podríamos interpretar el fragmento de forma menos literal de lo que hace Polibio (por ejemplo: hay que confiar más en los hechos presenciados que en las noticias aprendidas "de oídas"). No obstante, Empédocles parece contestar directamente al sabio de Éfeso, cuando observa:

"Abre en grande tus sentidos, dónde sea que la evidencia
aparece manifiesta. Y, sin embargo, recela
de aquel crédito exagerado que se otorga a la vista
de preferencia al oído, y que se otorga al oído,
lleno de ecos zumbando, de preferencia al gusto.
De los otros sentidos tampoco excluyas el concurso,
cuando por su conducto viene el conocimiento;
pero sepas reconocer bien la vía
por la cual el objeto revela su naturaleza".

Empédocles [Sexto Empírico][4]

Fiel a este programa, el pensador agrigentino desarrolla una teoría unificadora de los cinco sentidos: todas las percepciones nos llegan a través de los *poros*, unos conductos diminutos que se diferencian solamente por su tamaño, según conducen los sonidos, los olores o los sabores... Por otra parte, Empédocles es, según Aristóteles, el autor de la teoría de los cuatro elementos constitutivos de la materia (tierra, agua, aire y fuego), lo cual implica explicar la variedad del mundo y de su percepción a partir de las mezclas, y luego introducir la noción de *proporción*:

---

[1] Héraclite, "Les présocratiques" (p. 164) *in* "Contre Celse", Origènes.
[2] Héraclite, "Les présocratiques" (p. 144) *in* "Éthique à Eudème", Aristote.
[3] Héraclite, "Les présocratiques" (p. 169) *in* "Histoire", Polybe : "La naturaleza nos ha dotado con dos instrumentos que nos permiten informarnos de todo y hacer mucho: el oído y la vista; pero la vista es con diferencia el sentido más verídico, como lo dice Heráclito:...".
[4] Empédocle, "Les présocratiques" (p. 375), *in* "Contre les mathématiciens", Sextus Empiricus.

"¿Qué había de ser el sentimiento de los primeros hombres, entre los cuales estas pinturas gozaron evidentemente de un prestigio inmenso? El prestigio que se une, pensemos lo que queramos, a la revelación de lo inesperado. Es en este sentido sobre todo que hablamos del milagro de Lascaux, pues en Lascaux, la humanidad juvenil, por primera vez, midió la extensión de su riqueza. De su riqueza, es decir del poder que tenía de alcanzar lo inesperado, lo *maravilloso*.

Grecia también nos da un sentimiento de milagro, pero la luz que emana es la del día; la luz del día es menos aprehensible: sin embargo, en el tiempo de un rayo, deslumbra más."

La *nave*, con la gran vaca negra (izquierda) y la hilada de ciervos (derecha); pared derecha del divertículo axial, con sus caballitos; pared izquierda del divertículo axial, con el gran toro negro; pared derecha del divertículo axial, con vaca, "tablero" y caballitos. Texto: "Lascaux ou la naissance de l'art", G. Bataille.

> "Si quedara, empero, laguna en tu creencia
> sobre el hecho de saber cómo de agua y de tierra,
> de Éter y de Sol juntamente mezclados,
> tantas formas han nacido con tantos colores
> para los seres mortales, que de ello es ahora
> según las proporciones regladas por Afrodita ..."

Empédocles [Simplicius][1]

¿Y de dónde surgió tal teoría de unos pocos elementos fundamentales cuyas mezclas engendran, según las proporciones, toda la variedad del mundo? ¡De la pintura, pues!

> "Como dos pintores, cuando adornan con colores
> sus cuadros, exvotos que depositamos en los templos,
> en artistas instruidos de los secretos de su arte,
> cuando en sus manos cogen los diversos colores,
> los casan en sutiles armonías:
> un poco más de eso, un poco menos de aquello,
> y de esta materia engendran a su gusto
> unas formas imitando todo tipo de cosas,
> árboles, y creando hombres y mujeres,
> bestias, aves, y peces en el agua..."

Empédocles [Simplicius][2]

El siciliano se ve entonces conducido a determinar los colores primarios: serán cuatro, como los elementos: "Empédocles declaraba que el color es lo que se armoniza con los poros de la vista. Hay cuatro colores, iguales en número a los elementos: blanco, negro, rojo y ocre" [Aecio][3]. Se ha sugerido que estos cuatro colores correspondían a los pigmentos básicos utilizados por los pintores agrigentinos: eso podía explicar la curiosa mención del ocre, al lado del rojo, y la ausencia de los otros tonos que consideramos hoy como primarios. Refiriéndose más generalmente a la percepción de los colores por los antiguos europeos, Michel Pastoureau propone una teoría que vale la pena resumir aquí:

"Los empleos sociales, artísticos y religiosos del color azul no remontan a la noche de los tiempos. Ni siquiera al paleolítico superior, cuando los hombres, aún nómadas, pero viviendo ya desde mucho tiempo en sociedad, han realizado sus primeras pinturas en las cavernas. Allí, no hay lugar para el azul. Rojos, negros, marrones, ocres de cualquier matiz, pero nada de azul, ni de verde, y apenas si hay blanco. Ocurre casi lo mismo algunos milenios más tarde, en el neolítico, cuando aparecen las primeras técnicas de tintura: el hombre, ya sedentario, tiñe en rojo y en amarillo mucho antes de teñir en azul. Este color, tan ampliamente presentado por la naturaleza, no ha sido, empero, reproducido, fabricado y dominado por el ser humano sino difícilmente y tardíamente. Eso explica a lo mejor porqué, en Occidente, el azul ha sido considerado durante tanto tiempo como un color segundario, con un papel casi nulo en la vida social, en las prácticas religiosas y en la creación artística. Comparado con el rojo, el blanco y el negro, los tres colores "básicos" de las sociedades antiguas, su dimensión simbólica era demasiado débil para significar o transmitir ideas, para sugerir emociones o impresiones fuertes, para organizar códigos y sistemas, para ayudar a clasificar, asociar, oponer, jerarquizar – esta función clasificadora es la primera de las funciones del color en toda sociedad -, incluso para comunicar con el más allá.

---

[1] Empédocle, "Les présocratiques" (p. 401) *in* "Commentaire sur le traité du ciel d'Aristote", Simplicius.
[2] Empédocle, "Les présocratiques" (p. 383) *in* "Commentaire sur la physique d'Aristote", Simplicius.
[3] Empédocle, "Les présocratiques" (p. 372) *in* "Opinions", Aétius.

“Mientras que los pintores del paleolítico superior nos han dejado admirables representaciones de los animales que cazaban, se las han arreglado con procedimientos infantiles siempre que han querido figurar hombres. ¿No testificará esta negligencia de una intención esencial con relación a la cual la representación de un hombre no tenía importancia *por sí misma*, sino solamente en relación con el animal? Era esencial, en efecto, dar a la evocación del animal no solamente el valor central, sino un carácter *sensible* que sólo la imagen naturalista permitía alcanzar. El animal había de resultar, en un sentido, *hecho presente* en el rito, hecho presente por una llamada directa y muy poderosa a la imaginación, por la representación sensible. Era al contrario inútil hacer un esfuerzo para hacer sensible la presencia del hombre. En efecto, presente, lo era ya, estaba allí, en el fondo de la cueva, en el momento en que el rito se cumplía”.

Pared derecha de la nave, con la hilada de cabezas de ciervos; hacia el *cabinete de los felinos*, con dos bisontes; cabeza de caballo; pared izquierda de la nave, con la gran vaca negra pisando dos “tableros” de color. Texto: “Conferencia a la sociedad de Agricultura”, G. Bataille, Orléans, 1952.

El lugar discreto del azul en las actividades humanas y la dificultad existiendo en muchas lenguas antiguas para nombrar este color han conducido varios sabios del siglo XIX a preguntarse si los hombres y las mujeres de la Antigüedad veían el azul, o por lo menos si lo veían como nosotros. Hoy, estas cuestiones ya no tienen vigencia. Pero el débil papel social y simbólico llevado por el azul en las sociedades europeas durante milenios, desde el neolítico hasta el centro de la Edad media, sigue siendo un hecho histórico indiscutible sobre el cual conviene interrogarse.

Hasta los inicios de la época romana, en Occidente, teñir una tela consiste casi siempre (pero no exclusivamente, por supuesto) en sustituir su color de origen por un color ubicado en la gama de los rojos, desde los ocres y rosa más pálidos hasta los más intensos púrpura. Durante varios milenios, la tintura de los tejidos es luego esencialmente una tintura en rojo. Lo cual se ve confirmado, aún en la época romana, por el vocabulario latín, que ha hecho de las palabras *coloratus* (coloreado) y *ruber* (rojo) meros sinónimos (esta identificación ha permanecido en la lengua castellana, donde "colorado" significa todavía rojo: así, las expresiones "ruborizarse" y "ponerse colorado" son equivalentes en español).

Esta primacía del rojo parece remontar mucho más allá de la época romana. Constituye un dato antropológico primero y explica probablemente porqué, en la mayoría de las sociedades indoeuropeas, el blanco ha tenido durante mucho tiempo dos contrarios: el rojo y el negro, estos tres colores constituyendo tres "polos" en torno a los cuales, hasta la Edad media, se han organizado todos los códigos sociales y casi todos los sistemas de representación construidos sobre el color. Al parecer, el rojo representaba un tejido teñido, el blanco un tejido no teñido pero limpio o puro, el negro un tejido no teñido y sucio o mancillado. Los dos ejes primordiales de la sensibilidad antigua y medieval para los colores – el de luminosidad y el de densidad – provienen probablemente de esta doble oposición: por una parte el blanco y el negro (problema de la relación con la luz, su intensidad, su pureza), por otra parte el blanco y el rojo (problema de la relación con la materia colorante, su presencia o su ausencia, su riqueza, su concentración). El negro es lo oscuro, el rojo es lo denso, mientras que el blanco es a la vez el contrario de lo uno y de lo otro.

En este sistema de tres polos y dos ejes, no hay sitio para el verde y el azul (meros grados de oscurecimiento), ni tampoco para el amarillo y el naranja (meros grados de coloración). Estos colores están presentes en la vida material y cotidiana, pero no desenvuelven el mismo papel que los tres otros en el nivel social y simbólico. Para el historiador, el gran problema es explicar porqué, entre los siglos XII y XIII, este sistema ternario antiquísimo se acaba y cómo, en unos pocos decenios, se pasa a un sistema cromático de seis colores iguales (blanco, rojo, azul, amarillo, verde, negro), sobre el cual seguimos, en gran parte, viviendo hoy."

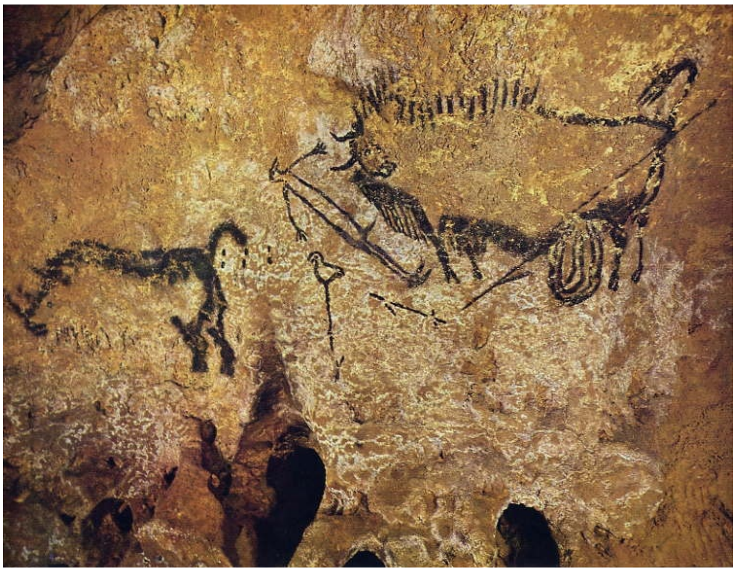
Michel Pastoureau[1]

Esta teoría no debe interpretarse de manera rígida; sufre excepciones: su mismo autor recuerda el aporte constante de otras culturas, como Egipto y sus azules, entre los cuales el famoso lapis-lazuli; luego los pueblos semitas, judíos y árabes, con su contraste dominante rojo-negro,... Pero las observaciones de Michel Pastoureau ponen de relieve, en mi opinión, un rasgo característico del pensamiento griego: la evacuación del color en sí. El contraste blanco-rojo aquí evocado es de *calidad*, es decir de saturación: los colores próximos al rojo - el naranja o el amarillo - se despersonalizan al fundirse en una simple gradación que va desde el blanco (saturación nula) hasta un único color, el rojo (saturación máxima); por otra parte, los colores verde-azul se asimilan a otra gradación, de intensidad esta vez, en el contraste de *claro-oscuro*, cuyos polos son el blanco y el negro.

El contraste del color en sí, el que se manifiesta en las irisaciones, con sus tonos denombrables aunque inestables y fugaces, ha generado, en otras culturas, una analogía con la escala musical. Pero no están los intervalos, no funciona bien la memoria, no se manifiestan

---

[1] "Bleu : histoire d'une couleur", Michel Pastoureau, Éditions du Seuil, 2000.



"Las huellas que tras varios milenios aquellos hombres nos han dejado se limitan - con contadísimas excepciones - a representaciones de animales. Con una manera de suerte imprevista, estos hombres de Lascaux hicieron sensible el hecho de que, siendo hombres, se parecían a nosotros, pero lo han hecho dejándonos la imagen de la animalidad que abandonaban. Como si hubieran debido adornar un prestigio naciente con la gracia animal que habían perdido. Lo que con una fuerza juvenil anuncian estas figuras inhumanas no es solamente el que quienes las han pintado han acabado de convertirse en hombres pintándolas, sino que lo han hecho dando de la animalidad, no de sí mismos, esta imagen sugiriendo lo que la humanidad tiene de fascinante."

El *pozo*, con hombre, bisonte y rinoceronte. Texto: "Lascaux ou la naissance de l'art", G. Bataille.

proporciones exactas en el manejo de los pigmentos, no existe un experimento simple que evidencie el orden de los colores: para ordenarlos, hace falta aceptar cierto grado de arbitrariedad. Y la filosofía griega, que se construyó en contra de la sofística, nunca gustó de lo arbitrario.

Entre los presocráticos, el último gran intento de abarcar el color se debe a Demócrito, quien recoge los cuatro colores fundamentales de Empédocles (sustituyendo el ocre por el amarillo/verde), aplicándoles un razonamiento atomista: el color es una convención, sólo existen los átomos y el vacío; diferentes distribuciones de átomos engendran luego diferentes colores. El abderitano anticipa así la descripción actual de los colores químicos, que se halla en la estructura molecular de la materia. Sin embargo, al no disponer de un microscopio que pueda confirmar sus intuiciones teóricas, estas no pasan de ser meras coyunturas, sustituibles por otras, a partir de otra teoría...

En su afán sistemizador, Aristóteles resaltará la pobre argumentación de sus predecesores, a los cuales el Sócrates de Platón ya exigía más coherencia. En la libertad presocrática, caben en efecto todas las intuiciones, las analogías, las hipótesis más aventuradas. Así, después de los milesios, que sugieren razonablemente que la tierra es un disco plano, o quizás una esfera (los fragmentos no concuerdan), y que el sol podría tener la forma de un casco de navío inclinándose regularmente sobre la bóveda celeste, vienen Heráclides Póntico, y luego Aristarco, para sostener la absurda fantasía de que los movimientos del cielo aparente no son más que una ilusión, resultado de una doble rotación de la tierra sobre sí misma y alrededor del sol... En cuanto a los pitagóricos, no dudan en poner patas arriba el universo entero, al declarar que ni siquiera el sol está en el centro de un espacio que soporta una infinidad de mundos... A todo eso, Aristóteles pondrá buen orden, imponiéndose los criterios científicos más rigurosos de su tiempo, para construir un sistema geocéntrico racional, razonable y - en lo posible - comprobable. Incidamente, los múltiples errores del estagirita, admirablemente argumentados, ocuparán durante siglos las universidades europeas, confundiendo y enriqueciendo el glorioso desarrollo de la escolástica, hasta la vuelta de los agitadores, en los albores del siglo XVII: aún en 1600, Giordano Bruno fue ajusticiado en una hoguera romana, por haber abogado, entre otras herejías, a favor de la pitagórica infinidad de los mundos.

En cuanto al color, las ideas de Aristóteles, esparcidas entre varios libros, participan del rechazo griego manifestado hacia el contraste del color en sí: al observar que los colores se desvanecen en la oscuridad, y también en el deslumbramiento (es decir, para nosotros: que la frecuencia y la intensidad no son aspectos independientes para el ojo), hace nacer los colores entre el negro y el blanco, reduciendo a estos dos los cuatros colores fundamentales de Empédocles y Demócrito. Así, del mismo modo que la frecuencia dominante del color se veía confundida con su saturación según la interpretación de Pastoureau, se confunde para Aristóteles con la intensidad. Concluiremos sobre este aspecto de la percepción - pues los griegos no han dicho mucho más al respecto - con un curioso escolio que cuenta una tercera manera de desviar el color en sí, dirigiéndolo esta vez hacia el contraste cálido-frio:

> "Anaxímenes dice que el arco iris se produce cuando los rayos del Sol vienen a golpear el aire espeso y denso. Entonces, la parte que se encuentra ante el Sol se colorea de rojo escarlata, por hallarse calentada, mientras que la parte trasera aparece negra, por encontrarse bajo el dominio de la humedad."

Escolio a los Fenómenos de Aratos[1]

* * *

[1] Anaximène, "Les présocratiques" (p. 47), *in* Scolie aux "Phénomènes d'Aratos".

El azul no se desconoce en la alta Edad Media: desenvuelve, por ejemplo, un papel fundamental en la preciosa biblia de Carlos el Calvo aquí presentada (siglo IX). Sin embargo, este azul, comparado con el de las ilustraciones de la página siguiente, que pertenecen a un libro del siglo XIII, posterior a la revolución cromática descrita por Michel Pastoureau, no sólo se distingue por su menor saturación, sino también por su función, aquí esencialmente de fondo, paisajística, fundiéndose, por lo tanto, en gradaciones - con la notable excepción de la gran mandorla realzando David y sus músicos...

Cuatro ilustraciones de la primera biblia de Carlos el Calvo, o "Bilia de Vivien" (entre 845 y 851, Francia).

Mi donante es Arimnetos, el hijo
de Pitágoras quien el primero inventó,
en las proporciones, numerosas ciencias

[exvoto descrito por Duris de Samos, según Porfirio][1]

No es, pues, a partir de la pintura que los griegos desarrollaron su peculiar visión del mundo: ésta fue esencialmente *geométrica*, es decir que se formó en el aspecto espacial - y no frecuencial - de la vista. Pero su teoría de la percepción se equilibró con otra experiencia, igual de importante en los principios de su filosofía: la escucha de cuerdas diversamente divididas, y el consiguiente estudio del aspecto frecuencial de la audición.

No fue Empédocles, pues, el padre de la ciencia griega, ni Heráclito, ni nadie entre los milesios, eleatas o abderitanos: los primeros matemáticos, arquitectos, escultores, músicos o médicos se eligieron otro maestro, un misterioso mago nacido en la isla de Samos, del cual no sabemos nada, sino que desembarcó un buen día, ya mayor, en la costa de Crotona, donde fundó la primera secta filosófica de la historia griega, la cual prosperó rápidamente, luego en Metaponto y en otras ciudades de la Magna Grecia, antes de enjambrar desde Italia hacia todas las colonias de la orbe helénica.

¿Quién fue Pitágoras? No dejó escritos, o estos se perdieron. Las anécdotas que se cuentan sobre su vida y su escuela se dividen fácilmente en dos series antagónicas: la primera - formada principalmente por testimonios tardíos - resalta los aspectos misteriosos, sectarios, mágicos o extravagantes de su escuela, y la segunda - que cuenta con los principales fragmentos auténticos de textos pitagóricos -, sorprendentemente coherente, experimental y racional, ha sido, sin embargo, envuelta en el mismo desprecio por la mayoría de los comentadores. En nuestra época, aún, hallamos, al lado de un hatajo de devociones ocultistas, opiniones doctas que resumen el pitagoricismo a una "regresión racional" dentro del desarrollo presocrático de la *filosofía* - una palabra, por cierto, forjada, precisamente, por Pitágoras.

Incluso Jean-Paul Dumont, en el prefacio a su excelente edición francesa de los presocráticos, no puede resistirse a mencionar la dudosa anécdota según la cual "Pitágoras podía, al precio de una contención particular de su memoria, recordarse haber sido un pez"[2]; y el traductor de concluir irónicamente: "así, el racionalismo naciente conocía zonas de sombra"[3]. ¿Porqué achacar a Pitágoras precisamente lo que se podría decir de tantos otros presocráticos misteriosos para nosotros? Al lado del silencio profesado por la secta - y de sus secretos reservados a los iniciados -, que pudo irritar los contemporáneos, suscitando leyendas y confusiones con la religión órfica, hay que resaltar la peculiar relación que Platón mantuvo con los pitagóricos. En toda su obra, el gran ateniense cita una sola vez a Pitágoras, pero sabemos, por sus cartas, que fue muy próximo a la secta y muy al tanto de sus trabajos. No conoceremos nunca la importancia de la deuda intelectual que contrajo con ellos, porque ninguno de los tratados pitagóricos que él leyó ha sido conservado. En cuanto a Aristóteles, utilizó a menudo los argumentos pitagóricos, más fáciles de simplificar, y luego de ridiculizar, para atacar a través de ellos las ideas de Platón. Su "Vida de Pitágoras" ha desaparecido, como la de Aristóxenes de Tarento, discípulo de Xenófilo, uno de los últimos pitagóricos auténticos, y sólo se conservan las obras homónimas de Porfirio y Jámblico, muy tardías.

Desde luego, nuestra intención no es de construir un panegírico a los pitagóricos, pero sí de mostrar que los pocos fragmentos suyos conservados presentan una gran coherencia, si los encaramos desde su principal fuente de inspiración, declaradamente musical, y que forman una etapa esencial en el camino hacia aquella *geometría sensible* que nos hemos propuesto describir.

---

1 Pythagore, "Les présocratiques" (p. 55), *in* "Vie de Pythagore", Porphyre.
2 Préface de Jean-Paul Dumont, "Les présocratiques" (p. XV).
3 Ibid.




En el Salterio de San Luis, el lapislázuli, profundo y saturado, afirma su esplendor. Es el pigmento más costoso de la época. Transfigura los cielos, que no aparecen ya - por así decirlo - celestes, sino celestiales. El azul gana también posiciones en los personajes: es el color de María, de Noé y sus hijos, De Abraham e Isaac. En otro matiz, sigue siendo, empero, el color de los demonios...

Cuatro ilustraciones del salterio de San Luis, o "Salterio parisiense", Paris (entre 1258 y 1270).

Interrogar la figura - o el mito - de Pitágoras es, en realidad, enfrentarse a la idea que se hacían los griegos del origen de sus ciencias. Pequeño pueblo de comerciantes con diminutas ciudades esparcidas por las riberas del Mediterráneo, los helenos no podían pretender a la gloriosa antigüedad de Egipto (excepto en la proeza literaria que Platón monta en el Timeo), ni a la poderosa universalidad del imperio persa. Ante esta situación, tuvieron la astucia de conceder siempre mucho a estos mundos bárbaros, para resaltar mejor sus propios méritos.

Un perfecto ejemplo de tal actitud se encuentra en "Los Persas" de Esquilo, donde se celebra la victoria griega de Salamina - a la cual el autor participó como soldado - desde el enfoque, no de los vencedores, sino de las mujeres persas, que esperan a sus maridos en la capital del imperio y aprenden, incrédulas, el inesperado desastre, cuya terrible magnitud quedará resaltada por la misma nobleza de las vencidas, y por la conmovedora sinceridad de su sorpresa primero, luego de su lamento.

Del mismo modo, los griegos - por lo menos los más estudiosos - dejaron pronto de dar crédito a sus propios mitos fundadores, y de buen grado, reconocieron la anterioridad de Asia y África en el invento de las ciencias. Pero este reconocimiento se enmarcaba en una estrategia, donde la superioridad griega se había de manifestar por una transformación realmente trascendente de aquellas ciencias incipientes: hacía falta, luego, un Prometeo, que diera su verdadero sentido a este fuego robado: aquí, los mismos mitos de aquel viejo pueblo de piratas astutos volvían a servir, pero ya pulidos y transformados en lo que los helenos tuvieron de más cercano a una epistemología: en la antigüedad tardía de Porfirio y Proclo, la luz espiritual de Prometeo había eclipsado por completo a la vieja advertencia de Pandora, y sólo hacía falta poner en escena el camino triunfal de la ilustración neoplatónica.

Para el papel de Prometeo, se presentaban dos actores de primera fila: Tales ofrecía la ventaja de la antigüedad y de la continuidad, a través de la escuela de Mileto: era la solución neutra, sin connotaciones particulares. Frente a él, Pitágoras, con su aura de misterio, podía exhibir sus credenciales como músico.

"En lo concerniente a su enseñanza, la mayoría afirma que [Pitágoras] aprendió de los egipcios y caldeos así como de los fenicios lo que toca a las ciencias llamadas matemáticas. En efecto, si la geometría ha apasionado a los egipcios desde tiempos muy remotos, los fenicios, ellos, se han hecho una especialidad de los números y de los cálculos aritméticos, y los caldeos de la especulación astronómica. En cuanto a los ritos religiosos y otras reglas de vida, es a través de la enseñanza de los magos, dicen, que los ha recibido."

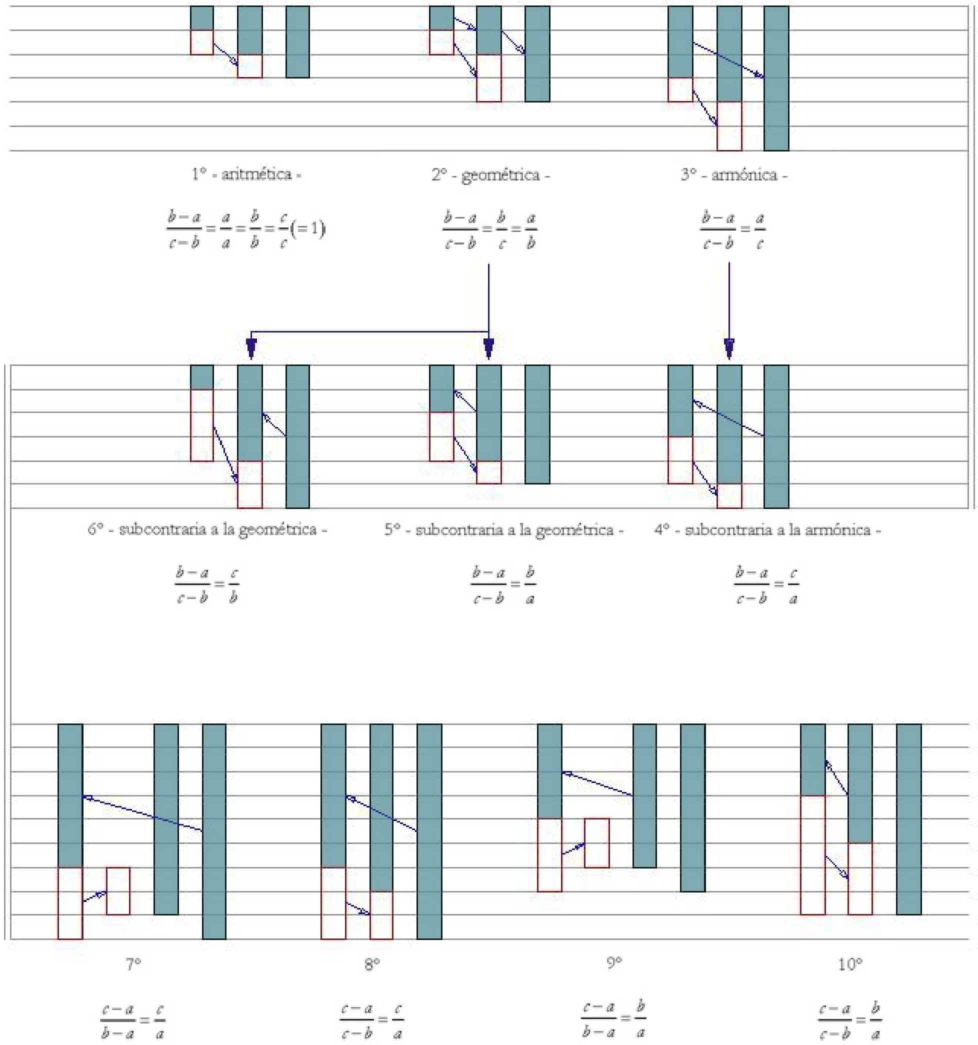
Porfirio[1]

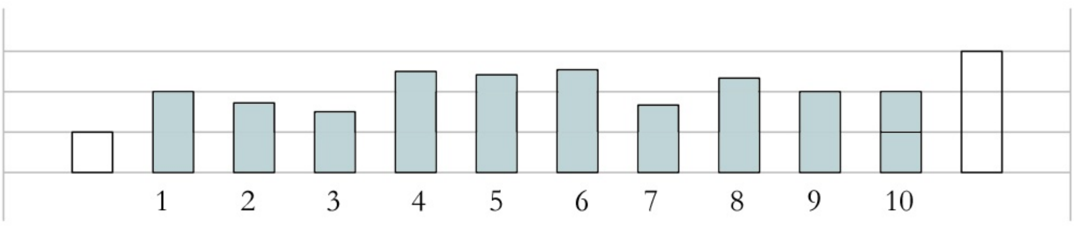
Bastaba, pues, que Pitágoras aportara la escala musical (quizás aprendida de los sacerdotes caldeos, herederos de la antigua ciencia mesopotámica) para que se hallara completado aquel compendio de "artes" (geometría, astronomía, aritmética y música), que los romanos llamaron *quadrivium* (en español: *cuadrivio*), y que ordenó la enseñanza europea durante casi dos mil años, hasta el final de la escolástica.

En su introducción a los "Elementos" de Euclides, Proclo da su opinión sobre la aportación griega a estas disciplinas:

"Muchos autores cuentan que la geometría, nacida de la medición de los terrenos, ha sido inventada por los egipcios y que esta medición les era necesaria debido a la crecida del Nilo, que hacía desaparecer los mojones perteneciendo a cada uno. No hay nada extraño en que el invento de esta ciencia y de las demás haya sido impulsado por el interés, porque todo lo que se obtiene en la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto. Resulta pues natural que una transición se produzca de la sensación al razonamiento y de este a la inteligencia. Luego, del mismo modo que el conocimiento exacto de los números tuvo su fuente en los fenicios debido al comercio y a

[1] Pythagore, "Les présocratiques" (p. 60), *in* "Vie de Pythagore", Porphyre.





En este esquema recapitulativo (arriba), se muestran las diez mediedades pitagóricas: las tres primeras se atribuyen al mismo Pitágoras, las tres siguientes, subcontrarias a las primeras, serían de Arquitas, y las cuatro últimas pertenecerían a pitagóricos más tardíos (Hipaso, Simos Miónides o Eufranor). Sin embargo, al forzar cada una entre los extremos 1 y 3 (abajo), comprobamos que diez mediedades son demasiadas: pierden su valor discriminante. Finalmente, lo productivo era distinguir las tres primeras, como pautas de comportamiento: aritmético, geométrico, armónico. Las encontramos por doquier en la música y, como se verá, resultan también constitutivas en otros aspectos de la percepción...

"Las mediedades pitagóricas", el autor y Gori Moya.

las transacciones, la geometría ha sido descubierta igualmente por los egipcios por la razón que acabamos de mencionar. Tales fue el primero que, habiendo estado en Egipto, trajo de allí su teoría a Grecia; encontró muchas cosas por sí mismo e hizo conocer los principios de muchas de ellas a sus sucesores, aplicándose a unas de manera más general y a otras de un modo más sensible."

Proclo[1]

Los pueblos del Oriente Medio habían desarrollado unas ciencias del cálculo puramente utilitarias: una geometría para medir terrenos y una aritmética para hacer cuentas. Tras un proceso revolucionario sin igual en la antigüedad, los griegos volverían a formular las matemáticas sobre una base completamente nueva, puramente perceptiva: su geometría nace del ojo, su aritmética del oído.

Entre los pensadores griegos, los pitagóricos se distinguen por un interés marcado hacia los sonidos y los números; podemos ahora reconstituir el itinerario que han seguido. La división de la cuerda, como la observación de la estructura armónica del sonido, conducen a considerar los números de una manera muy particular, porque sólo las fracciones entre números enteros producen intervalos manejables, entre los cuales están todos los que suenan consonantes. Los pitagóricos, y luego todos los griegos, llaman *rhetos* un número *expresable* (eso es el sentido literal del término) como relación entre dos enteros: 1.5 es *rhetos*, porque equivale a 3/2 (corresponde al intervalo de quinta) y 1.333... es también *rhetos*, porque equivale a 4/3 (corresponde al intervalo de cuarta).

La proporción, definida como relación entre magnitudes conmensurables, surge como evidencia entre tales números, y funda la aritmética. Esta se desarrolla luego con el estudio de las progresiones, que los pitagóricos expresan como *mediedades* entre tres términos de valor creciente: la primera, llamada *aritmética*, se da cuando la relación entre la diferencia de los dos primeros términos y la diferencia entre los dos últimos es igual a la unidad (por ejemplo: 1, 2, 3); la segunda, llamada *geométrica*, se da cuando esta relación es igual a la relación entre dos términos consecutivos de la mediedad (por ejemplo: 1, 2, 4); la tercera, llamada *armónica*, se da cuando esta relación es igual a la relación entre los dos términos extremos de la mediedad (por ejemplo: 3, 4, 6). Por lo tanto, la quinta forma con la octava una mediedad aritmética (1 3/2 2), y la cuarta una mediedad armónica (1 4/3 2).

Para el oído, observamos que las tres notas correspondiendo a dos razones en mediedad geométrica forman intervalos en mediedad aritmética, o, dicho de otra manera, que una progresión geométrica en las frecuencias se oye como una progresión aritmética en las alturas.

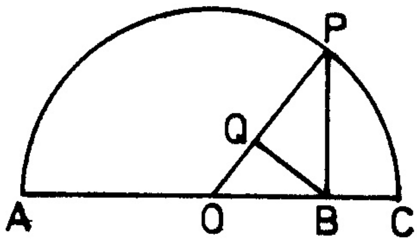
Nicómaco de Gerasa, filósofo neoplatónico del primer siglo después de Cristo, escribió un manual de armonía musical ("Enchiridion Harmonices") y una famosa "Introducción a la Aritmética" - el libro más completo que los griegos dejaron sobre el tema -, donde se explicitan las diez mediedades atribuidas a Pitágoras (las tres primeras), Arquitas (las tres siguientes, *subcontrarias* de las precedentes), Hipaso, Simos Miónides y Eufranor, todos ellos pitagóricos. La obra de Nicómaco nos muestra que, en su tiempo, la aritmética no había roto sus lazos con el pensamiento musical.

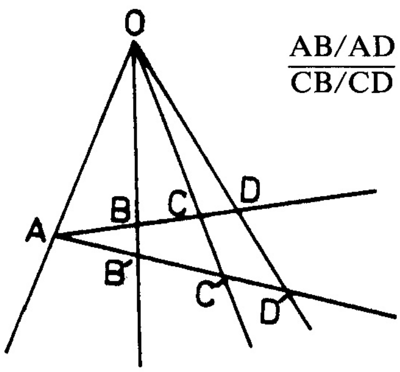
La teoría de las proporciones daba a los griegos una herramienta eficaz para explorar el mundo sensible, del mismo modo que la teoría de las ecuaciones ofreció a la ciencia decimonónica un instrumento para describir el mundo físico: en este sentido, podemos decir que las proporciones fueron las ecuaciones del mundo helénico.

En cuanto a las aplicaciones prácticas de esta teoría, no podemos aducir ni la música ni la pintura, porque no se conservó casi nada de tales artes. La escultura es la que dejó, junto con la arquitectura, los mejores testimonios observables. Cabe destacar la figura de Policleto, gran

[1] "Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide", Proclus de Lycie, versión francesa de Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

$$AB = a$$
$$BC = b$$
$$OP = \frac{a+b}{2}$$
$$BP = \sqrt{ab}$$
$$QP = \frac{2ab}{a+b}$$





$$\frac{AB/AD}{CB/CD} = \frac{AB'/AD'}{C'B'/C'D'}$$

En el tercer libro de su "Colección", Pappo, el último gran geómetra griego, da una forma elegante para visualizar las tres medias pitagóricas entre dos valores a y b. Con una simple construcción geométrica (arriba), se verifica que OP constituye la media aritmética de AB y BC, BP su media geométrica y QP su media armónica. De paso, observemos la proposición 129 del séptimo libro de la "Colección" (abajo). Establece, a partir de cuatro rectas convergentes cualesquiera, una propiedad compleja, llamada "relación anarmónica". En el plano donde aquí se expone, resulta algo tétrica. Veremos más adelante que, en otro entorno, se convierte en una propiedad fundamental...

Construcción del libro III y proposición VII-129 de las "Colecciones" de Pappo [Pappus].

escultor y pitagórico, cuyo tratado, el "Canon", hoy perdido, da pie a la siguiente interpretación de Erwin Panofsky:

"Los principios del arte griego arcaico eran todavía similares a los del arte egipcio; el adelanto que supuso el estilo clásico respecto al arcaico consiste en que el primero aceptó como valores artísticos positivos aquellos factores mismos que los egipcios habían descuidado o rechazado. El arte griego clásico tuvo en cuenta las dimensiones mudables que derivan del movimiento orgánico, el escorzo resultante del proceso de la visión, y en fin, la necesidad de corregir, en ciertos casos, la impresión óptica del observador por medio de ajustes "eurítmicos". En consecuencia, los griegos no podían apoyarse sobre un sistema de proporciones que, fijando las dimensiones "objetivas", definiera también irrevocablemente las dimensiones "técnicas". Sólo podían admitir una teoría de las proporciones con la condición de que ésta permitiera al artista la libertad de variar las dimensiones "objetivas" en cada caso particular mediante combinaciones libres; en suma, con la condición de que la teoría se limitara a desempeñar el papel de una antropometría.

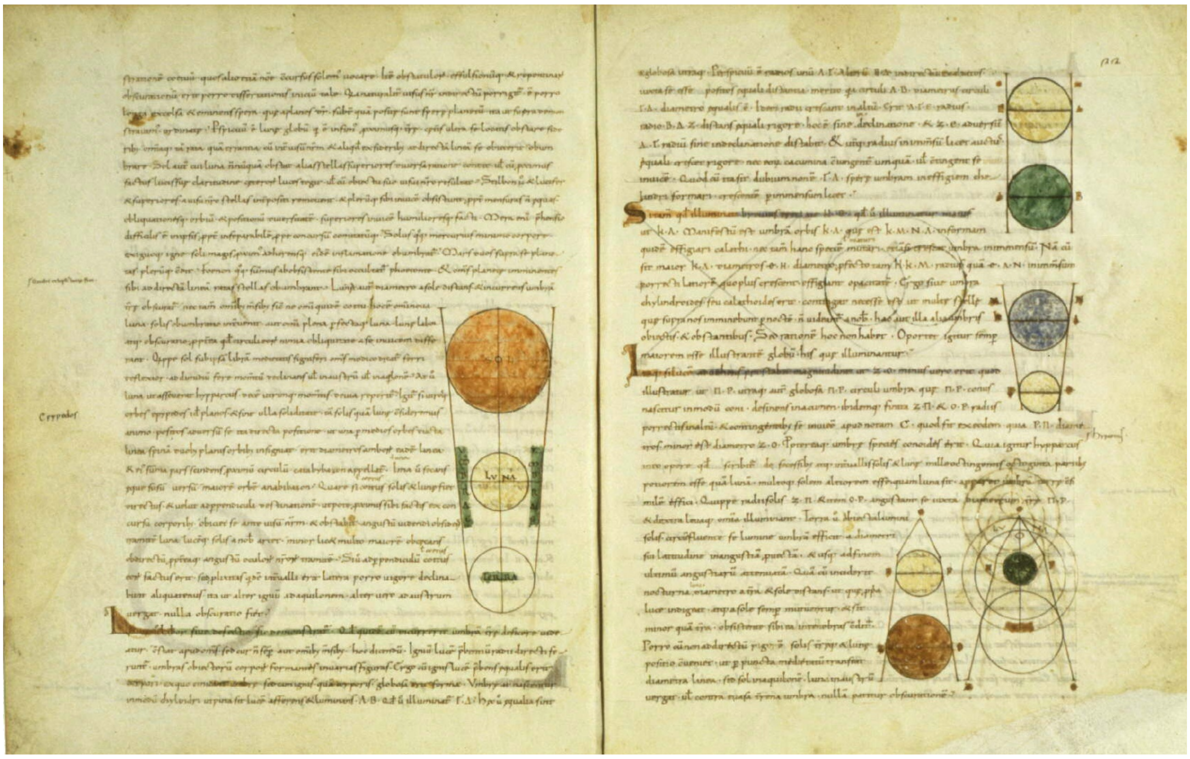
Por esta razón, disponemos de informaciones mucho menos exactas sobre la teoría griega de las proporciones, tal como fue desarrollada y aplicada en la época clásica, que sobre el sistema egipcio. Una vez han dejado de ser idénticas las dimensiones "técnicas" y las dimensiones "objetivas", el sistema (o los sistemas) no puede ya percibirse directamente en las obras de arte. Sin embargo, es posible espigar algunas noticias en las fuentes literarias, a menudo vinculadas al nombre de Policleto, el padre (o el formulador al menos) de la antropometría clásica griega.

Así, por ejemplo, leemos en los "Placita Hippocratis et Platonis" de Galeno:

τὸ δὲ κάλλος οὐκ ἐν τῇ τῶν στοιχείων, ἀλλ' ἐν τῇ τῶν μορίων συμμετρίᾳ συνίστασθαι νομίζει [Χρύσιππος], δακτύλου πρὸς δάκτυλον δηλονότι καὶ συμπάντων αὐτῶν πρός τε μετακάρπιον καὶ καρπόν, καὶ τούτων πρὸς πῆχυν, καὶ πήχεως πρὸς βραχίονα, καὶ πάντων πρὸς πάντα, καθάπερ ἐν τῷ Πολυκλείτου κανόνι γέγραπται.

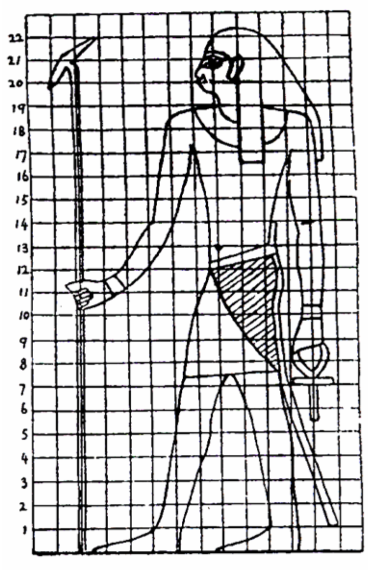
"Crisipo... sostiene que la belleza no consiste en los elementos, sino en la proporción armoniosa de las partes, en la proporción de un dedo con relación a otro dedo, de todos los dedos respecto al resto de la mano, del resto de la mano respecto a la. muñeca, de ésta respecto al antebrazo, del antebrazo respecto al brazo entero, y de todas las partes, en fin, respecto a todas las otras, como se halla escrito en el canon de Policleto."

En primer lugar, este pasaje confirma lo que desde un principio habíamos sospechado: que el canon de Policleto tenía un carácter puramente antropométrico, esto es, que su designio no era el de facilitar el tratamiento compositivo de los bloques de piedra o de las superficies murales, sino exclusivamente el de definir las proporciones "objetivas" del ser humano normal; de ningún modo servía para predeterminar las medidas "técnicas". Al artista que observaba este canon no se le pedía que se abstuviera de representar las variaciones anatómicas y miméticas, ni de recurrir a los escorzos, ni mucho menos se le impedía adaptar, de ser ello necesario, las dimensiones de su figura a la experiencia visual objetiva del observador (lo que sucede cuando el escultor prolonga las partes superiores de una figura que debe ser colocada en lugar elevado, o engorda el lado opuesto de un rostro presentado de tres cuartos). En segundo lugar, el testimonio de Galeno caracteriza el principio de la teoría de las proporciones de Policleto como un principio que podría llamarse "orgánico".

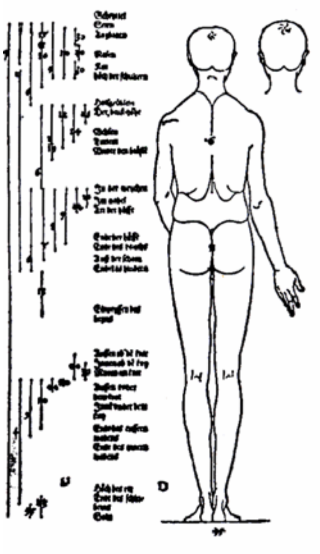


Arriba, el "Timeo" de Platón, en un bello manuscrito del siglo X: verdadera "biblia de las proporciones", recoge la herencia pitagórica; su explicación de la creación mediante figuras geométricas y mediedades aritméticas ejercerá una influencia sin par durante toda la Edad Media y el Renacimiento. Abajo, la "Memoria de Astronomía" de Tûsî, en un manuscrito del siglo XIV: los árabes, además de leer Platón y Aristóteles, han recuperado y desarrollado los razonamientos mecánicos y astronómicos de Arquímedes y Tolomeo; las figuras aquí presentadas muestran un ingenioso mecanismo para generar, a partir de dos movimientos circulares, un movimiento rectilíneo siguiendo el diámetro del círculo exterior: una forma de hacer geometría que Platón hubiera ciertamente rechazado...

El "Timeo" de Platón, traducido y comentado por Calcidius (siglo V); la "Tadkira fî 'ilmi l'Hayâ" de Tûsî.



Como ya hemos visto, el artista-teórico egipcio comenzaba por construir una red de cuadros iguales y luego insertaba dentro de esta red los contornos de su figura, sin preocuparse por hacer coincidir cada línea de la retícula con una de las articulaciones orgánicamente importantes del cuerpo. Por ejemplo, podemos constatar que según el "canon tardío" egipcio [ver figura], las horizontales 2, 3, 7, 8, 9, 15 pasan por puntos absolutamente faltos de significación. El artista-teórico griego procedía de manera opuesta. No tomaba como punto de partida un cuadriculado mecánicamente construido en el que seguidamente acomodaba la figura; en lugar de esto, principiaba por la figura humana, orgánicamente diferenciada en torso, miembros y partes de los miembros, y trataba seguidamente de averiguar cómo estas partes se relacionaban entre sí y con el todo. Cuando, según Galeno, Policleto definió la relación adecuada entre uno y otro dedo, entre los dedos y la mano, entre la mano y el antebrazo, entre el antebrazo y el brazo, y finalmente, entre cada miembro y el cuerpo entero, ello significó que la teoría clásica griega de las proporciones había renunciado a la idea de construir el cuerpo humano sobre la base de un módulo absoluto, como partiendo de bloques pequeños e iguales de construcción: trataba de establecer relaciones entre los miembros, anatómicamente diferenciados y distintos entre sí, y el cuerpo entero. Así, pues, no es un principio de identidad mecánica, sino un principio de diferenciación orgánica lo que constituye la base del canon de Policleto; hubiera sido del todo imposible incorporar sus preceptos a una red de cuadros. Para poder tener una idea sobre el carácter de la perdida teoría de los griegos, hemos de acudir, no al sistema egipcio de proporciones, sino al sistema de acuerdo con el cual se miden las figuras en el libro I del tratado de Alberto Durero sobre las proporciones humanas [ver figura].



Las dimensiones de estas figuras son todas expresadas en fracciones comunes de la longitud total, y la fracción común es en realidad el único símbolo matemático legítimo para las "relaciones entre cantidades conmensurables". El pasaje transmitido por Galeno muestra que también Policleto expresaba siempre la medida de una parte más pequeña como fracción común de una cantidad mayor (y finalmente del todo), y que no pensaba en expresar las dimensiones como múltiplos de un *modulus* constante. Es precisamente este método, que pone directamente en relación las dimensiones entre sí y las expresa una en función de la otra, en lugar de reducirlas separadamente a una única unidad neutra (esto es, $x = y/4$, y no $x = 1$, $y = 4$), el que realiza esa inmediatamente evidente "Vergleichlichkeit Eins gegen dem Andern" (Durero), que es característica de la teoría clásica. No es casualidad que Vitruvio, el único autor antiguo que nos ha transmitido algunos datos efectivos y numéricos sobre las proporciones humanas (datos que es evidente que proceden de fuentes griegas), las formulara exclusivamente como fracciones comunes de la longitud del cuerpo, y se ha establecido que en el *Doríforo* del propio Policleto las dimensiones de las partes más importantes del cuerpo pueden expresarse por tales fracciones.

El carácter antropométrico y orgánico de la teoría clásica de las proporciones se halla íntimamente relacionado con una tercera característica: su ambición resueltamente normativa y estética. Mientras el sistema egipcio se propone sólo reducir lo convencional a una fórmula fija, el canon de Policleto pretende captar la belleza. Galeno lo llama expresamente una definición de aquello "en que consiste la belleza" (καλλος συνισταϑαι). Vitruvio presenta su breve lista de

Los “Elementos” de Euclides. Abajo, se observan unas muy correctas axonometrías, para ilustrar los últimos libros de la obra, dedicados a la geometría en el espacio.

“Los Elementos”, Euclides: Libro I, proposición 47 (teorema de Pitágoras); Libro XI, proposiciones 31-33 (volumen de los paralelipípedos).

medidas como "las dimensiones del *homo bene figuratus"*. Y la única afirmación que se puede remontar con seguridad hasta el mismo Policleto declara lo siguiente: *το γαρ ευ παρα μικρον δια πολλων αριθμων γιγνεσθαι*, ("la belleza viene poco a poco, a través de muchos números"). Así, por tanto, el canon de Policleto apuntaba a llevar a la práctica una "ley" de la estética, y es un rasgo bien característico del pensamiento clásico el que no haya podido éste concebir una semejante "ley" sino en forma de relaciones expresables en fracciones. Con la sola excepción de Plotino y de sus seguidores, la estética clásica identificaba el principio de la belleza con la consonancia de unas partes con otras y con el todo.
La Grecia clásica, por consiguiente, contrapone al código artesanal inflexible, mecánico, estático y convencional de los egipcios un sistema de relaciones elástico, dinámico y estéticamente relevante. Y de tal contraste fue ciertamente consciente la Antigüedad."

Erwin Panofsky[1]

El gran asunto, para los primeros filósofos, es el estudio de la organización del cielo.

"Es Pitágoras quien, el primero, ha dado el nombre de Cosmos a la envolvente del universo, debido a la organización que en ella se ve".

Aecio[2]

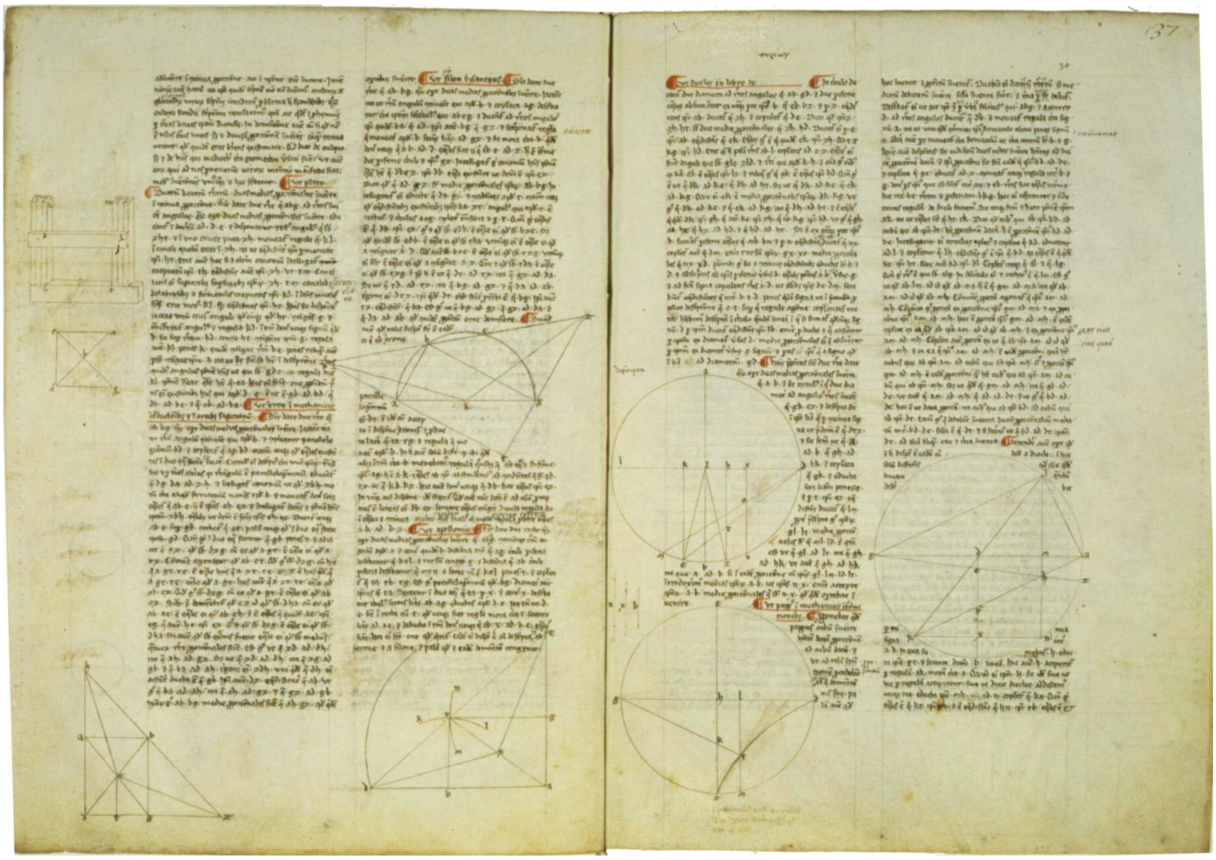
Los pitagóricos aplicaron sus proporciones a la descripción del cielo aparente, y el resultado fue un cosmos *relativo* (no tiene su centro ni en la tierra, ni siquiera en el sol) y *discreto* (punteado de estrellas, cuyas relaciones se definen mutuamente, como una escala musical). De allí deriva una teoría contra la cual Aristóteles, en "Acerca del Cielo", ejerce toda su ironía:

"La afirmación de que se produce una armonía de los [cuerpos] en translación, al modo como los sonidos forman un acorde, ha sido formulada de forma elegante y llamativa por los que la sostienen, pero no por ello se corresponde con la realidad. A algunos, en efecto, les parece forzoso que, al trasladarse cuerpos de semejante tamaño, se produzca algún sonido, ya que también [se produce] con los próximos a nosotros, aun no teniendo el mismo tamaño ni desplazándose con una velocidad comparable: que, al desplazarse el sol y la luna, además de astros tan numerosos y grandes, en una translación de semejante velocidad, es imposible que no se produzca un sonido de inconcebible magnitud. Suponiendo esto, así como que, en función de las distancias, las velocidades guardan [entre sí] las proporciones de los acordes musicales, dicen que el sonido de los astros al trasladarse en círculo se hace armónico. Y como parece absurdo que nosotros no oigamos ese sonido, dicen que la causa de ello es que, desde que nacemos, el sonido está ya presente, de modo que no es distinguible por contraste con un silencio opuesto: pues el discernimiento del sonido y el silencio es correlativo; de modo que, al igual que los broncistas no parecen distinguir [los sonidos] por su habituación [al ruido], otro tanto les ocurre a los hombres.

Estas [afirmaciones], tal como se ha dicho antes, suenan bien y melodiosamente, pero es imposible que suceda de este modo. En efecto, no sólo es absurdo que no se oiga nada, de lo cual se esfuerzan por exponer la causa, sino también que no haya ningún otro efecto al margen de la sensación. Pues los ruidos excesivos desgarran incluso la masa de cuerpos inanimados, v.g.: el ruido del trueno parte las piedras y los cuerpos más resistentes. Al desplazarse [cuerpos] tan grandes, y transmitiéndose el sonido en magnitud proporcional a la del [cuerpo] transportado, necesariamente debería llegar hasta aquí con redoblada magnitud y la intensidad de su fuerza debería ser descomunal. Pero es lógico que no lo oigamos y que los cuerpos no parezcan sufrir ningún efecto violento, ya que no se produce sonido alguno.

---

1 "El significado en las artes visuales", Erwin Panofsky, versión castellana de Nicanor Ancochea, Alianza Editorial, Madrid, 1979.
2 Pythagore, "Les présocratiques" (p. 68), *in* "Opinions", Aétius.



En estas páginas de "Sobre la esfera y el cilindro", Arquímedes estudia el problema de la duplicación del cubo, uno de los tres famosos problemas que no se pueden resolver con la regla y el compás, como lo quería Platón, junto con la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. En esta misma obra, Arquímedes aportaba una definición muy moderna de la recta, como la más corta de las líneas que unen dos puntos.

Comentarios de Eutocius a "Sobre la esfera y el cilindro", Arquímedes (trad. lat. por William de Moerbeke, ca. 1270).

Ahora bien, la causa de esto es evidente, a la vez que testimonio de que nuestra exposición es verdadera: pues el hecho problemático que hace decir a los pitagóricos que se produce un acorde por efecto de las traslaciones [de los astros] es un testimonio en nuestro favor.

En efecto, todas aquellas cosas que se desplazan producen ruido e impacto; en cambio, cuantas se hallan fijas o incluidas en el [cuerpo] que se traslada, como las partes de un barco, no pueden hacer ruido, como tampoco el propio barco si se desplaza con [la corriente de] un río. Sin embargo, cabría exponer los mismos argumentos [que ellos]: que es absurdo que el mástil y la popa de una nave tan grande no produzcan un gran ruido, y otro tanto el barco mismo al moverse. Lo que se desplaza en un [medio] que no lo hace produce ruido: en cambio, [lo que se halla] en algo que se desplaza, [formando un] continuo y sin hacer impacto, es imposible que haga ruido. En tal caso hay que decir, por consiguiente, que si los cuerpos de aquellos [astros] se trasladaran en medio de una masa de aire o de fuego esparcida por el universo, como algunos dicen, necesariamente producirían un ruido de extraordinaria magnitud, y al producirse éste, llegaría hasta aquí y causaría estragos. Por consiguiente, dado que no parece que eso ocurra, ninguno de aquellos [astros] se desplazará con traslación impulsada por un ser animado ni con traslación forzada, como si la naturaleza conociera previamente lo que iba a suceder, a saber, que si el movimiento no fuera de otro modo, nada de lo que se encuentra aquí alrededor sería de la misma manera.

Queda dicho, pues que los astros son esféricos y que no se mueven por sí mismos."

Aristóteles[1]

A pesar de la brillante refutación del estagirita, la música de las esferas, transmitida por Boecio, iba a conocer un fuerte éxito hasta el Renacimiento, alimentando aquí y allá focos de "neopitagoricismo" más o menos activos... Pero, ¿fue esa realmente una idea pitagórica? No se muestra en ninguno de los fragmentos pitagóricos llegados hasta nosotros. Tampoco parece compatible con las ideas del pitagórico Juto, conocido por los dos siguientes fragmentos, donde parece abogar por un espacio vacío, desprovisto del éter aristotélico, y luego más acorde a la aritmética discreta profesada por la secta:

"Algunos creen que la existencia de lo escaso y de lo denso hace manifiesta la del vacío: de hecho, si no existiera ni lo escaso ni lo denso, no podría, según ellos, haber ni contracción ni compresión. Ahora bien, sin estos fenómenos, o bien no habrá ya ningún movimiento, o bien, retomando las palabras de Juto, *el mundo ondulará*"

Aristóteles[2]

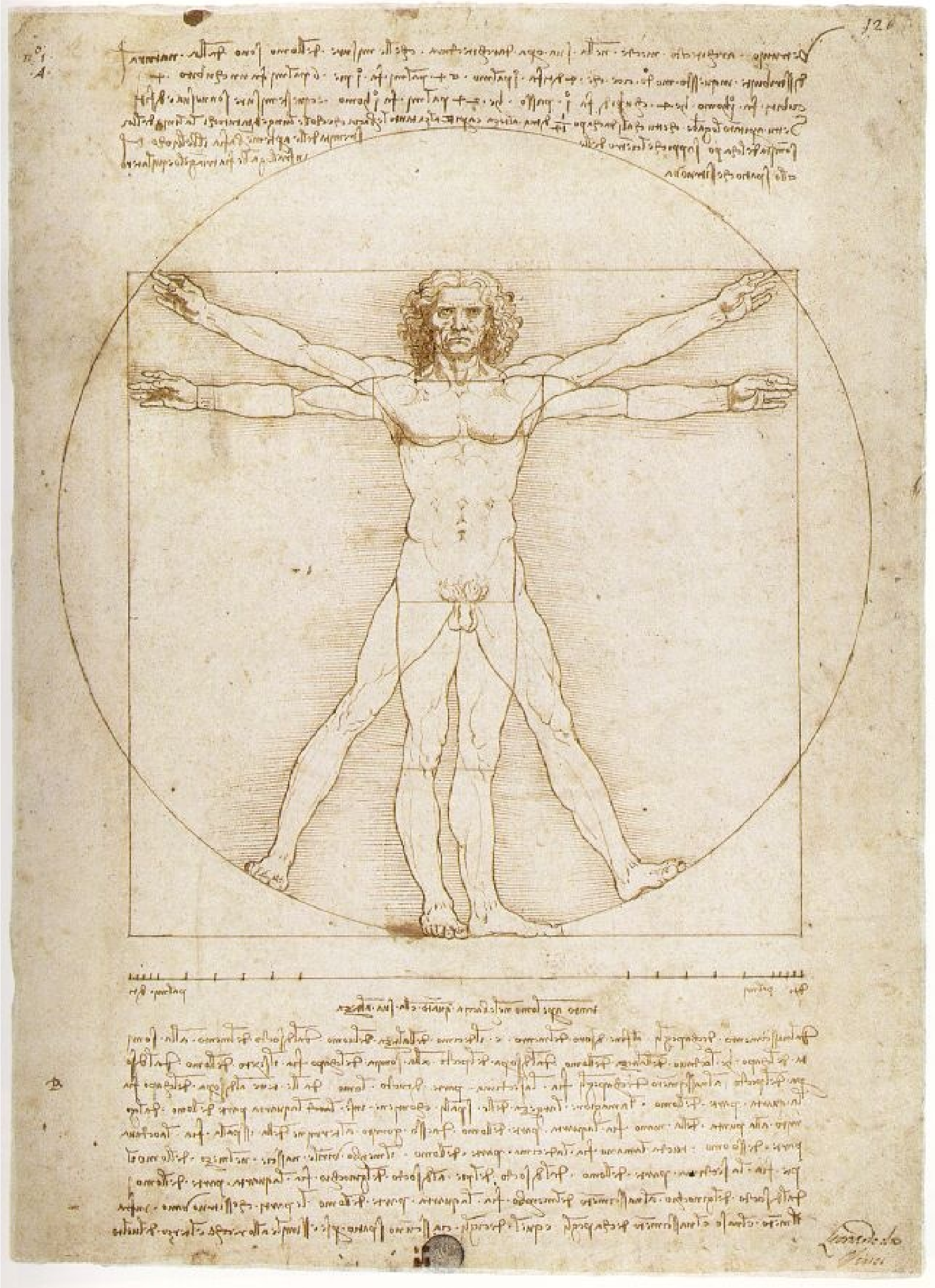
"Según el pitagórico Juto, [el mundo] se inflará, luego disminuirá, siempre más, como el mar que, en olas ondulantes, viene recubrir las playas con sus desbordamientos."

Simplicius[3]

La única cosa segura es que Aristóteles cita a los pitagóricos cuándo y cómo le conviene: usando de la misma retórica, ¿no podríamos hacer de Juto el padre de la teoría del universo en expansión? Quizás la animosidad manifestada por el estagirita hacia la aplicación de la analogía musical a la astronomía se origina en la misma aprobación de Platón, su eterno rival, que defiende el uso de la "armónica" (es decir: de la aritmética pitagórica), junto con la geometría, para el estudio del cielo. ¿No constituyen las proporciones musicales la única herramienta al alcance de los griegos que goce de una cierta comprobación en el mundo sensible? ¿No era, pues, natural, pasar de la cuerda tensada al universo entero, con la razonable hipótesis de que lo consonante aquí abajo pudiera mantenerse como una propiedad importante allá arriba?

---

1 "Acerca del cielo", Aristóteles, versión castellana de Miguel Candel, Editorial Gredos, Madrid, 1996.
2 Xouthos, "Les présocratiques" (p. 446), *in* "Physique", Aristote.
3 Xouthos, "Les présocratiques" (p. 446), *in* "Commentaire sur la Physique d'Aristote", Simplicius.



La Edad Media europea conoció las proporciones griegas, esencialmente, a través del “Timeo”, de Boecio y Macrobio, y de una versión abreviada del “De Arquitectura” de Vitruvio. Es interesante recordar la diferencia que Rudolf Wittkower afirmaba entre los usos renacentistas y medievales de tales fuentes: “El contraste entre la manera en que Villard de Honnecourt determina las proporciones de las figuras y el modo en que lo hace Leonardo es característico: el artista medieval tiende a proyectar una norma geométrica preestablecida sobre la imagen, mientras que el artista renacentista tiende a extraer una norma métrica a partir de los fenómenos naturales que le rodean”.

“Estudio de las proporciones, Vitruvio”, Leonardo Da Vinci, 1487. Texto: R. Wittkower.

Lo cierto es que, falta de documentos, ignoramos hasta qué punto los pitagóricos desarrollaron su analogía, y nada nos obliga a creer que esta significó "una zona de sombra en el racionalismo naciente". De hecho, la ciencia moderna utilizará el mismo recurso, con sus ecuaciones.

¿Y qué pensar de la importancia central de la memoria en el pensamiento pitagórico? Jámblico cuenta cómo los miembros de la secta se astreñían, al despertar, antes de levantarse, en recordar todo lo ocurrido la víspera. La curiosa anécdota, mil veces repetida y reinventada, según la cual Pitágoras se decía capaz de recordar sus vidas anteriores, ¿no será una de estas exageraciones tan habituales en aquellos tiempos aficionados a los mitos y leyendas? ¿ó será que la trasmigración de las almas, al igual que la armonía de las esferas, era de estos secretos que no podían salir de la secta, lo cual explicaría que no se hace mención de ello en ninguno de los fragmentos antiguos?

En cuanto a la fama de silencio y de secreto prestada a los pitagóricos, ¿no resultará simplemente de una medida de prudencia, adoptada tras la magna matanza que sufrieron en Metaponto, precisamente por haberse implicado excesivamente en la vida política de sus ciudades?

El oído, lleno de ecos zumbando, voluble, sociable, inmerso en la vida y la memoria, lo capta todo y todo lo recuerda. Pobre geómetra, se destaca en el cómputo de los tonos y latidos: instrumento hermético, tiene por alma el corazón. Secretario de lo discreto, registra sin parar los pasos del rumor del mundo.

El ojo, lleno de rayos y de agua, mudo, olvidadizo, retraído en la contemplación, capta lo que le toca, y mira sin tocar. Excelso geómetra, junta y separa, a su antojo, traza sus intangibles modelos: mecanismo sigiloso, sólo se tiene al horizonte. Celador impotente de la continuidad, se desliza sin reparo al infinito del cielo.

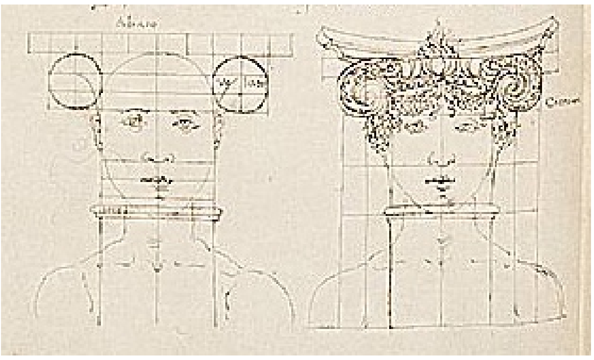
Pongamos un sabio, con su trabajada visión del mundo, en medio de una asamblea de músicos: ellos lo aturden, los ve irracionales, ellos no lo entienden, lo juzgan cerebral: en mi opinión, eso resume la mutua incomprensión entre Aristóteles y los pitagóricos, incomprensión que ha crecido y crecido, a través de los siglos, a medida que Europa olvidaba los fundamentos auditivos de su geometría, y que la música se encerraba en sus herméticas escuelas.

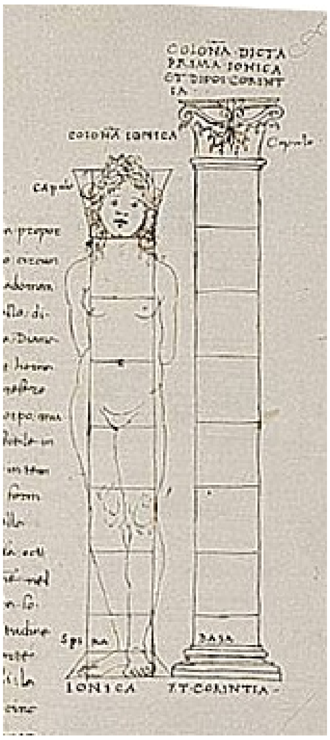
El gran escollo en el camino de la geometría sensible, lo hallaron los pitagóricos, precisamente cuando quisieron aplicar sus proporciones a la geometría, encontrándose de inmediato frente a la inconmensurabilidad. En efecto, el famoso teorema atribuido a Pitágoras muestra que la hipotenusa de un triángulo rectángulo isocelo de cateto unitario vale $\sqrt{2}$. A un nombre así, lo llamaron *alogos*, es decir, literalmente, que no se puede expresar como una fracción entre números enteros (es decir, en sus términos: como un *logos*).

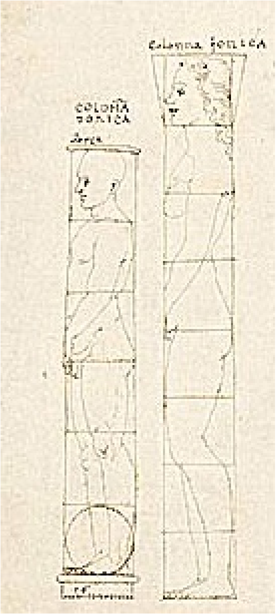
Hemos heredado de la tradición latina la desafortunada traducción de *rhetos* por "*racional*" y de *alogos* por "*irracional*". Al parecer, los primeros pitagóricos no se lo tomaron tan a la tremenda, y dedujeron simplemente que los números son más densos en la geometría que en la aritmética.

Ahora bien, tal afirmación, tan curiosa para nosotros, si no reparamos en la coexistencia de lo discreto y de lo continuo en la percepción, tal afirmación que sustenta la opinión, aun corriente en la actualidad, de que los griegos fueron mucho mejores en geometría que en aritmética, no levantó, sin embargo, la menor oposición en su época, ni siquiera despertó los sarcasmos del propenso Aristóteles, sino que fue recibida como una evidencia en toda la orbe helénica.

Mil años después de Pitágoras, Proclo afirma todavía que "la geometría constituye una rama de la matemática entera y ocupa el segundo rango tras la aritmética, porque está completada







"No es necesario extenderse demasiado para demostrar que en la historia del arte europeo se han utilizado dos tipos de proporciones: las proporciones de números alícuotas y las proporciones que no pueden expresarse aritméticamente, sino que se basan en figuras geométricas fundamentales, como triángulos y pentágonos. El primer tipo de proporción (aritmética) predominó durante el Renacimiento, mientras que en la Edad Media se utilizó más el segundo tipo (geométrica)."

"Resulta obvio que las proporciones irracionales habrían situado a los artistas del Renacimiento ante un dilema irresoluble, ya que la actitud renacentista respecto a la proporción se basaba en una nueva interpretación matemática y orgánica de la naturaleza, en la que todas las cosas se relacionaban entre sí mediante números (es decir, aritmética frente a geometría). No creo que sea ir demasiado lejos considerar la conmensurabilidad de las medidas como el punto nodal del arte del Renacimiento".

Estudios antropomorfos, "Tratado de arquitectura", Francesco di Giorgio Martini (siglo XVI). Texto: R. Wittkower.

y determinada por esta, pues todo lo que es *rhetos* y cognoscible en la geometría está determinado por razones aritméticas”[1]. Luego, recuerda que el elemento primero de la geometría, el punto, es menos puro que su equivalente aritmético, que carece de posición.

Es que la consideración del espacio geométrico implica la introducción de la continuidad, que choca con la aritmética discreta de los pitagóricos. Se levanta entonces una polémica, quizás la mayor que haya sacudido la filosofía griega, donde el papel de los eleatas (Parménides, Zenón y Mélisos) resulta determinante. Las paradojas de Zenón giran en torno a la imposibilidad de lo múltiple, que implicaría necesariamente la muy problemática existencia del vacío, y concluye con la consiguiente imposibilidad del movimiento:

“Lo que se mueve no se mueve ni en el lugar donde se halla, ni en el lugar donde no está”
[Diógenes Laercio][2]

Para nosotros, tales problemas se resuelven mediante una teoría de los límites, la cual implica una aritmética continua, con la introducción de los números reales. Sin embargo, mil años de dificultades y de polémicas no convencieron a los helenos de salvar este paso. Observemos cómo Proclo resume la situación, en el extremo final de la era helenística:

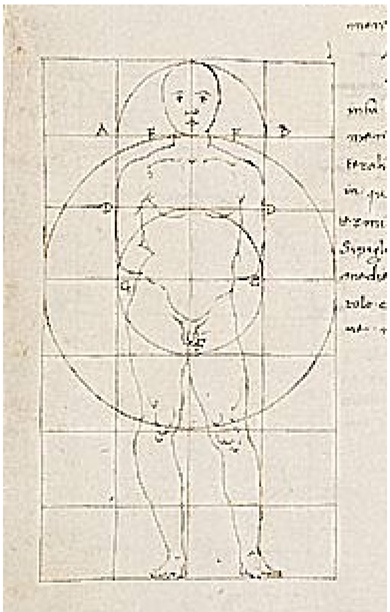
“Si examinamos los principios de la sustancia matemática todo entera, los vemos reducirse a los que, esparcidos en todas las cosas que son, las engendran a todas por sí mismos, es decir: lo finito y lo infinito. En efecto, es por estos dos primeros principios, que surgen después de la causa del Uno, la cual es inexplicable e incomprensible, que todas las demás cosas y la naturaleza de las matemáticas están constituidas. Aquellos principios producen estas cosas colectivamente y separadamente; avanzan las unas en las medidas que les convienen, emprenden su progresión en un orden notable y establecen otras primeras, otras intermedias y otras últimas. Pues las generaciones inteligibles tienen primitivamente parte en lo finito y lo infinito por su simplicidad; reciben de lo finito su cumplimiento en razón de su unificación, de su identidad, de su existencia estable y firme, y gozan de lo infinito en razón de su división en pluralidad, de su facultad generadora, de su maravillosa diversidad y de su incremento; mientras que las generaciones matemáticas han nacido de lo finito y de lo infinito; no sólo de los principios más primitivos ni de los principios inteligibles y latentes, sino de los que proceden de estos últimos en segundo orden y bastan para producir entre sí las disposiciones intermedias de los seres y la diversidad que hay en ellos. Es por eso que, en las generaciones matemáticas, las relaciones se siguen al infinito, pero son retenidas a causa de lo finito; porque el número que empieza por la unidad goza de un incremento incesante; mientras que el número que elegimos es siempre finito. Por otra parte, la división de las magnitudes al infinito es también admisible; pero todas las cosas divididas son terminadas, y las partes del todo son finitas efectivamente.

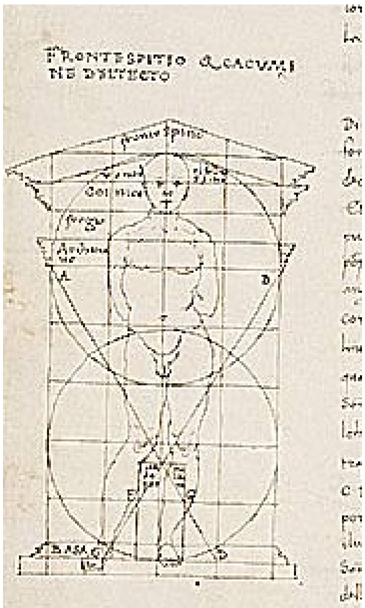
Si, por una parte, el infinito no existiera, todas las magnitudes serían conmensurables, ninguna sería inexpresable ni *alogos*, - hechos por los cuales las magnitudes en geometría parecen diferir de las mismas en aritmética, - y los números no podrían enseñar la potencia fecunda de la unidad ni poseer todas las relaciones que existen entre ellos, en particular las relaciones múltiples y superparciales; pues cada número cambia de relación con la unidad y se enfrenta al número que lo precede.

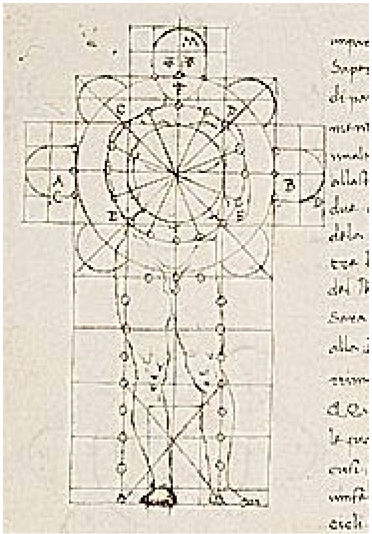
Si, por otra parte, hiciéramos desaparecer lo finito, la conmensurabilidad, la asociación de las relaciones, la identidad y la igualdad de las formas y todo lo que hay de mejor en cuanto a relación no aparecerían en las matemáticas, y no habría ni ciencias ni percepciones durables y exactas de estas.

---

1 “Les commentaires sur le premier livre des éléments d’Euclide”, Proclus de Lycie, versión francesa de Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.
2 Zénon, “Les présocratiques”(p. 292), *in* “Vies”, Diogène Laërce.







"Antes de explicar los tres tipos de medias, Alberti analiza la correspondencia entre los intervalos musicales y las proporciones arquitectónicas. En referencia a Pitágoras, afirma que *los números que hacen que las concordancias sonoras produzcan placer en nuestros oídos son exactamente los mismos que deleitan nuestra vista y nuestra mente*; esta doctrina se convirtió en fundamental para toda la concepción renacentista de la proporción. Alberti prosigue: ***Tomaremos por tanto todas nuestras reglas para las relaciones armónicas de los músicos, que conocen perfectamente todo este tipo de números, y de aquellas cosas concretas en las que la Naturaleza revela completamente toda su excelencia***".

Este programa más bien torpe de Alberti - y el consiguiente análisis de Rudolf Wittkower – resultan bien pobres: veremos que la relación entre música y arquitectura fue mucho más profunda en el Renacimiento, a través de la perspectiva central, y de la misteriosa proposición VII-129 de Pappo...

Estudios antropomorfos, "Tratado de arquitectura", Francesco di Giorgio Martini (siglo XVI). Texto: R. Wittkower.

Ambos principios convienen luego a las matemáticas de la misma manera que a las otras especies de seres. No obstante, las especies de último rango, entregadas a la materia, completamente formadas por la naturaleza, parecen gozar por sí mismas de ambos principios: de lo infinito desde el punto de vista del emplazamiento deparado a las formas, y de lo finito desde el punto de vista de las relaciones, de las figuras y de las formas."

Proclo[1]

Este texto afirma muy sutilmente la relatividad matemática (basada en aquellos "principios de segundo orden que bastan para producir entre sí las disposiciones intermedias de los seres y la diversidad que hay en ellos") y la coexistencia de lo discreto (lo finito) y de la continuidad (lo infinito). Se enuncia una advertencia clarividente hacia la futura geometría diferencial, la cual, por su paso a lo infinitesimal (la "división al infinito") hará ya imposible toda "*percepción* durable y exacta" de sus "relaciones, figuras y formas",...

Si los griegos se negaron a concebir los números reales, fue precisamente por su rigor experimental (¡del cual tantas veces han sido acusados de carecer, por los mismos que les reprochan luego la limitación de su aritmética!): nunca quisieron dejar atrás lo que habían aprendido de la cuerda tensada y de sus divisiones, porque nunca se resignaron a abstraer sus matemáticas más allá de la percepción auditiva y visual, negándose a hacer de ellas otra cosa que un magnífico apoyo a su observación del mundo.

Para los helenos, la aritmética *es* el oído, la geometría *es* el ojo; ambos sentidos se articulan en la observación, pero sin nunca confundirse...

Campanas suspensas que retienen los ecos, esferas húmedas afines a la luz,
captan lo que les toca, y todo lo recuerdan,
sin tocar (pero los ojos emiten rayos).
Herméticos mecanismos, instrumentos sigilosos,
juntan los tonos, distinguen los latidos,
trazan el cómputo de modelos intangibles.
Continuamente, discretamente, registran y deslizan,
sin reparo, sin parar, los pasos y las figuras del problema sin fin,
convertidos por la imposible evidencia
de su relación, orbes nunca vistas, cuevas inauditas,
por un misterio sin duda, quizás por algún sabio,
en huellas humanas intuibles, de algún modo, conmensurables.

Eratóstenes de Cirena (276-196 a. C.), famoso por su medición de la circunferencia terrestre, y autor de un "De locis ad mediades" hoy perdido como toda su obra, afirmaba, según Proclo, que la *proporción es el vínculo que une las matemáticas*. Para llegar a esta conclusión, que resume para nosotros todo el pensamiento científico de los griegos, y luego de Europa, hasta el siglo XVII, hacía falta primero generalizar la definición de la proporción, más allá de la "relación entre magnitudes conmensurables", o de la "consonancia de las partes entre sí y de las partes con el todo" (según la linda expresión empleada por Erwin Panofsky), es decir: más allá de los solos intervalos discretos de la música.

De esta lenta generalización, la obra de Euclides ofrece un ejemplo notable: no sólo escribió unos "Elementos de música" (hoy perdidos), al lado de sus famosos "Elementos de geometría", sino que estos mismos incluyen dos libros dedicados a *una teoría generalizada de la proporción* (libros V y VI), que merecerían un estudio aparte, como la obra posterior de Arquímedes.

[1] "Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide", Proclus de Lycie, versión francesa de Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

En el arte bizantino o “bizantinizante”, tres círculos concéntricos en progresión aritmética permiten determinar enteramente la cara humana. Sobre ello, Erwin Panofsky observaba:

“Esta reducción de las dimensiones verticales y horizontales de la cabeza a una sola unidad hace posible un procedimiento que revela de modo muy evidente la tendencia medieval a la esquematización planimétrica: esto es, un procedimiento por el cual no sólo las dimensiones, sino las formas incluso podían ser establecidas *geometrico more*”.

A pesar de reducirlo todo al círculo, el primero de los esquemas visuales elementarios, el arte venido de Bizancio no tenía nada de infantil. Todo lo contrario. Estudiemos, para convencernos, el dibujo de los niños...

El “esquema de tres círculos” del arte bizantino y bizantinizante. Texto: Erwin Panosky.

Afortunadamente, no es nuestro cometido aquí zanjar entre la matemática unificada en torno a la proporción que estos esfuerzos indican, y las matemáticas articuladas en una aritmética y una geometría irrevocablemente diferenciadas que defenderán Nicómaco y Proclo: en efecto, este problema teórico pierde toda importancia en las artes aplicadas, en la escultura de Policleto o en la arquitectura del Partenón, obras singulares que han llevado hasta nosotros el prestigio de la teoría helénica de la percepción, y de las proporciones.

* * *

El intelecto tiene la vista y el intelecto oye;
pero fuera de él todo es sordo y ciego
Epicarmo [Plutarco][1]

No contentos de haber elevado las matemáticas desde el papel puramente utilitario que les reservaban egipcios, caldeos o fenicios hacia una rigurosa construcción perceptiva, los filósofos griegos quisieron unirlas en el intelecto, y *devolverlas* al reino del Alma, arrancándolas finalmente al mismo mundo sensible donde los pitagóricos las habían cobijado y criado.

En toda su obra, Platón sólo menciona dos veces a los pitagóricos: una simple alusión en el libro X de "La República", y otra más importante en el libro VII. Allí, explica que dos especies de movimientos saltan a la vista: una ha fijado la mirada con relación a la astronomía, otra el oído con relación al movimiento armónico. "Hay por lo tanto dos ciencias, hermanas una de otra, como lo dicen los pitagóricos, así como nosotros también convenimos". Pero a continuación, critica "los que causan a las cuerdas mil molestias, que las torturan mediante claves", porque "unos pretenden discernir por el oído una diferencia, promedio entre dos tonos, que es el menor intervalo [la coma], del cual hay que servirse para medir; los otros lo niegan y pretenden que es igual a los sonidos anteriormente emitidos: unos como otros dan a los oídos la preeminencia sobre el intelecto"[2].

Lo que Platón critica aquí, no es la excesiva sensibilidad de las matemáticas pitagóricas, sino el hecho que la secta itálica se quedara siempre al nivel de estas matemáticas: la solución del ateniense consiste, de hecho, en introducir la dialéctica. Aristóteles no dice otra cosa cuando, en su "Metafísica" concede que "los que llamamos pitagóricos se interesaron los primeros en las matemáticas y las hicieron progresar. Como se habían criado en esta ciencia, creyeron que sus principios eran los principios de todas las cosas; como los números son por naturaleza los primeros de los principios matemáticos, es en los números que pensaban ver numerosas similitudes con los seres eternos y con las criaturas sometidas al devenir"[3]. Proclo dirá luego que Pitágoras "examinó desde arriba los principios de la geometría y buscó sus teoremas de una manera inmaterial e intelectual"[4]. Finalmente, Hegel se referirá al paso de los milesios a los pitagóricos, en sus "Lecciones sobre la historia de la filosofía", afirmando que "la filosofía pitagórica representa la transición de la filosofía realista a la filosofía intelectual"[5].

Desde luego, hay en todo eso una gran contradicción, que sólo puede explicarse por el origen puramente visual de todos estos pensadores: para el ojo, en efecto, el sonido es "inmaterial", porque no se ve; la filosofía auditiva sería pues a la vez demasiado sensible (pone el oído por encima del intelecto) y tremendamente intelectual (habla de cosas invisibles). En mi opinión, el gran sistema hegeliano, en particular, se cae patas arriba cada vez que se acerca a la

---

[1] Épicharme, "Les présocratiques"(p. 200), *in* "De la fortune d'Alexandre", Plutarque.
[2] "Œuvres complètes", Platon, versión francesa de Léon Robin, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1989.
[3] "Metafísica", Aristóteles (p.34), edición trilingüe por Valentín García Yebra, Editorial Gredos, 1998.
[4] "Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide", Proclus de Lycie, versión francesa de Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.
[5] "Lecciones sobre la historia de la filosofía", G. W. F. Hegel, versión castellana de Wenceslao Roces, Fondo de Cultura Económica, México, 1955.

En los dibujos infantiles, las formas redondas y angulares se yuxtaponen y solapan con mucha variedad e invención. ¿Cómo se llega a eso?

Dibujos de niños recogidos por Rudolf Arnheim.

música, que Hegel consideraba, como su época en general, como el arte más inmaterial, más "abstracto": ¡como si el arco iris fuera más concreto que una vibración sonora!

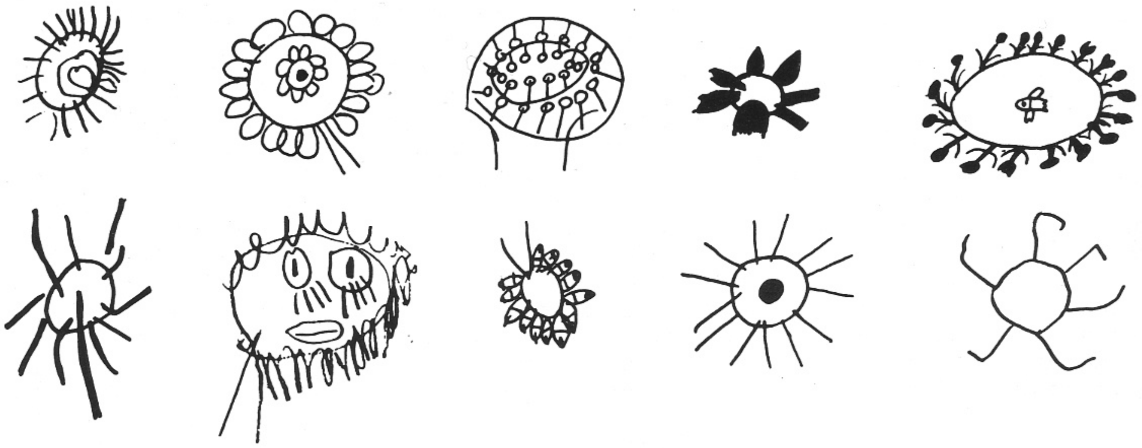
Por lo que sabemos de ellos, los pitagóricos nunca se "abstraían" sin llevar consigo a sus oídos, hasta el firmamento, hasta la geometría: no fueron ellos, pues, quienes pudieron sentir la necesidad de dar otro paso, fuera del mundo sensible, para afirmar sus matemáticas. Fueron, obligatoriamente, sus oponentes, los pensadores puramente visuales, quizás los milesios, Epicarmo, los eleatas, y, ya más claramente, Platón, Aristóteles, y finalmente Proclo. Deberíamos, luego, volver a interrogar el pensamiento visual, desde sus orígenes, como lo hemos hecho con el pensamiento auditivo. Pero surge un problema. Los pitagóricos, con sus propuestas polémicas, hicieron correr chorros de tinta y, a pesar de que no se haya conservado ningún tratado suyo, podemos con relativa facilidad rastrear el origen y el desarrollo de sus reflexiones. No pasa lo mismo con el pensamiento puramente visual, probablemente porque fue mejor recibido: apenas sabemos nada de los milesios, por ejemplo, y, cuando empiezan a fluir los argumentos característicos de esta manera de pensar, ya está en auge la filosofía sistemática de Platón y Aristóteles, la cual, por su naturaleza, no se deja nunca interpretar linealmente...

Sin embargo, a través de Platón y de Proclo, en especial, podemos intuir el problema fundamental que debió surgir muy tempranamente, desde las primeras indagaciones geométricas. De hecho, esta disciplina trabaja inmediatamente con figuras elementales (el círculo, la esfera, la línea recta, el ángulo recto, el triángulo,...) que no se encuentran nunca realizadas perfectamente en la naturaleza. ¿De dónde llegaron, pues, a nuestro conocimiento, si no es de un dios, o de la parte divina del alma humana? Por otra parte, es imposible abstraer la geometría del mundo visible, pues sus operaciones son exactamente las que se pueden realizar ante el ojo, con la regla y el compás. Por lo tanto, la geometría ha de ocupar un espacio intermedio entre la percepción y la intelección pura. Pero desde allí, pide otra matemática, más depurada, que explique sus principios. Por eso, Proclo la pone por debajo de la aritmética, debido a su dependencia del espacio: las figuras geométricas tienen una posición, al contrario de las nociones aritméticas. Pero esta aritmética necesita a su vez de una ciencia más pura, la dialéctica, que define los procedimientos de sus demostraciones,... Se crea así una jerarquía entre las ciencias, desde las más terrenales (como la geodesia o la mecánica) hasta la más depurada de todas, la ontología.

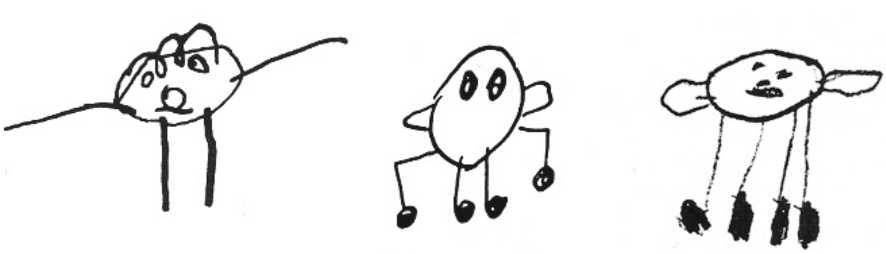
Ahora bien, si un músico se atreviera a poner en duda esta magnífica construcción, ayer como hoy, le tirarían piedras: los griegos lo hicieron con los pitagóricos, y nuestros contemporáneos probablemente harían lo mismo, ya que vivimos en una civilización "eminentemente visual", que "sacraliza las imágenes", y donde la verdadera música, la que piensa y progresa, ocupa un lugar diminuto, ciertamente "muy interesante", pero peligroso, propenso a lo irracional, lo inmaterial, lo improductivo, y que debe por lo tanto permanecer apartado.

Sin embargo, el siglo XX nos ofreció un verdadero pequeño milagro, desde el ambiente menos esperado: varios psicólogos se preguntaron, seriamente, sin prejuicios, de dónde vienen las imágenes. Y el resultado de sus investigaciones pone patas arriba el viejo sistema. En "Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim expone muy claramente estas indagaciones, y las conclusiones que implican. Me parece esencial citarlo aquí muy extensamente: aunque parezca desbordar un poco nuestro tema, no sale nunca de la geometría sensible, a la cual ofrece firmes fundamentos, allá mismo donde más los necesita. Tras este acercamiento, el lector, formado como todos nosotros en los "liceos", "ateneos" y otras "academias" de la enseñanza occidental, donde le inculcaron como verdades primeras los mitos y leyendas del cientificismo europeo, y de sus raíces griegas, quizás deberá realizar su propia revolución copernicana...

"Mucho de cuanto en este libro se afirma acerca de la percepción y la representación visuales es válido también para el comportamiento humano en su extensión más amplia. La tendencia a la forma más simple, por ejemplo, gobierna las actividades del organismo a un nivel fisiológico y psicológico tan básico, que importa poco el país o período histórico del que tomemos nuestros ejemplos humanos. Sin embargo, ni siquiera dentro de un panorama tan



Al principio, nacen formas más o menos redondeadas, que suelen significar la compacidad, la presencia de algo, su densidad. No la redondez: esta noción sólo puede venir más tarde, por diferenciación, cuando aparecen las líneas más o menos rectas. Y estas, al principio, suelen radiar de las formas redondas, como si se tratara de evitar romper la perfecta simetría, en todas las direcciones. Los dibujos de arriba representan: un *diseño puro*, una *flor*, un *árbol*, un *tocado*, un *estanque*, un *árbol con sus ramas*, una *cabeza*, una *mano*, un *sol* y - en un esquema que no hubiese desdeñado Villard de Honnecourt - un *hombre corriendo*. Durante mucho tiempo, el círculo seguirá significando más que la redondez. Así en los llamados *renacuajos* (abajo), personajes, al parecer, desprovistos de cuerpo. No así para su autor, para quien el círculo dibujado no es solamente la cabeza, sino todo el cuerpo: sólo se representan las partes visualmente esenciales, como en los animales de la cueva de Lascaux...



Dibujos de niños recogidos por Rudolf Arnheim.

general sería lícito pasar por alto ciertas diferencias características en el manejo de los esquemas visuales, diferencias que reflejan los sucesivos estadios del desarrollo mental.

Esos estadios de desarrollo se manifiestan en su forma más pura y completa en el arte de los niños. Pero encontramos analogías llamativas con el arte infantil en las fases tempranas del llamado arte primitivo de todo el mundo, y aun en lo que sucede cada vez que un principiante de no importa qué edad o lugar se inicia en un medio artístico. Es obvio que hay diferencias importantes entre las actitudes y productos de niños occidentales y niños esquimales, de niños listos y tontos, bien atendidos y desatendidos, habitantes educados de las ciudades y cazadores salvajes, pero también aquí será útil para nuestros propósitos hacer mayor hincapié en las semejanzas que en las diferencias.

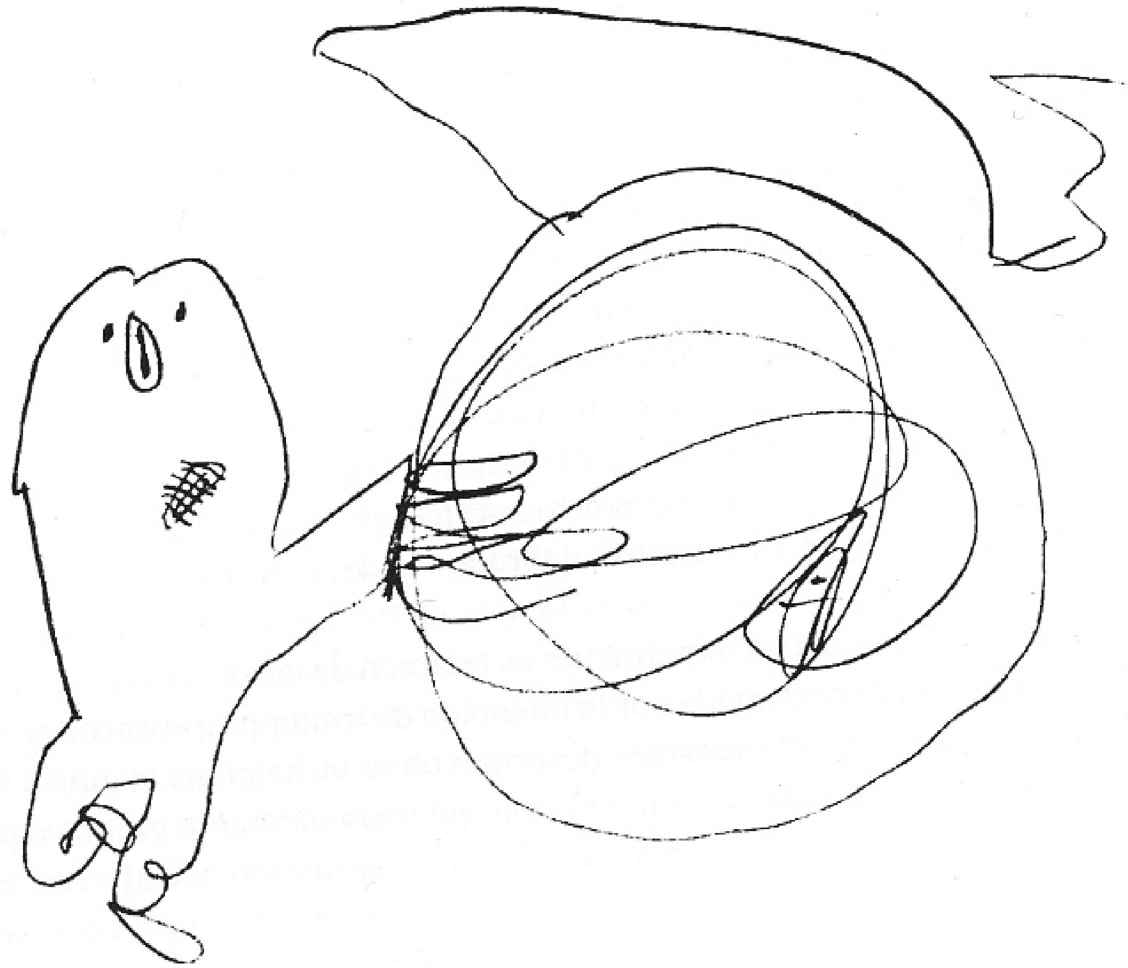
Las formas tempranas de representación visual nos llaman la atención no sólo porque poseen un interés pedagógico evidente, sino también porque todos los rasgos fundamentales que operan de maneras refinadas, complicadas y modificadas en el arte maduro despuntan ya con claridad elemental en las imágenes hechas por un niño o un bosquimano. Lo dicho vale para las relaciones entre forma observada y forma inventada, para la percepción del espacio en relación con los medios bidimensionales y tridimensionales, para la interacción de comportamiento motor y control visual, para la conexión estrecha entre percepción y conocimiento, etcétera. No existe, pues, introducción más esclarecedora al arte del adulto que una ojeada a las manifestaciones tempranas de aquellos principios y tendencias que han de gobernar siempre la creación visual.

¿Por qué dibujan así los niños?

Desde el principio hemos insistido en que no podemos aspirar a comprender la naturaleza de la representación visual si intentamos deducirla directamente de las proyecciones ópticas de los objetos materiales que integran nuestro mundo. Las pinturas y esculturas de cualquier estilo poseen propiedades que no es posible explicar como meras modificaciones de la materia bruta perceptual que se recibe a través de los sentidos.

Lo que decimos vale también para la secuencia de estadios en que se desarrolla típicamente la forma representativa. Si aceptáramos como punto de partida de la experiencia visual las proyecciones ópticas aportadas por las lentes oculares, lo lógico sería esperar que los primeros intentos de imaginería siguieran muy de cerca esas proyecciones. Claro está que no ostentarían mayor semejanza con sus modelos de la que permitiesen una capacidad de observación y una destreza técnica limitadas, pero la imagen pretendida, la que se trasluciera a través de esos intentos, sería sin duda la de la proyección óptica Esperaríamos que toda desviación de ese modelo fuera una innovación posterior, reservada a la libertad de la sofisticación madura. Pero sucede todo lo contrario.

Los primeros dibujos de los niños no presentan la conformidad prevista a la apariencia realista ni las proyecciones espaciales esperadas. ¿Que explicación dar a esto? Ya que se daba por sentado que, para los seres humanos normales, los perceptos visuales no podían ser otra cosa que proyecciones fieles, había que encontrar una razón de la desviación. Se sugirió, por ejemplo que los niños son técnicamente incapaces de reproducir lo que perciben. Lo mismo que no son capaces de acertar en la diana con un arma de fuego porque carecen de la mirada concentrada y el pulso firme del tirador adulto, así también sus ojos y sus manos carecen de la habilidad necesaria para trazar las líneas debidas con un lápiz o un pincel. Pues bien, es totalmente cierto que los dibujos de los niños pequeños manifiestan un control motor incompleto; sus líneas siguen a veces un curso errabundo en zigzag y no se unen exactamente donde debieran. Casi siempre, sin embargo, son lo bastante precisas para indicar lo que el dibujo quiere ser, sobre todo para el observador que compare muchos dibujos del mismo tipo. Además, a una edad temprana la imprecisión primera del trazo da paso a una exactitud que es más que suficiente para mostrar lo que el niño pretende. Compárense esas formas tempranas con los dibujos de un aficionado inexperto que intente copiar fotografías o cuadros realistas y se verá la diferencia fundamental.



Una niña de cuatro años dibujó este *hombre cortando el césped*. La cortadora es un remolino, no sólo por la apariencia visual que deja cuando funciona, sino porque la niña, dibujando, iba imitando su movimiento, gestualmente: el dibujo como trazado, como estructura temporal. Todo lo contrario del esquema bizantino antes mostrado, pura estructura, esta, fuera-del-tiempo.

Dibujos de niños recogidos por Rudolf Arnheim.

Invitamos al lector a que se ponga un lápiz en la boca o entre los dedos de los pies y copie una representación realista de una oreja humana. Tal vez las líneas le salgan tan torcidas que resulten totalmente irreconocibles; pero si el dibujo es aceptable, aun así diferirá fundamentalmente del que suele hacer el niño para representar una oreja, a base de dos círculos concéntricos, uno para el borde exterior y otro para el agujero de dentro. Ninguna falta de destreza motora puede explicar esa diferencia de principio.

Otros teorizadores han sostenido que los niños tienden a hacer líneas rectas, círculos y óvalos porque esas formas simples son relativamente fáciles de dibujar. Esto es totalmente cierto, pero no nos dice nada de cuál sea el proceso mental que induce a los niños a identificar objetos complejos con esquemas geométricos que no es posible interpretar como imágenes proyectivas simplificadas.

Ni cabe tampoco aducir la falta de interés o el descuido en la observación. Los niños observan con una agudeza que deja en mal lugar a muchos adultos; y nadie que haya visto la expresión de fascinación absorta que hay en sus ojos o la intensa concentración con que dibujan o pintan aceptará una explicación basada en la negligencia o la indiferencia. Es cierto que, hasta determinada edad, si se pide al niño que retrate a su padre, hará poco uso del hombre concreto que tiene ante sí como modelo. Ese comportamiento, sin embargo, no demuestra que el niño no quiera o no pueda fijarse en su entorno; si hace caso omiso del modelo, es sencillamente porque no necesita ni le sería útil más información para lo que él considera un dibujo correcto de un hombre.

Vienen después esas explicaciones que son poco más que juegos de palabras, como la afirmación de que los dibujos de los niños son así porque no son copias sino "símbolos" de las cosas reales. El término "símbolo" se utiliza hoy día tan indiscriminadamente que es lícito aplicarlo cada vez que una cosa hace las veces de otra. Por lo mismo carece de valor explicativo, y se debería evitar. No hay manera de averiguar si una afirmación tal es correcta, errónea o si no es ni siquiera una teoría.

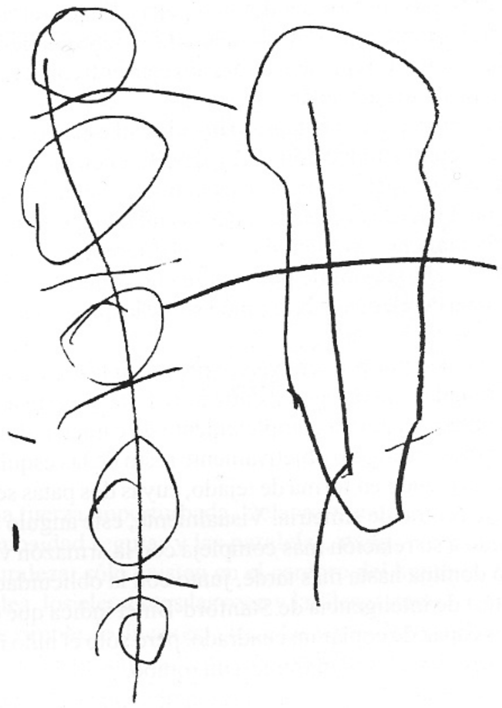
La teoría intelectualista

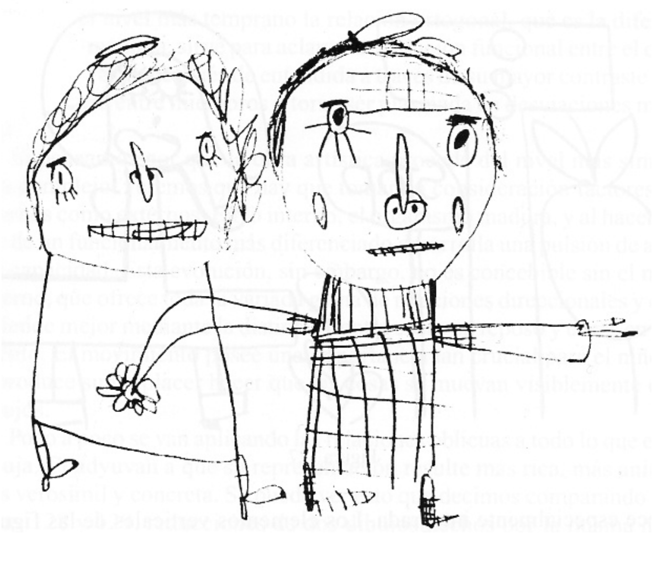
La explicación más antigua, y aun hoy la más difundida, del dibujo de los niños es la que afirma que, puesto que éstos no pintan lo que se supone que ven, debe intervenir en su acción alguna otra actividad mental además de la percepción. Es evidente que los niños se limitan a representar las cualidades genéricas de los objetos: la rectitud de las piernas, la redondez de la cabeza, la simetría del cuerpo humano. Estos datos pertenecen al conocimiento generalizado, y de ahí la famosa teoría que sostiene que "el niño dibuja lo que sabe más que lo que ve".

Ahora bien, el conocimiento se puede entender de varias maneras. Muchas veces la producción de imágenes no se basa, de hecho, en lo que los ojos están viendo en el momento en que se hace la imagen. En lugar de eso, el dibujante se apoya en una síntesis de sus muchas observaciones anteriores de determinada clase de cosas, ya se trate de caballos, árboles o figuras humanas. A este proceso se le puede, en efecto, calificar de dibujo a partir de un conocimiento, pero es un conocimiento que no sería lícito tomar como alternativa al hecho de ver.

La teoría intelectualista afirma que los dibujos infantiles, igual que otros tipos de arte en sus estadios tempranos, dimanan de una fuente no visual, a saber de conceptos "abstractos". Con el término abstracto se pretende hacer referencia a un conocimiento no perceptual. Pero, hemos de preguntar, ¿en qué otro ámbito de la actividad mental puede habitar un concepto si se lo excluye del de las imágenes? ¿Se apoya el niño en conceptos puramente verbales? Tales conceptos existen; por ejemplo, el de la "cinquidad" en la afirmación "la mano tiene cinco dedos". El niño posee, en efecto, ese conocimiento verbalmente, y al dibujar una mano cuenta los dedos para estar seguro de que son los que deben ser.

Mejor dicho, eso es lo que ocurre cuando el niño ha sido puesto sobre aviso en cuanto al número correcto de dedos. Su proceder habitual es justamente el contrario. Normalmente, en su





Una etapa posterior: los niños se basan ahora en una armazón básica de verticales y horizontales. El dibujo, así, se desarrolla, sin que se pierdan los logros anteriores: círculos y rectas se van organizando, ahora, en un espacio puramente bidimensional (algunos niños dibujan, dentro de un personaje que acaba de comer, el contenido de su estómago, pero no lo ven como un corte, sino como una posibilidad del dibujo plano, la misma que aprovecharon tantas veces los manuscritos medievales).

Dibujos de niños recogidos por Rudolf Arnheim.

trabajo el niño sí se apoya en conceptos, pero es en conceptos visuales. El concepto visual de una mano se compone de una base redonda, la palma, de la cual brotan los dedos como radios rectos a la manera de los rayos del sol, siendo su número determinado, según hemos de ver, por consideraciones puramente visuales.

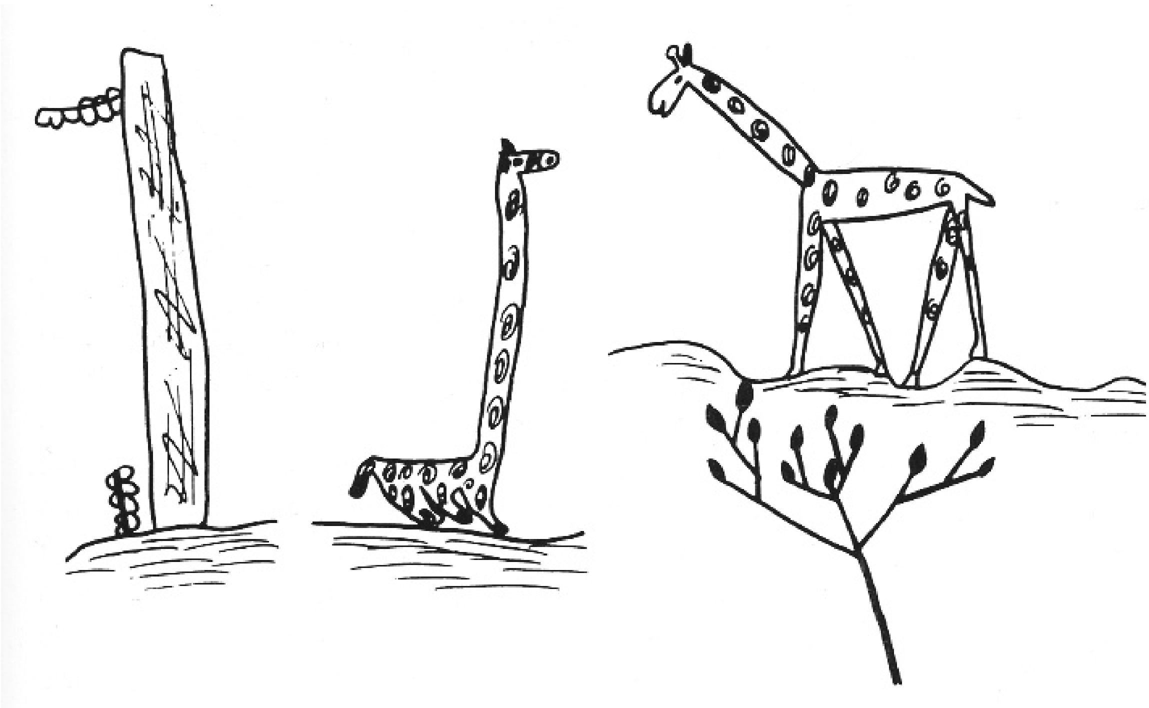
La vida mental de los niños está íntimamente ligada a su experiencia sensorial. Para la mente joven, las cosas son lo que parecen a la vista, son como suenan, se mueven o huelen. Si es verdad que en la mente del niño hay conceptos no perceptuales, deben ser muy pocos, y su influencia sobre la representación pictórica forzosamente será insignificante. Pero aun en el caso de que el niño tuviera conceptos no perceptuales de la redondez, la rectitud o la simetría - ¿y quien está dispuesto a decirnos de qué podrían estar hechos tales conceptos? -, habría que preguntarse cómo podrían traducirse a forma visual.

Y no sólo eso, sino: ¿de dónde procederían tales conceptos? Si procedieran de experiencias visuales, ¿hemos de creer que la materia bruta primariamente visual es procesada hasta la "abstracción" no visual, para ser luego retraducida a forma visual cuando se trata de producir imágenes? O también, si estos conceptos les son transmitidos a los niños por sus mayores, y a los primitivos por las convenciones culturales, ¿cómo sería posible hacer esa transmisión por vías no visuales?

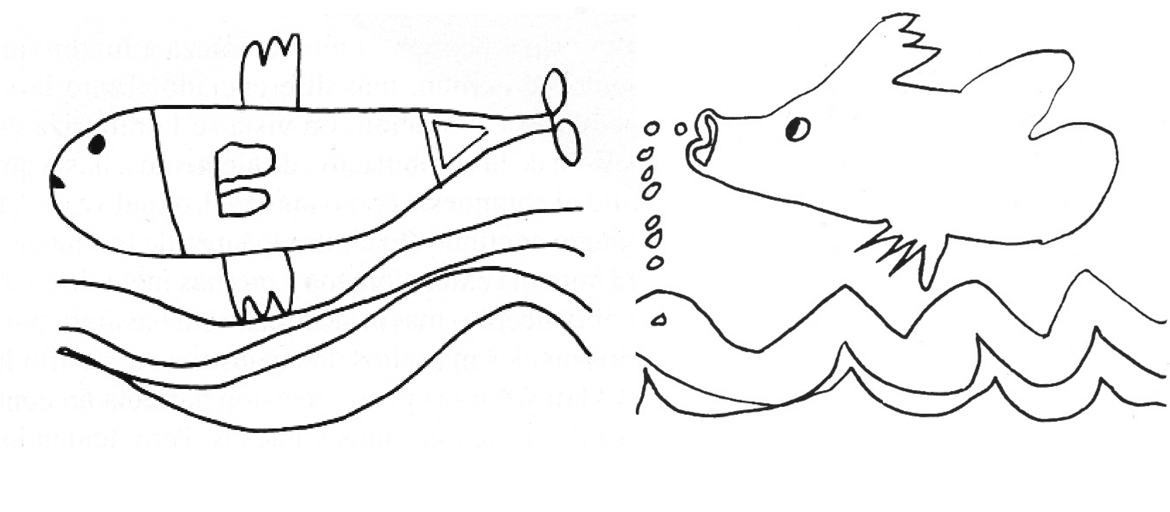
La especulación psicológica ha fiado mucho en las posibilidades del tacto. Partiendo del supuesto de que la percepción visual se basa en la proyección óptica, se consideraba al sentido de la vista incapaz de comunicar una imagen fiel de cómo son realmente las cosas tridimensionales. Ese conocimiento tenía que venir, pues, del sentido del tacto. El razonamiento era el siguiente: el tacto no depende de proyecciones transmitidas por la luz a través del espacio vacío; se apoya en el contacto directo con el objeto, se aplica desde todos los lados. Se puede confiar en que suministre una información objetiva.

La hipótesis parecía razonable, y de hecho no se puede dudar de la efectiva interacción del tacto y la vista en todos los estadios del desarrollo humano. Pero la prioridad del tacto o "comportamiento motor" es otra cuestión. Parece ser una mera suposición, sin pruebas que la respalden. El psicólogo de niños Arnold Gesell afirmaba hace años que "la prensión ocular precede a la manual", y escribía: "La naturaleza ha dado máxima prioridad al sentido de la vista. Seis meses antes del nacimiento, los ojos del feto se mueven desordenada e independientemente bajo sus párpados soldados. Con el tiempo llegan a moverse al unísono, de modo que el niño nace con dos ojos ya parcialmente acoplados en un solo órgano... El recién nacido toma posesión del mundo con los ojos mucho antes de hacerlo con las manos, lo cual es un hecho extraordinariamente significativo. Durante las ocho primeras semanas de la vida, las manos permanecen casi siempre cerradas, mientras los ojos y el cerebro están muy atareados mirando, fijando la vista, buscando y, de una manera rudimentaria, aprehendiendo". Recientemente, T. G. R. Bower ha sugerido mediante algunos ingeniosos experimentos que los recién nacidos averiguan que los objetos materiales son sólidos y tangibles a través de la experiencia visual, no a través de un apoyo primario en el tacto.

Lo dicho no ha de sorprender si se piensa que aprehender la forma de un objeto mediante el tacto no es en modo alguno más sencillo o directo que hacerlo mediante la visión. Ciertamente hay una distancia material entre los ojos y la caja que ven, mientras que las manos están en contacto directo con ella. Pero la mente no participa de ese carácter directo del contacto exterior; depende por entero de las sensaciones suscitadas en los órganos sensoriales. Cuando las manos exploran la caja, se estimulan los corpúsculos táctiles de la piel, independientes unos de otros. Es el cerebro el que ha componer la imagen táctil de una superficie, una forma o un ángulo, como es él el que debe crear la imagen visual a partir de una multitud de estimulaciones retinianas. Ni el tamaño material ni la distancia le son dados directamente al sentido del tacto. Todo lo que el cerebro recibe son mensajes acerca de las extensiones y contracciones musculares que se producen cuando la mano avanza para coger un objeto o palpa una esquina. Cuando una persona se mueve por el espacio, su cerebro es informado de una serie de movimientos sucesivos de las



Ambas girafas (arriba) han sido dibujadas por el mismo niño, a un año de distancia. Una vez adquiridas las nociones de vertical y horizontal, las oblicuas han surgido como tales, por diferenciación. El dibujo del árbol se ha desarrollado mucho. Ambos peces (abajo) también son de un mismo autor, que ha aprendido a fusionar las partes, para desarrollar un arte de la línea, perdiendo, sin embargo, precisión en la estructuración: algo se gana, y algo se pierde.



Dibujos de niños recogidos por Rudolf Arnheim.

piernas. En esas sensaciones no se incluye el espacio mismo; para experimentarlo cinestésicamente, el cerebro tiene que crear esa experiencia a partir de mensajes sensoriales que no son espaciales. Es decir, la cinestesia entraña el mismo tipo de tarea que la visión, salvo que el modo de operación parece incomparablemente más difícil de entender en el caso de la primera; tanto que, que yo sepa, ningún psicólogo ha intentado describir ese proceso. No cabe duda de que las sensaciones procedentes de los órganos del tacto, de los músculos, las articulaciones y los tendones contribuyen en grado sumo a nuestra conciencia de la forma y del espacio. Pero pretender esquivar los problemas de la percepción visual haciendo referencia a la cinestesia es salir de un mal paso para caer en otro peor.

La teoría intelectualista no se ha aplicado solamente a los dibujos de los niños, sino a todos los tipos de arte muy formalizado, "geométrico", y en particular al de los pueblos primitivos. Y como no parecía posible afirmar que todo arte procede de conceptos no visuales, la teoría llevó a postular la existencia de dos procedimientos artísticos, diferentes en principio uno del otro. Los niños, los pintores neolíticos, los indios americanos y los primitivos africanos trabajaban a partir de abstracciones intelectuales: practicaban un "arte conceptual". Los trogloditas paleolíticos, los moralistas pompeyanos y los europeos durante y después del Renacimiento representaban lo que veían con los ojos: practicaban un "arte perceptual". Esta dicotomía absurda era una de las principales desventajas de la teoría, ya que oscurecía el hecho esencial de que esa misma clase de forma bien definida que tanto resalta en las obras de muchos primitivos resulta indispensable en toda representación "realista" que merezca el nombre de arte. Una figura hecha por un niño no es más "esquemática" que otra de Rubens, simplemente está menos diferenciada. Y, como ya hemos señalado, los estudios altamente naturalistas de manos, rostros y alas de aves hechos por Durero son obras de arte únicamente porque los innumerables trazos y formas componen en ellos esquemas bien organizados, aunque complejos, que interpretan el tema.

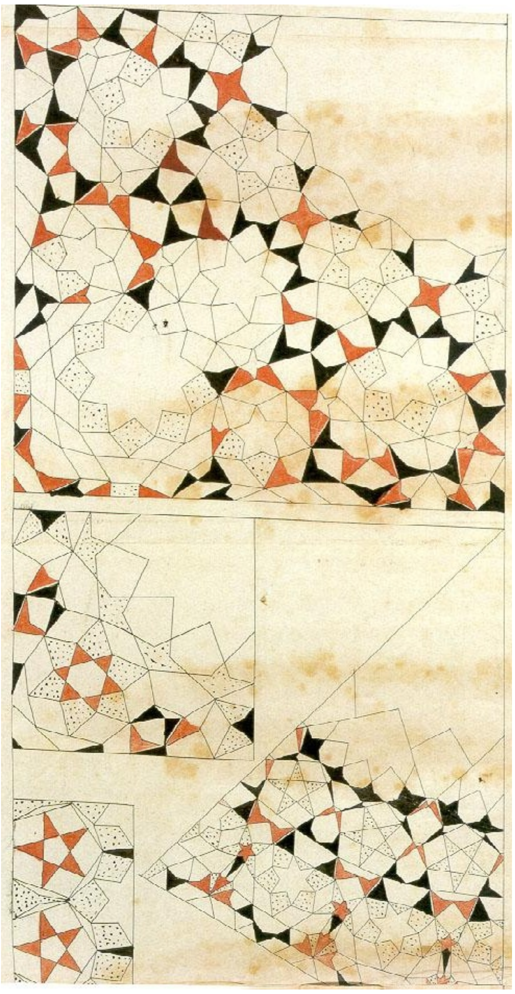
Por otra parte, la citada teoría pasa por alto la importante aportación de la observación perceptual, aun en las obras muy estilizadas. Cuando un isleño de los mares del Sur pinta el mar agitado por el viento en forma de rectángulo listado de líneas oblicuas paralelas, son elementos esenciales de la estructura visual del modelo los que se muestran de manera simplificada pero en modo alguno "simbólica".

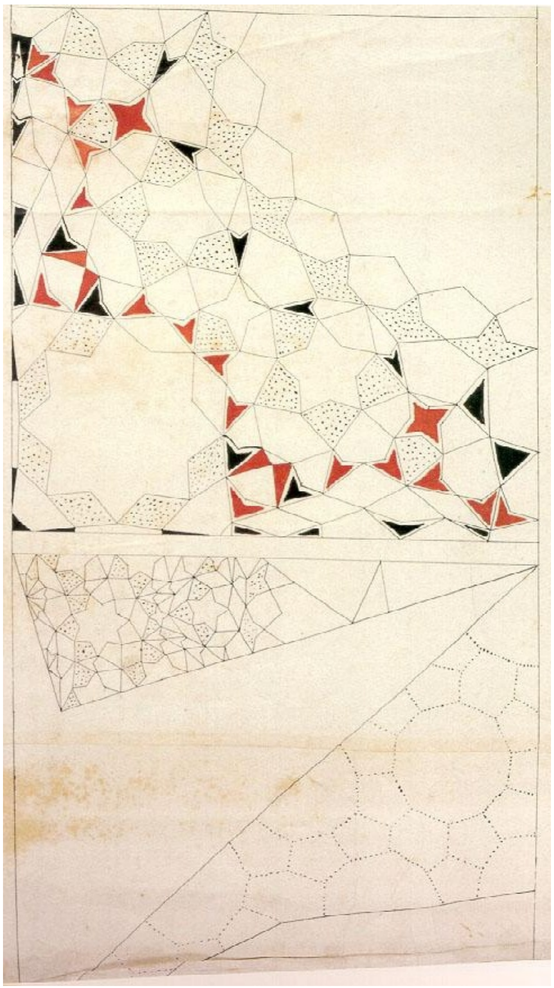
Dibujan lo que ven

Una teoría en tan palpable contradicción con los hechos jamás habría ganado aceptación si hubiera habido alguna otra alternativa. No la hubo, en tanto se creyó que los perceptos sólo podían hacer referencia a casos individuales y particulares: una persona concreta, un perro concreto, un árbol concreto. Toda noción general acerca de las personas, los perros o los árboles en cuanto clases de cosas tenía que proceder necesariamente de una fuente no perceptual.

Esta distinción artificial entre percepción y concepción ha quedado invalidada al demostrarse que la percepción no arranca de lo particular, que secundariamente sería procesado por el intelecto hasta llegar a lo abstracto, sino de lo general. La "triangularidad" es un percepto primario, no un concepto secundario. La distinción entre unos triángulos y otros no se produce antes, sino después. La "perridad" se percibe antes que el carácter particular de cualquier perro en concreto. Si esto es así, cabe esperar que las representaciones artísticas tempranas, basadas en la observación ingenua, tengan por objeto lo general, es decir, los rasgos estructurales simples y globales; y eso es exactamente lo que encontramos.

Los niños y los primitivos dibujan generalidades y formas no proyectivas precisamente porque dibujan lo que ven. Pero la cuestión no acaba ahí; es innegable que los niños ven más de lo que dibujan. A una edad en la que distinguen fácilmente a una persona de otra y advierten el menor cambio en un objeto conocido, sus imágenes siguen siendo muy indiferenciadas. Las razones de esto hay que buscarlas en la naturaleza y función de la representación pictórica.





La geometría aplicada de los árabes y otomanos busca siempre formas generadoras, polígonos convexos o estrellados, unidos por triángulos, con directrices adaptadas a un determinado tipo de pared o de bóveda. En eso, se parece al arte gótico, y encontramos diseños comparables en el cuaderno de Villard de Honnecourt.

Dibujos otomanos del museo Topkapi (Istanbúl).

Aquí hemos de eliminar nuevamente un prejuicio ya anticuado pero pertinaz: así como se suponía que toda percepción visual aprehendía la totalidad del aspecto individual, así también se daba por sentado que las representaciones gráficas y otras imágenes aspiraban a constituir una réplica fiel de todo lo que el dibujante ve en su modelo. No es así, ni mucho menos. Cómo sea una imagen aceptable es cosa que depende de los criterios del dibujante y de la finalidad de la representación. Incluso en la práctica de los adultos, un simple círculo o punto puede bastar para mostrar una ciudad, una figura humana, un planeta; de hecho, puede servir a una función dada mucho mejor que otra representación más detallada. Así pues, cuando un niño se autorretrata en forma de esquema simple de círculos, óvalos y rectas, puede ser que lo haga no porque eso sea todo lo que ve en el espejo, ni porque sea incapaz de hacer una representación más fiel, sino porque su dibujo simple satisface todas las condiciones que a su entender debe cumplir una representación.

Hay que considerar aquí otra diferencia fundamental entre el percepto y la representación. Si la percepción no consiste en un registro "fotográficamente" fiel sino en la captación de rasgos estructurales globales, parece evidente que tales conceptos visuales no han de poseer una forma explícita. Por ejemplo, ver la forma de una cabeza humana puede conllevar ver su redondez, pero obviamente esa redondez no es una cosa perceptual tangible. No está materializada en ninguna cabeza en particular, ni en determinado número de cabezas. Hay formas que la representan a la percepción, como los círculos o las esferas; ahora bien, ni siquiera esas formas son la redondez, sino que hacen sus veces, y una cabeza no es ni un círculo ni una esfera. En otras palabras, si yo quiero representar la redondez de un objeto, en este caso una cabeza, no puedo apoyarme en ninguna forma que realmente me venga dada en el mismo, sino que he de descubrir o inventar aquella que encarne satisfactoriamente la generalidad visual "redondez" dentro del mundo de las cosas tangibles. Si el niño representa la cabeza con un círculo, éste no le viene dado por el objeto: es una verdadera invención, una auténtica hazaña a la que sólo llega al cabo de una experimentación laboriosa.

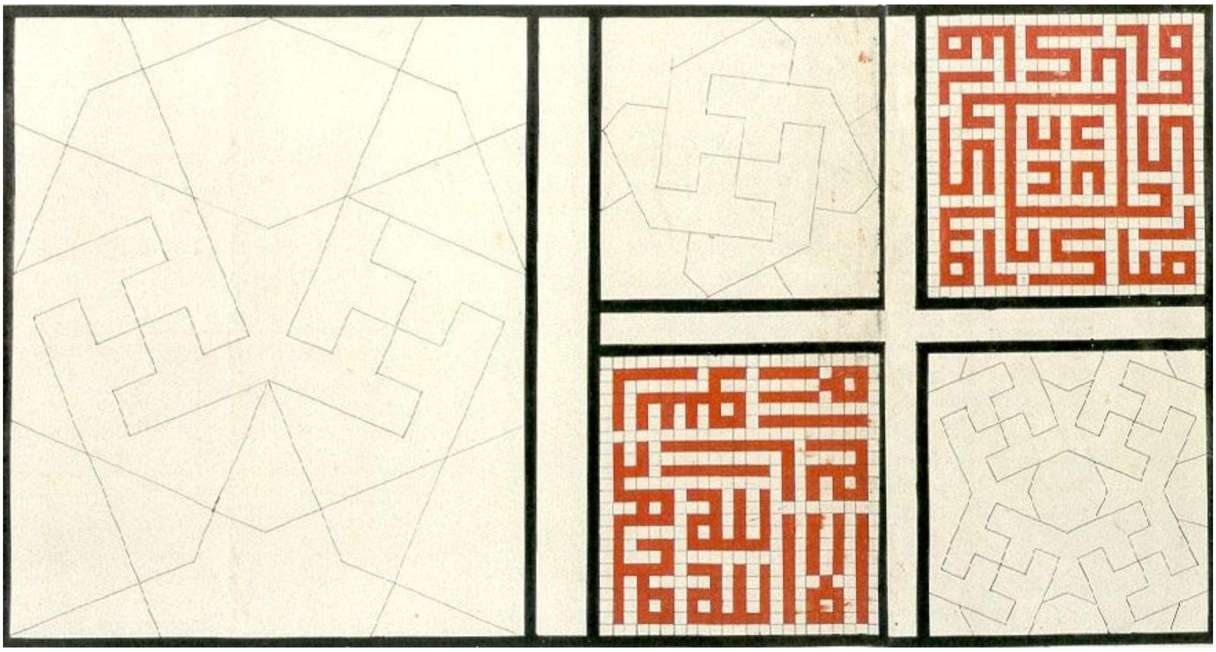
Algo semejante ocurre con el color. El color de la mayoría de los objetos dista mucho de ser uniforme en el espacio o en el tiempo, y tampoco es idéntico en los diferentes ejemplares de un mismo grupo de cosas. El color que el niño da a los árboles en sus dibujos no es una tonalidad específica de verde seleccionada de entre los cientos de matices que se encuentran en los árboles, sino más bien un color que coincide con la impresión global que producen éstos. De nuevo estamos aquí no ante una imitación sino ante una invención, el hallazgo de un equivalente que representa los rasgos pertinentes del modelo con los recursos de determinado medio."

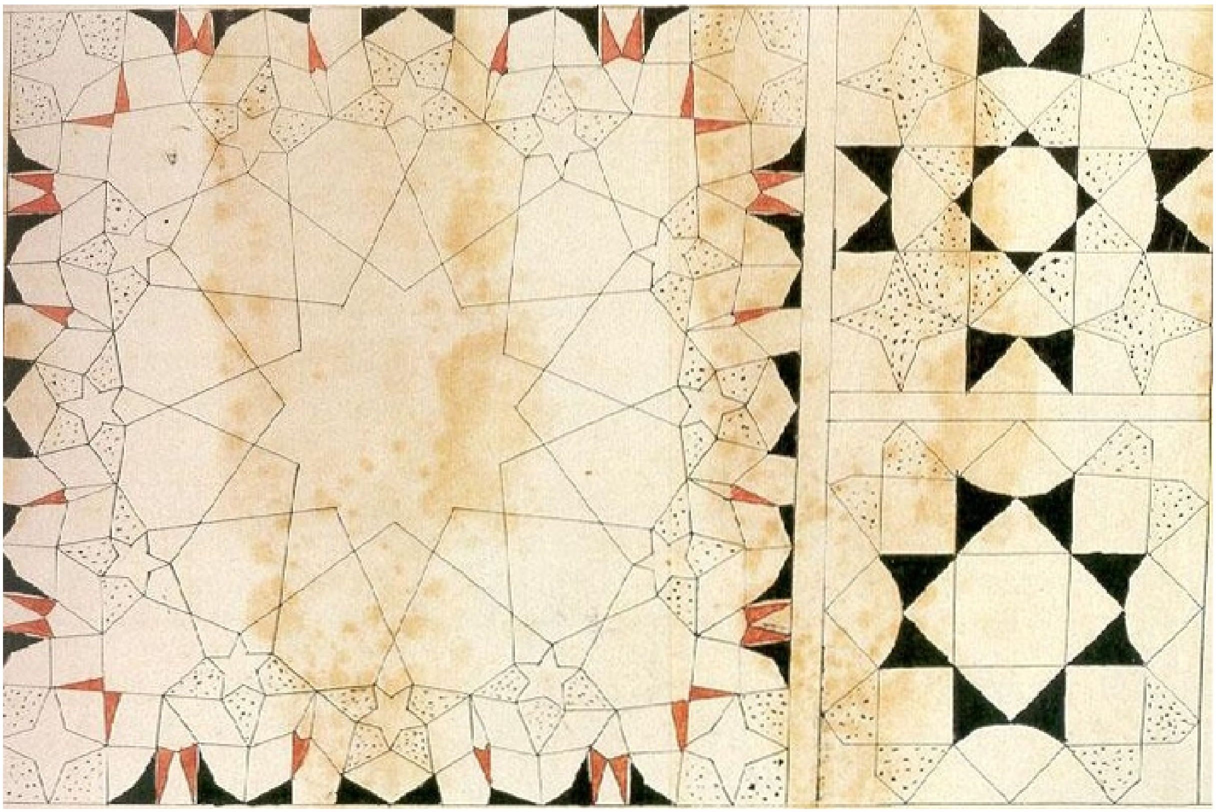
Rudolf Arnheim[1]

Su espacio perceptivo, el ojo lo comparte en gran parte con el tacto, a diferencia de lo que ocurre con el oído, mucho más autónomo. Una de las conclusiones importantes del texto aquí citado, es establecer sobre bases experimentales la prioridad de la vista sobre el tacto, en la mente humana. Así, la vista y el oído se hacen más equiparables, porque desaparece el supuesto grado superior de "realismo" que la tradición europea otorgaba al ojo (quizá porque, tras el invento de la imprenta, las imágenes empezaron a circular mucho más fácilmente que la música). Luego, los esquemas básicos de la vista se hacen comparables con los acordes fundamentales del oído: aunque los perceptos correspondientes no ocurran en la misma dimensión (las figuras geométricas están en el espacio, los intervalos musicales en la frecuencia), se nota el mismo recurso mental: establecer la percepción, y luego la expresión, sobre los esquemas más simples posibles (la redondez, la consonancia,...), para después poder desarrollar (mediante diferenciaciones, combinaciones,...).

---

[1] "Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Editorial, Madrid, 2001.





La caligrafía es otra fuente de inspiración, y de combinaciones: el arte de la línea dirigida y el arte de las figuras geométricas se completan en el mocárabe [muqarna]. Aquí, la escritura cúfica, con sus ángulos rectos. En otros diseños, la escritura naskhi, más curva. Notable también es la combinación de los colores rojo y negro, polos cromáticos tradicionales en las culturas semíticas (pero no en Europa, donde el tablero de ajedrez pasa de la oposición rojo y negro árabe al rojo y blanco, y, finalmente, al blanco y negro).

Dibujos otomanos del museo Topkapi (Istanbúl).

Con eso, entendemos más claramente los fundamentos puramente visuales de la geometría euclidiana: el llamado "pórtico axiomático" de los "Elementos" instala, precisamente, los esquemas visuales básicos: la línea recta, el ángulo recto, el círculo, los polígonos simples,...

Recordemos sus primeras definiciones:

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura
3. Los extremos de una línea son puntos
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura

Recogemos, a continuación, algunos de los comentarios expuestos por María Luisa Puertas Castaños en su edición de los "Elementos"[1]:

"La definición 1 recoge la idea tradicional de punto como aquello que es indivisible en partes. Pero no incurre en el vicio que Aristóteles atribuye a las definiciones habituales en su tiempo, el de definir lo anterior por referencia a lo posterior: el punto como límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como límite del cuerpo sólido (ver los "Tópicos"). También es significativa la opción de Euclides por el término *semeion* para designar el punto. Los pitagóricos habían legado el término *monas* para indicar la unidad tanto aritmética como geométrica: cuando el contexto lo exigía, la unidad aritmética podía precisarse como *monas athetos* (unidad sin posición) y la unidad geométrica como *monas thesin ekhousa* (unidad con posición).

La definición 4: los griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea recta: la de un hilo tenso, la de un rayo de luz, la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos [Ch. Mugler]. Estas representaciones subsisten en algunas caracterizaciones de la línea recta que hoy conservamos de los griegos. La tensión ("tasis") está asociada a la definición de la recta como una línea tendida o estirada hacia los puntos [Proclo] o hacia los extremos [Pappo]. La imagen del rayo óptico está presente en la conocida definición platónica de la recta como la línea cuyo medio intercepta (eclipsa) ambos extremos [en el "Parménides"]. La tercera imagen se trasluce en la definición de Herón recogida por Proclo: *una línea que permanece fija cuando sus extremos permanecen fijos*. Suele considerarse que la definición de Euclides es una elaboración de la platónica, pues ésta contendría implícitamente una alusión al sentido de la vista y supondría, asimismo, una asimilación del rayo visual al rayo óptico, connotaciones que Euclides procura evitar. No obstante, si alguna definición griega ha tenido especial fortuna, ha sido la aportada por Arquímedes [en "Sobre la esfera y el cilindro"]: *la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos*."

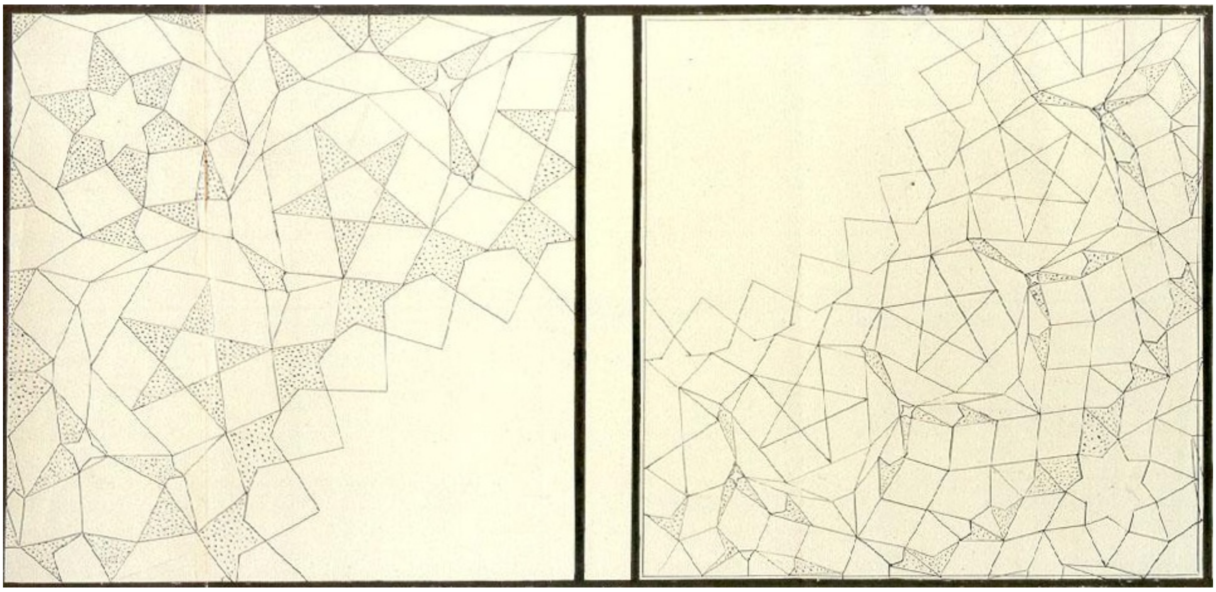
Las primeras definiciones de Euclides son por lo tanto muy precisas y muy cuidadas, pero podrían también interpretarse como algo rebuscadas. En "De Prospectiva Pigendi", Piero della Francesca empieza por recordarlas, antes de añadir: "ya que estas no son aparentes si no es al intelecto y yo digo tratar de perspectiva con demostraciones que quieren ser entendidas por el ojo, me es necesario dar otras definiciones: diré, pues, que el punto es una cosa tan pequeñita ("picholina") cuanto es posible al ojo comprender; diré que la línea es la extensión de un punto a otro, cuya anchura es de naturaleza similar a la del punto"[2].

Quizás la prudencia manifestada por Euclides en sus definiciones no fuera de naturaleza puramente geométrica: tenía que evitar dos peligros, so pena de abandonar su obra a sendas polémicas aun muy vigentes entre los griegos de su época. En primer lugar, estaba la que ya hemos recordado, entre lo continuo y lo discreto: no debía por lo tanto definir la línea como una

---

[1] "Elementos", Euclides, versión castellana de María Luisa Puertas Castaños, Editorial Gredos, 1991.

[2] "De prospective pigendi", Piero della Francesca, versión italiana de Giusta Nicco-Fasola, Casa Editrice Le Lettere, Firenze, 1984.



La deformación del ángulo recto (del cuadrado en paralelograma) produce fuertes efectos perspectivos (abajo). Ciertos motivos (arriba) se parecen muchísimo a los cuadros del pintor castellano Pablo Palazuelo, quien encontró en ellos su principal fuente de inspiración, al lado de los cuadros de Paul Klee...

Dibujos otomanos del museo Topkapi (Istanbúl).

multiplicidad de puntos, porque, para dar un ejemplo, si un segmento de recta está formado por cierto número de puntos, éste número, por elevado que sea, bien podría ser impar, y el segmento ya no se podría dividir exactamente en dos...

El segundo peligro habría sido el de no respetar el orden lógico exigido por Aristóteles, que ya tenía claro el camino axiomático popularizado por el mismo Euclides. Pero, detrás de esta exigencia, había otra, que remonta a Platón:

"Platón reprochaba a los discípulos de Eudoxo, de Arquitas y de Menecmes[1] de recurrir a medios instrumentales y mecánicos para resolver el problema de la duplicación del volumen; pues en su deseo de encontrar, mal que bien, dos medias proporcionales, recurrían a un medio irracional. ¿No se perdía irremediablemente, al proceder así, lo mejor de la geometría, por una regresión al nivel de los sensibles, que le impedía elevarse e incluso percibir a cambio las imágenes eternas e incorpóreas entre las cuales Dios es eternamente dios?"

[Plutarco][2]

Acorde a su visión jerarquizada de las actividades intelectuales, Platón afirmaba que la geometría sólo ocuparía su verdadero lugar al transformarse en una pura estructura fuera-del-tiempo, cuyos objetos fueran universales, eternos.

Así, rechazaba la geometría pitagórica, la de Arquitas, pero también, de antemano, la de Arquímedes, cuyos procesos mecánicos (es decir: temporales) permitían, sin embargo, resolver problemas insolubles con la sola ayuda de la regla y del compás, como la famosa cuadratura del círculo.

* * *

"La geometría deja el espíritu como lo encuentra"
Voltaire[3]

Podemos ahora precisar el sentido de lo que entendemos por una *geometría sensible*.

Hemos visto cómo, en sus orígenes - reales o inventados, eso no importa aquí -, las matemáticas fueron esencialmente *sensibles*, es decir condicionadas, en sus principios y en su evolución, por las muy peculiares propiedades de la visión y de la audición humana.

Lo que los griegos llamaron su *geometría* y su *aritmética*, lo podemos ahora reunir en una sola abstracción, la matemática de Proclo, siempre que recordemos su doble origen, y la necesidad de articular su desenvolverse de modo que pueda abarcar la percepción entera, en toda su variedad.

Esta matemática es la que llamaremos, de aquí en adelante, *geometría*, en el sentido unificador que ya presentían los pitagóricos, que Euclides expresó con mayor fuerza, y cuyo concepto central, la *proporción*, Eratóstenes, al parecer, ya enunciaba como tal. Eso es lo que entendemos por aquel "espíritu de geometría" tan renombrado aún en el siglo XVII, el que Newton aplicó en su estudio del color.

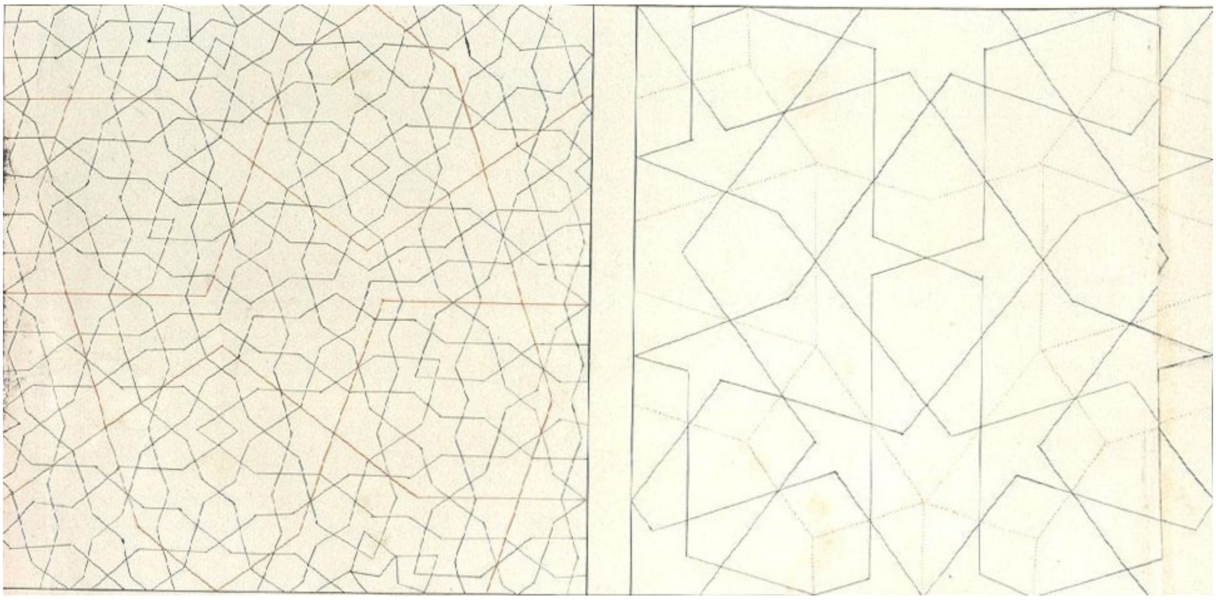
En nuestra época, caracterizada por adelantes técnicos importantes y muy prometedores, debemos, en mi opinión, considerar todas las propiedades de la percepción como tantas opciones: no las tenemos que incluir a todas en cada uno de los desarrollos geométricos que realizamos (eso sería una forma de academicismo), pero nos conviene ser muy concientes de la selección que operamos entre ellas, sea para mejorar un tipo de representación, sea para resolver un problema perceptivo, sea, directamente, para expresarnos en ellas artísticamente.

---

[1] Todos ellos pitagóricos…

[2] Archytas, "Les présocratiques" (p. 527), *in* "Propos de table", Plutarque.

[3] Citado en la introducción de Javier Arnaldo (p. 9) a: "Teoría de los colores", Johann Wolfgang von Goethe, Colegio Oficial de Arquitectos Técnicos de Murcia, 1999.



La geometría aplicada árabe y otomana sigue ofreciendo una fuente de inspiración importante y productiva. Da la posibilidad de trabajar la variedad motívica de la geometría: algo que los europeos habían abandonado, un poco rápidamente, a las artes decorativas.

Dibujos otomanos del museo Topkapi (Istanbúl); “artesonado desmontable en roble”, Pablo Palazuelo.

Llamamos *geometría sensible* el condicionamiento voluntario de la geometría por opciones perceptivas, y somos concientes de que no inventamos nada con eso, sino que, al contrario, nos embarcamos sobre un muy viejo navío, en busca de nuevos vientos.

Este barco zarpó hace unos dos mil quinientos años, no se sabe muy bien si de Samos o de Mileto, con un equipaje variopinto que hablaba en griego, y emprendió un largo cabotaje por las riberas del Mediterráneo. Tras un viaje que duró un milenio entero, estaba ya muy cansado, pero había adquirido un prestigio tal, que los herederos de sus antiguos armadores, árabes y bárbaros del norte, quisieron a su vez echarse a la mar, y emprendieron el mismo viaje, aportando muchas innovaciones a su casco y a sus velas. Finalmente, los matemáticos ilustrados (Kepler, Newton, Leibniz,...), llenos de admiración, empezaron a desarmar el barco por completo, para entender mejor su funcionamiento. Y, muy a su pesar, lo hicieron pedazos. Con sus materiales, construyeron un sinfín de instrumentos maravillosos, pero que ya no servían para viajar sobre el agua, que se desplazaban solos, pero sin pasajeros. El ojo y el oído se quedaron a tierra, contemplando cómo se construía sin ellos el mundo moderno.

Ahora, creemos que ha venido el momento de recuperar este navío, y de buscar algún istmo, por el cual mandarlo lejos de su mar ancestral, sobre el océano, en busca de nuevos horizontes. Para ello, en este largo capítulo, hemos estudiado los viejos mapas griegos, donde están apuntados algunos escollos de los cuales deberemos cuidarnos.

El primero, los griegos lo tenían a la salida del puerto, y no lo podían evitar. Por ello, limitaron drásticamente el tonelaje de su embarcación: sólo consideraron el oído en su aspecto frecuencial y el ojo en su aspecto espacial. No tenían la capacidad técnica de viajar con más de dos velas, ni de pintarlas adecuadamente: por ello, su geometría quedó en blanco y negro.

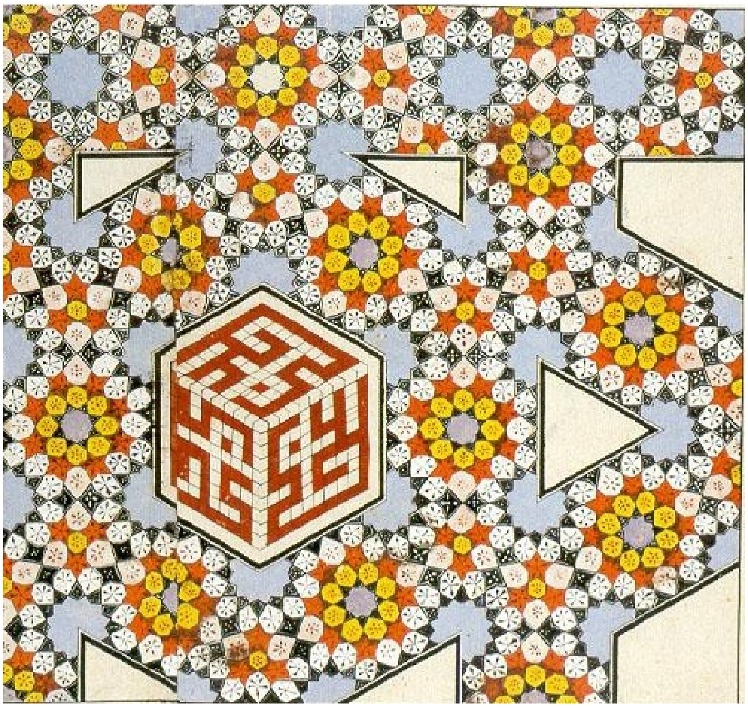
El segundo, apareció al sur de Italia, bajo la forma de dos remolinos, no muy lejos de Crotona, unos Caribdis y Scilla, que se entrechocaban continuamente. El equipaje tuvo que aprender a manejar armoniosamente las dos velas del navío, aprovechando que una podía mejor con lo discreto de las ráfagas de viento, y la otra con lo continuo de la corriente marina.

Pero el tercer escollo fue mucho más peligroso, y casi logró inmovilizar el barco por completo, definitivamente. Ocurrió cuando un renombrado timonel de origen ateniense, probablemente turbado por el canto de las sirenas, declaró que el navío, a partir de entonces, debía considerarse como una estructura fuera-del-tiempo. Y, claro, así...

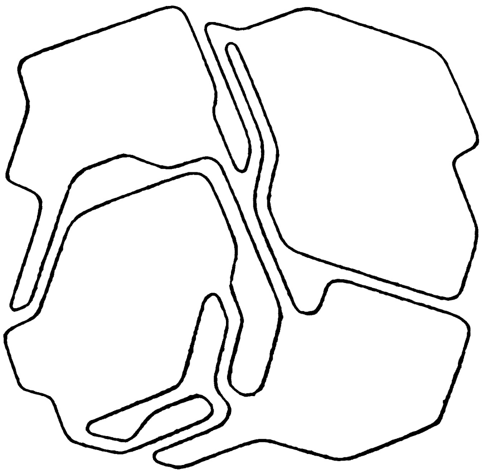
La geometría tal y como Platón la exigía suele llamarse, hoy en día, *sintética*, para distinguirla de otras formas de geometría que vinieron más tarde: diferencial, algebraica, proyectiva,...

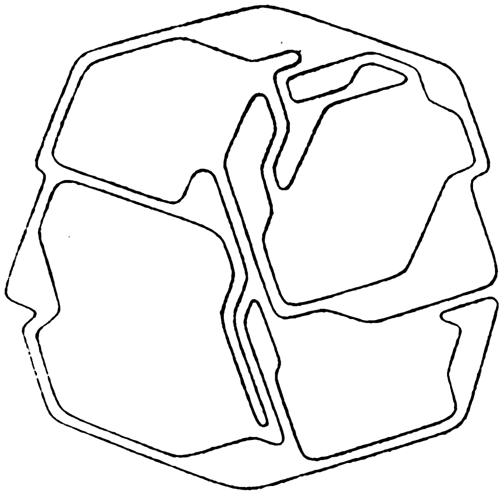
La geometría sintética ha tenido siempre, a través de los siglos, sus fervorosos devotos. A pesar de que su época verdaderamente productiva se haya cerrado hace ya mucho tiempo, a finales de los tiempos helenísticos, sigue seduciendo por su claridad y su pureza, como el juego de ajedrez, por el desarrollo límpido de sus demostraciones, a partir de un número reducido de axiomas y definiciones. Pero presenta un gran defecto: cada demostración es difícil de encontrar, y esta dificultad se repite continuamente, ya que las demostraciones anteriores no ofrecen ninguna pista para las que vienen luego: es, por lo tanto un juego sin progresión, sin promesas.

Una anécdota muy reveladora, en cuanto circuló mucho, ya en la época helenística, cuenta que el rey Tolomeo invitó a Euclides para felicitarlo por su obra magna, y le pidió si no pudiera explicarle su sustancia de una forma diferente, más fácil de entender que la que su libro exponía. A lo cual el gran matemático contestó: “Vuestra majestad, en la geometría, no existe una vía real”. Este magnífico orgullo, junto con el prestigio que los griegos granjearon por su geometría y por su arte de la proporción, explican sin duda porqué la geometría se sigue enseñando así, bajo su forma sintética. Pero esta enseñanza, que sólo conviene a una minoría, explica la desesperación



El cubo, en su representación isométrica, produce, por su extrema simetría, una interesante ambigüedad, ya que el mismo motivo se puede interpretar también como plano (tres rombos articulados). Su interpretación dinámica por Pablo Palazuelo ofrece el mismo juego, entre volumen cerrado y forma generadora, entre percepción y geometría.





Dibujos otomanos del museo Topkapi (Istanbúl); "Lagunar 1" y "Lagunar 2", Pablo Palazuelo.

producida en muchas personas inteligentes, en Voltaire, por ejemplo, que notaba, no sin razón, que deja a la mente como la encontró, sin promesas.

En todas las facultades de ingeniería y de arquitectura, se enseña aun la geometría descriptiva, heredera de los trabajos de Monge. Pero no son los aspectos brillantes y productivos de esta geometría, su posibilidad única de representar los objetos infinitos (la recta y el plano), los que interesan en la enseñanza práctica, sino un ramalazo técnico, que tiene demasiado que ver con la geometría sintética: aburre a la mayoría de los estudiantes, y se habla ya seriamente de su caducidad y, por todas partes, de cerrar estas clases.

Y eso en el preciso momento en que la informática, por fin, permite y necesita una plena integración de la geometría, con numerosas promesas. Pero esta geometría se parece mucho más a la de Arquitas o de Arquímedes, y, en el caso de la arquitectura, a la geometría sensible que estamos intentando construir aquí. Un dicho conocido reza que la geometría proyectiva sólo florece en los siglos impares: en el XV (Alberti, Piero), en el XVII (Desargues), en el XIX (Monge) y, cómo ya se deja sentir, ahora. Al dejar caducar lo que queda de su enseñanza geométrica, los arquitectos se arriesgarían, otra vez, en perder el contacto con la investigación, con la misma investigación de la arquitectura, que nadie más producirá para ellos.

Vincular más estrechamente la geometría con la percepción no consiste en ningún anacronismo. La percepción es condición recíproca de la expresión, y las formas actuales de expresión, incluyendo un uso ambicioso de la informática, llaman a gritos una geometría más amplia, más productiva, más imaginativa, que abarque las figuras, los colores, el tiempo y las intensidades, con sus demostraciones, sus cálculos y sus representaciones, renovadas y revitalizadas.

Para ello, es preciso separarse definitivamente de la vieja geometría de Platón, que pedía, para cada uno de sus teoremas, una doble demostración; porque no hacía falta solamente demostrar la proposición estudiada, sino que, cada vez, simultáneamente, había que volver a demostrar, una vez más, la misma universalidad de la geometría.

Afortunadamente, los ordenadores no piensan igual.

Origen de las ilustraciones

p.040 iz. hasta p.044 iz.: Las pinturas de las cuevas de Lascaux, *in* "Lascaux ou la naissance de l'art", Georges Bataille, Skira, Genève, 1955. Textos: "Lascaux ou la naissance de l'art" y "Conferencia a la sociedad de Agricultura", G. Bataille, "Oeuvres complètes, tome IX", Éditions Gallimard, 1979.
p.045 iz.: - Cuatro miniaturas, Latin 1, Bnf, *ex* Primera biblia de Carlos el Calvo, o "Biblia de Vivien", Saint-Martin de Tours (entre 845 y 851).
p.046 iz.: - Cuatro miniaturas, Latin 10525, Bnf, *ex* "Salterio de San Luís", o "Psalterium parisiense", Paris (entre 1258 y 1270).
p.047 iz.: - "Las mediedades pitagóricas", dibujo propio, realización gráfica: Gori Moya.
p.048 iz.: - Construcción del libro III y proposición VII-129 de las "Colecciones" de Pappo [Pappus], *in* "Invitation à la géométrie", Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.
p.049 iz.: - "Timeo", Platón (traducción latina comentada por Calcidius, primera mitad del siglo X), Reg. lat. 1308 fols. 21 verso - 22 recto. Biblioteca del Vaticano.
- "Tadkira fî 'ilmi l'Hayâ", Nasir ad Dîn at Tûsî (siglo XIV), Vat. ar. 319 fols. 29 recto - 28 verso (mecanismo para transformar un movimiento circular en otro rectilíneo).
p.050 iz.: - "Los Elementos", Euclides: Vat. gr. 190, vol. 1 fols. 38 verso - 39 recto (Libro I, proposición 47: teorema de Pitágoras) y Vat. gr. 190, vol. 2 fol. 207 verso - 208 recto (Libro XI, proposiciones 31-33: volumen de los paralelipípedos)
p.051 iz.: - Comentarios de Eutocius a "Sobre la esfera y el cilindro", Arquímedes (traducción latina por William de Moerbeke, ca. 1270) : Ottob. lat. 1850 fols. 36 verso - 37 recto (problema de la duplicación del cubo). Biblioteca del Vaticano.
p.052 iz.: - "Estudio de las proporciones, Vitruvio", Leonardo Da Vinci, pluma y tinta (24.5 x 34.3 cm), 1487, Accademia,Venecia, *in* http://www.grandspeintres.com. Texto: "Los fundamentos de la arquitectura en la edad del humanismo", Rudolf Wittkower (1949), Alianza Editorial, Madrid, 1995, segundo apéndice.
p.053 iz. y p054 iz. : Estudios antropomorfos, "Trattato d'architettura", Francesco di Giorgio Martini, dibujos a la pluma (siglo XVI) *in* http://www.bncf.firenze.sbn.it. Texto: "Los fundamentos de la arquitectura en la edad del humanismo", Rudolf Wittkower (1949), Alianza Editorial, Madrid, 1995.
p.055 iz.: -"Equema bizantino" y texto, *in* "El significado en las artes visuales", Erwin Panofsky, Alianza Editorial, Madrid, 1979.
p.056 iz. hasta p.060 iz.: Esquemas infantiles, in "Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim, Alianza Editorial, Madrid, 2001.
p.061 iz.: - Dos esquemas otomanos *in* http://www.ee.bilkent.edu.tr
p.062 iz.: - Dos esquemas otomanos *in* http://www.ee.bilkent.edu.tr
p.063 iz.: - Dos esquemas otomanos *in* http://www.ee.bilkent.edu.tr
p.064 iz.: - Dos esquemas otomanos *in* http://www.ee.bilkent.edu.tr
- "Artesonado desmontable, en roble, de una vivienda de Madrid", Pablo Palazuelo, *in* "Palazuelo", Claude Esteban, Ed. Maeght, 1980.
p.065 iz.: - Dos esquemas otomanos *in* http://www.ee.bilkent.edu.tr
- "Lagunar 1" y "Lagunar 2", Pablo Palazuelo, tinta y mina de plomo, 39,5 x 29 cm., Galerie Maeght, Paris 1977 *in* "Palazuelo", Claude Esteban, Ed. Maeght, 1980.

- 9 -

El ojo, el papel y la pantalla

La prodigiosa eficacia del dibujo de Villard, su variedad e inteligencia, quizás hayan quedado algo escondidas detrás de los excesivamente famosos esquemas geométricos, los cuales cubren 3 de las 64 páginas de su cuaderno, el único conservado acerca de la arquitectura del siglo XIII. Villard se muestra, primero, excelente dibujante de personajes. Aquí, dos rasgos delatan su época: una tendencia en buscar motivos geométricos generadores, que puedan pasar, por ejemplo, de las columnas a las "cabezas de hojas" (ab.md.), y la algo amanerada curva en "S" de los perfiles humanos (ab.dr.), típica de la iluminación francesa de su tiempo.

Dibujos del cuaderno de Villard de Honnecourt (hacia 1230).

9. El ojo, el papel y la pantalla

"El ojo, que es la ventana del alma, es el órgano principal por el que el entendimiento puede tener la más completa y magnífica visión de las infinitas obras de la naturaleza.

¿No vemos acaso que el ojo abarca la belleza de todo el universo...? Asesora y corrige todas las artes de la humanidad... Es el príncipe de las matemáticas, y las ciencias que en él se fundan son absolutamente ciertas. Ha medido las distancias y la magnitud de las estrellas. Ha descubierto los elementos y su ubicación... Ha dado a luz la arquitectura, la perspectiva y el divino arte de la pintura.

¡Qué cosa más excelente, superior a todas las cosas creadas por Dios! ¿Qué alabanzas pueden hacer justicia a tu nobleza? ¿Qué pueblo, qué lenguas podrán describir exhaustivamente tu función? El ojo es la ventana del cuerpo humano a través del cual descubre su camino y disfruta de la belleza del mundo. Gracias al ojo, el alma permanece contenta en la prisión corporal, porque sin él una prisión así sería una tortura.

Maravillosa y estupenda necesidad, tú haces, con suprema razón, que todos los efectos sean el directo resultado de sus causas. Por una suprema e irrevocable ley, toda acción natural te obedece por el proceso más corto posible. ¿Quién podría imaginar que un espacio tan pequeño podría dar cabida a todas las imágenes del universo? ¡Qué proceso tan poderoso! ¿Qué talento puede servir para profundizar en una naturaleza así? ¿Qué lengua puede revelar tan gran maravilla? En verdad, ninguna. El ojo es quien guía la reflexión humana para la consideración de las cosas divinas. Todas las formas, todos los colores, todas las imágenes de cada parte del universo se contraen en un punto. ¿Qué otro punto hay tan maravilloso? Maravillosa y admirable necesidad; por tu ley haces que todo efecto sea el resultado directo de su causa por la vía más corta."

Leonardo da Vinci[1]

Desde luego, es un pintor, y no un músico, el autor de estas líneas. Pero no hay solamente aquí partidismo, orgullo de una profesión en auge: en el siglo XVI, la música también está en una cumbre. Las expresiones utilizadas por Leonardo son, de por sí, reveladoras de un gran cambio, de un vuelco perceptivo, que sigue afectando nuestros idiomas: "visión" del mundo, "perspectiva", "alumbramiento" de las artes, "imágenes" del universo, puntos de vista, enfoques... ¡Valga la redundancia! ¡Vaya tautología! ¡Atribuir todo eso al ojo! En poco tiempo, la percepción del universo se ha reducido a una visión, y el dos veces milenario, polvoriento pero equilibrado cuadrivio - la geometría y la aritmética, la astronomía y la música - se ha derrumbado por completo, en pocas generaciones.

Los Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca establecen las leyes de la proyección central; los Leonardo, Rafaelo, Miguel Ángelo la llevan al centro del humanismo renacentista, Van Eyck y los flamencos en los interiores burgueses; Serlio y el teatro barroco la trasladan a la escenografía, Bramante y Borromini a la arquitectura.

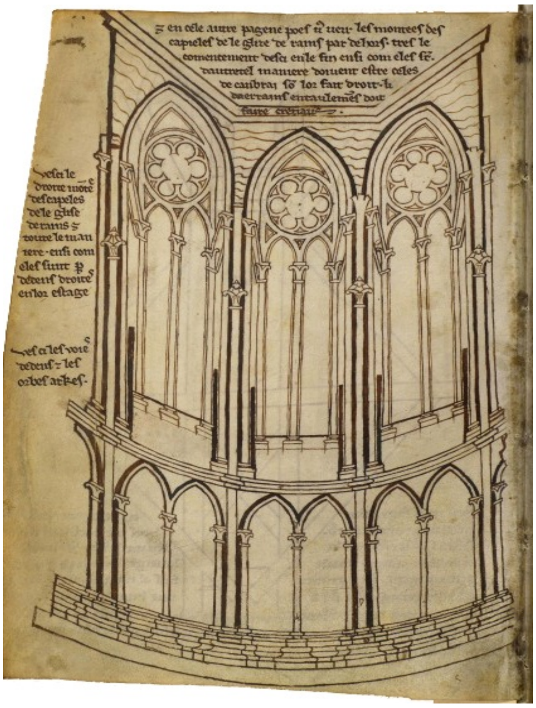
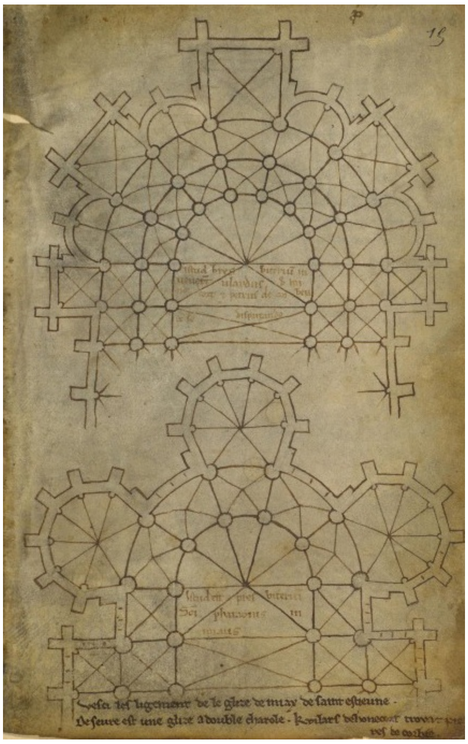
Pero la ciencia de las lentes lleva ya el ojo fuera de la escala humana, hacia lo gigantesco y lo minúsculo. El oído no puede seguir. La ciencia moderna se fundará solamente sobre el ojo, y el ojo impondrá su carácter a esta ciencia, cuyos servidores, mudos y mirones, sujetos bien separados de los objetos de su observación, podrán, como Descartes, "desatar el espíritu de los sentidos" (es decir: cerrar los ojos) para que "las ideas se presenten al espíritu clara y distintamente"[2] (es decir: a plena luz)...

Este ojo, en blanco y negro, que sólo considera figuras lineales en el espacio aristotélico (continuo, en longitud, anchura y profundidad) y luego cartesiano (infinito, isótropo y homogéneo) es el de los libros impresos, que ignoran o apagan en grises los efectos de la

---

1 "Cuaderno de notas", Leonardo da Vinci (p. 11), versión castellana, colección Poesía y Prosa Popular, YERICO, Madrid, 1983.

2 Por ejemplo, en las "Meditaciones", en "Œuvres philosophiques II", René Descartes, Éditions Garnier, Paris, 1967.


En sus elevaciones de la catedral de Reims (arriba), "Villard ha querido hacer sentir la concavidad del ábside visto del interior y la convexidad visto del exterior, dando a las líneas circulares o poligonales en planta unos bombeos, en sentido contrario sobre una y otra "perspectiva". Para nosotros, acostumbrados a la exactitud fotográfica, el resultado es inverso a lo esperado abajo, pero correcto arriba, en ambas vistas. En efecto, Villard ha trazado los niveles según curvas sensiblemente concéntricas a la cornisa superior, con la ventaja de que los elementos de un mismo nivel - arcos y ventanas - conservan la misma altura, pese a su deformación angular, con esta perspectiva convencional que nos parece ingenua, pero que no resulta mucho más inexacta que nuestras perspectivas caballeras".

Dibujos del cuaderno de Villard de Honnecourt (hacia 1230). Texto de Roland Bechmann.

perspectiva atmosférica - es decir: coloreada - que Leonardo observaba en los paisajes. El ojo, pues, celebrado por un nuevo monoteísmo, impone el culto de una visión abstraída poco a poco del mundo sensible.

Entre los siglos XV y XIX, en paralelo al movimiento científico, ocurre otra cosa, en la sociedad europea. Es un efecto colateral de la imprenta: la producción de papel, en constante aumento, y su consiguiente abaratamiento, introduce en los hogares, además de los libros impresos, unas hojas de papel blanco, unos cuadernos, donde los niños y los adultos pueden ejercitarse a escribir, y a dibujar: florecen entonces los diarios íntimos, las relaciones de viaje, el dibujo aficionado, de lo que se contempla y de lo que se imagina. Y, quizás, este dibujo libre ha ejercitado sobre la geometría moderna una influencia superior a la que desenvolvieron los matemáticos coetáneos.

El único cuaderno de dibujos que nos ha legado la arquitectura gótica, el de Villard de Honnecourt, es un diario itinerante: su autor, desplazándose de cantera en cantera, visitando las obras de las grandes catedrales en construcción, nota lo que le llama la atención, usando técnicas gráficas muy variadas, respetando solamente la regla de la mayor eficacia: plantas muy precisas, simples esbozos, esquemas ingeniosos, un león escorzado, unas vidrieras en *desarrollo*, como si los muros se desplegasen para ajustarse a la página,...

Esta libertad técnica es la que desarrollarán luego pintores, escenógrafos, arquitectos y otros aficionados al dibujo o profesionales de las artes aplicadas: hacer aparecer, por todos los medios posibles, el espacio tridimensional sobre la superficie plana del dibujo. Si Villard dispone solamente del trazo lineal a mano alzada, otros usarán el color, las gradaciones de grises, la fuga de las paralelas hacia su destino común, o su simple oblicuidad axonométrica sin divergencia... Y es así como definiremos aquí la *perspectiva*, simplemente, como *cualquier sugestión de profundidad* (es decir: de una tercera dimensión) *en el plano del dibujo*.

Para que haya perspectiva, basta que el dibujo presente una deformación que nuestra experiencia visual pueda atribuir a la distancia. Las proyecciones geométricas ofrecen para ello sus oblicuidades o sus escorzos, y todas pueden utilizarse para producir perspectiva. En este aspecto, carece de sentido la oposición entre perspectiva "verdadera" (la proyección central) y "falsa" perspectiva (la proyección paralela) que rezaban los manuales decimonónicos. De hecho, unas figuras geométricas tan sencillas como el paralelogramo o el trapecio pueden verse ya como perspectivas, siempre que el ojo las perciba como deformaciones del rectángulo. Una simple gradación de color puede sugerir profundidad (como en los cielos de Turner, por ejemplo).

En cada caso, la técnica utilizada se elegirá en función del objetivo particular perseguido por el dibujo: simple sugestión del espacio, efecto ilusionista, visualización de las proporciones, posibilidad de medir, esquema constructivo. Cada forma de proyección tiene sus puntos fuertes y sus puntos débiles. Además, existen otras técnicas, no proyectivas, que permiten reducir el espacio tridimensional al plano: los cortes y los desarrollos. Éstas también pueden describirse geométricamente, y podríamos imaginar ahora una verdadera *geometría descriptiva*, que estudiaría todas las opciones perspectivas, con sus ventajas y limitaciones, de forma completa y neutral, sin prejuicios ideológicos. Veríamos así desvanecerse todos los argumentos absurdos a favor o en contra de la perspectiva central, que han alimentado infinitas controversias teóricas en los últimos siglos. ¿Qué ha pasado?

En un primer momento, los matemáticos fueron los únicos en mantenerse al margen de la nueva geometría, y de su desarrollo por los dibujantes. No podían renunciar a la forma sintética defendida por Platón y realizada por Euclides, en una época muy anterior a la difusión del papel. Los "Elementos" pueden estudiarse en la playa, dibujando las figuras sobre la arena, ubicando sus partes con unas pocas letras y, luego, como diría Descartes, cerrando los ojos y meditando. Y estos pintores, ahora, pretendían multiplicar los dibujos, abandonar la abstracción y la eternidad penosamente conquistadas sobre la pereza connatural al ser humano, y volver a pensar con los ojos imperfectos, no con el alma divina, sacrificando los universales para concentrarse en un

Para mí, Villard destaca especialmente por su inventividad en las combinaciones motívicas (ar.dr.) y en la geometría generadora (ab.dr.), donde se muestra a la altura de los dibujantes árabes: véanse, por ejemplo, los tres peces compenetrados (ab.iz.) o los estudios combinatorios entre círculos y cuadrados (ab.dr.). También destaca su estudio del movimiento. Así, su rueda de la fortuna (ar.iz.) es un móvil (el cetro y la corona no se caen), pero también un estudio abstracto del triángulo sometido a un movimiento circular. La Bauhaus recordará esta lección.

Dibujos del cuaderno de Villard de Honnecourt (hacia 1230).

miserable mundo de pigmentos, frágil y mudable, desesperadamente plano y abiertamente engañoso...

Filippo Brunelleschi (1377-1446) descubrió las reglas básicas de la perspectiva central; Leon Battista Alberti (c.1404-1472) las expuso, por primera vez, en su tratado "Della pittura" en 1435. Piero della Francesca (c.1416-1492) las precisó en su "De prospectiva pigendi" (c.1480) y Leonardo da Vinci (1452-1519) notó sus observaciones al respecto en sus famosos cuadernos, a principios de los años 1490.

En cambio, hubo que esperar las reflexiones del ingeniero y geómetra francés Gérard Desargues (1598-1662), para disponer del primer estudio propiamente matemático de la proyección central. Era amigo de René Descartes (1596-1650) y sus trabajos, hoy en gran parte perdidos, fueron admirados por Blaise Pascal (1623-1662), que estudió la proyección de las cónicas. Más adelante, Gaspard Monge (1746-1818) desarrolló la geometría descriptiva, es decir, esencialmente, la proyección paralela diédrica, y Jean-Victor Poncelet (1788-1867) terminó la descripción de la proyección central, definiéndose entonces un nuevo espacio y una nueva matemática: la *geometría proyectiva*. A pesar de lo que su nombre indica, es una disciplina muy abstracta y difícil, que aporta métodos de resolución sofisticados (anticipados por los trabajos de Pascal) para la resolución de problemas mecánicos complejos: afortunadamente, estos métodos han quedado obsoletos con el desarrollo de la informática.

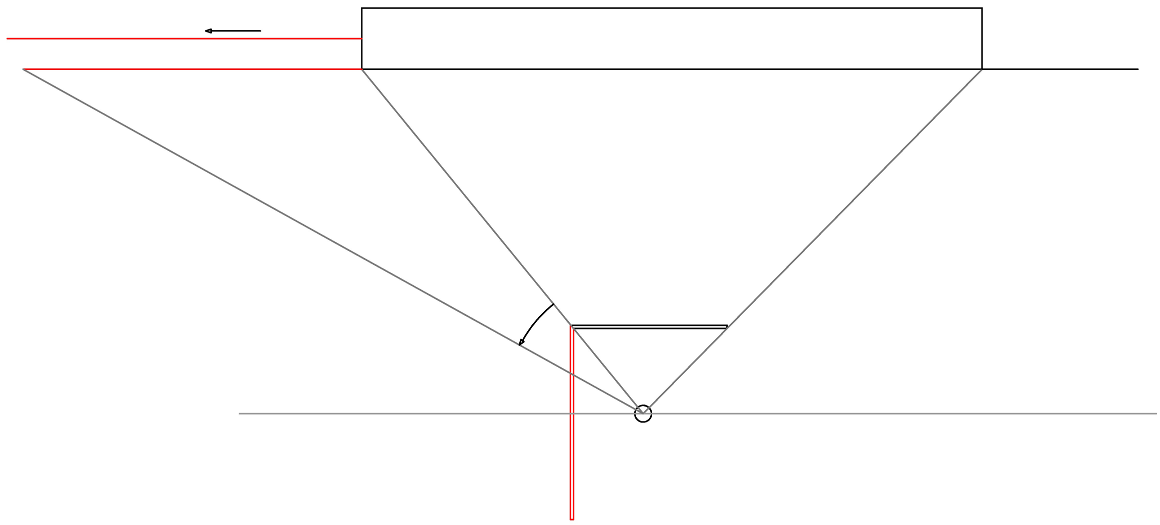
Ahora bien, si la perspectiva fue desarrollada como recurso perceptivo y expresivo por los pintores italianos y flamencos, podemos decir que su integración a las matemáticas modernas fue esencialmente un invento del ejército francés: Desargues era militar, Monge creó l'École Polytechnique y Poncelet acabó su carrera como general. Las teorías de Monge fueron incluso consideradas, en su época, como un secreto militar. El origen castrense de la ingeniería es bien conocido, y Leonardo da Vinci fue uno de los últimos en poder proclamarse a la vez artista e ingeniero (como Monge, escribió sobre la fabricación de los cañones). En la era moderna, se impuso una separación cada vez más estanca entre arte y técnica. Parecía que, para poder ganar sus letras de nobleza geométrica, la teoría proyectiva tenía que pasar de la artesanía a la artillería. Y el resultado fue que su generalización geométrica no se hizo en torno a la percepción visual, sino en un puro anhelo de universalidad, que pudiera amparar las aplicaciones técnicas más abstractas, que ni el mismo Platón hubiese soñado. De hecho, los griegos, ellos, siempre habían rechazado integrar las proyecciones a su geometría sintética.

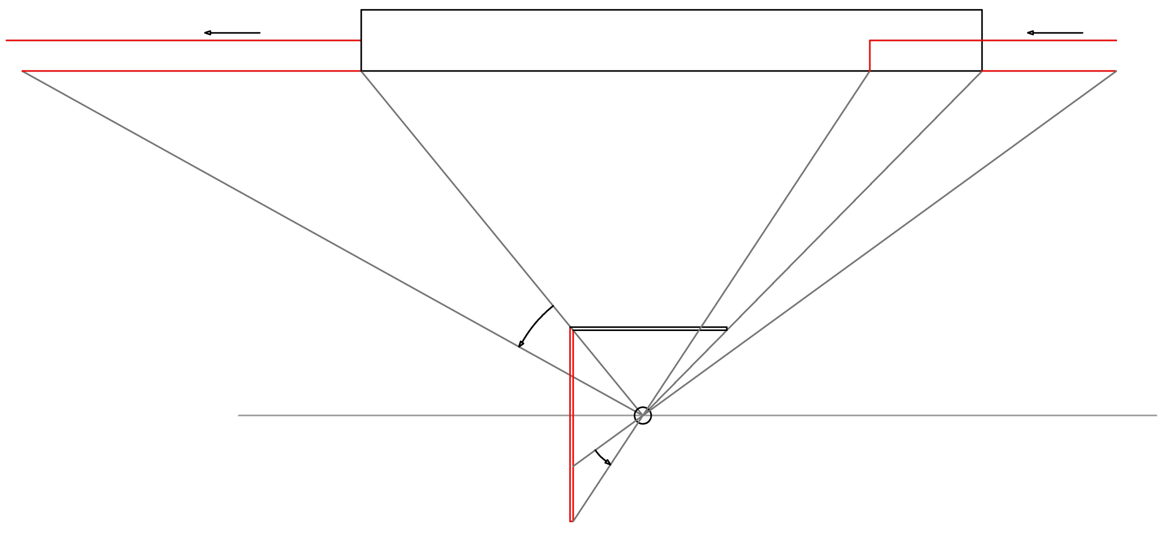
La "Óptica" euclidiana es muy clara al respecto. La primera proposición de este tratado reza que "ninguno de los objetos vistos se ve entero al mismo tiempo"[1], y el libro se abre postulando que "las líneas rectas trazadas a partir del ojo se propagan a lo largo del espacio" y que "la figura contenida por los rayos visuales es un cono que tiene el vértice en el ojo y la base en los extremos de los objetos vistos", de modo que "sólo se ven los objetos en los que los rayos visuales inciden". La óptica debe por lo tanto desarrollarse como una *estructura temporal*, no porque la luz se desplaza (su velocidad es, desde luego, infinita a escala humana), sino porque el ojo es activo: él rastrea para apropiarse la escena, y de él parten los rayos visuales. Este rastreo, hoy empleado continuamente en las pantallas o en los algoritmos de renderización, se deduce ya naturalmente del estudio de la percepción visual. El modelo euclidiano para la proyección es equivalente al que nos sugiere un cañón de proyección: los rayos proyectivos son semirrectas que divergen desde el centro de proyección; si interceptan un objeto, lo proyectan, es decir: lo hacen visible. La proyección es por lo tanto un proceso de rastreo de la escena a partir del ojo; la divergencia de los rayos es causa de que los objetos lejanos son menos nítidos (proposición 2) y más pequeños (proposición 5); cualquier objeto, por grande que sea, podrá quedar enmascarado por otro objeto diminuto, a partir de cierta distancia: el pie de Heráclito puede esconderle el sol...

Los "Elementos" de Euclides son una pura estructura fuera-del-tiempo, donde la geometría se desenvuelve con la forma universal y atemporal que exigía Platón. Pero, cuando el

---

[1] "Óptica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.





No se podría insistir demasiado en la diferencia fundamental entre lo que llamo las versiones *orientada* (arriba) y *no-orientada* (abajo) de la proyección central. La versión orientada es la del proyector, del dibujo sobre calco y también de la cámara fotográfica: trabaja con proyectantes semirrectas y sólo puede proyectar la mitad del espacio tridimensional (delante o detrás del plano desvanescente, según la definición adoptada). La versión no-orientada, cuyas proyectantes son rectas infinitas, proyecta el espacio entero, y no corresponde a ningún dispositivo realizable: es la perspectiva de los geómetras decimonónicos, con su elegancia formal y sus rupturas topológicas. La versión orientada es, forzosamente, temporal (los rayos se trazan); la versión no-orientada es, forzosamente, fuera-del-tiempo.

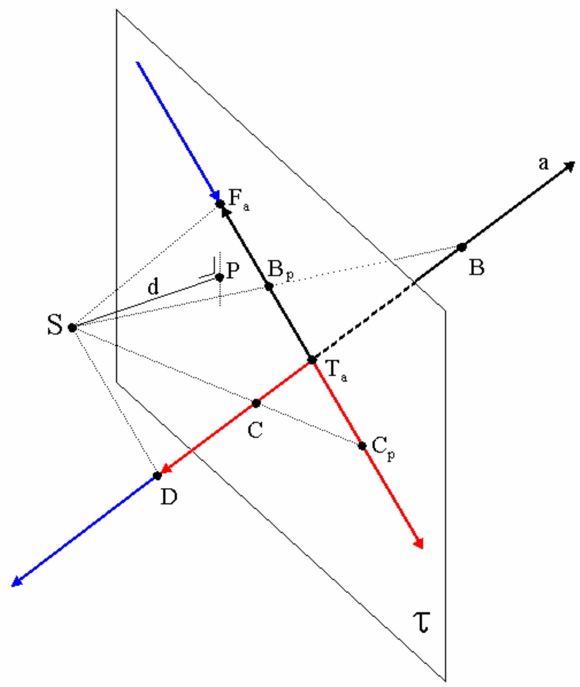
“Las dos versiones de la proyección”, el autor y Gori Moya.

matemático alejandrino se dirige hacia la óptica, ya no puede ignorar el aspecto temporal. Por ello, su óptica se desarrolla aparte de la geometría, a pesar de que sus herramientas demostrativas son puramente geométricas. Los neoplatónicos concluirán que la geometría es inferior a la aritmética, porque necesita desplegarse en el espacio, y que la óptica es inferior a la geometría, porque se despliega también en el tiempo. Los rayos visuales son *orientados*: son semirrectas con dirección y sentido, que se propagan desde el ojo hacia la escena.

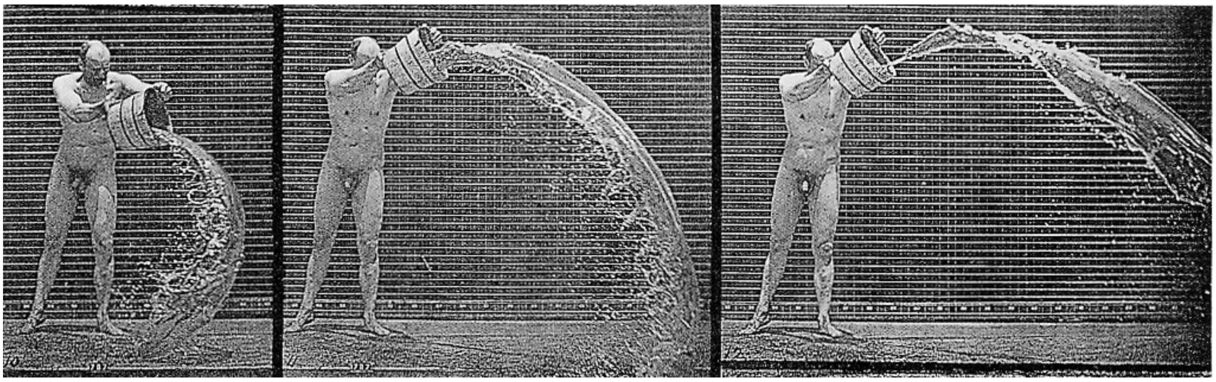
¿Y que hicieron los matemáticos del siglo XIX? En vez de "rayos" usaron el término más neutral de "proyectantes", y consideraron estas rectas como infinitas, *no-orientadas*: en vez de "intercepciones", sufren simples "intersecciones", y las imágenes no se proyectan sobre una "pantalla" sino que se forman sobre un "cuadro". Desaparece el aspecto temporal. Así concebida, la proyección puede integrarse definitivamente a la geometría sintética, como estructura fuera-del-tiempo.

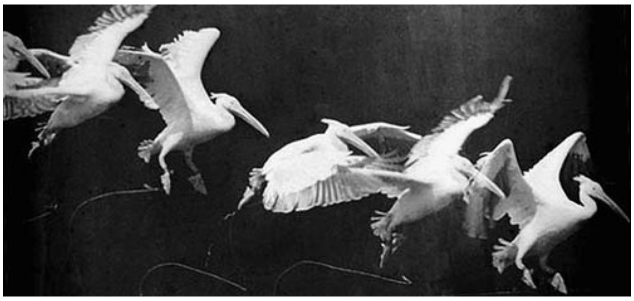
Esta versión no-orientada es matemáticamente elegante. Consideremos, por ejemplo, un cuadro esférico. Excepto en los casos degenerados (centro de proyección sobre el cuadro o proyectante tangente al cuadro), las proyectantes presentan siempre dos intersecciones con el cuadro, independientemente de la posición del centro de proyección. En cambio, para la versión orientada, se dan dos casos. Si el centro de proyección es exterior a la esfera, los rayos la interceptan dos veces. Naturalmente, si la pantalla es opaca, sólo se considerará el primer encuentro (eliminación de las "partes escondidas"). Si el centro de proyección se halla dentro de la esfera, habrá solamente una intercepción, ya que los rayos son semirrectas.

Consideremos ahora el caso del cuadro plano. La versión no-orientada se muestra otra vez muy elegante, porque la imagen de una recta infinita es también infinita. Sea una recta a, el centro de proyección S, la traza T_a de la recta en el cuadro y su punto de fuga F_a. Observamos que la imagen a_p de la recta se divide en tres partes: el segmento T_aF_a representa la parte de a situada más allá del cuadro; a partir de T_a, se proyecta la parte de a ubicada entre el cuadro y el plano desvanecente; pero la parte de a que se encuentra más acá del plano desvanecente se proyecta del otro lado, a partir de F_a. Por lo tanto, la recta proyectada a_p es también infinita, pero se produce una ruptura topológica, ya que el punto de fuga une en la imagen dos partes separadas de la recta proyectada. En la versión orientada de la proyección, desaparece la proyección de la parte de a que se encuentra más acá del plano desvanecente, y que está, por así decirlo, detrás del ojo; y es que, en la versión orientada, el centro de proyección se identifica naturalmente con un ojo: la imagen obtenida es topológicamente coherente, pero incompleta (la recta infinita se proyecta ahora como una semirrecta, que fuga hacia F_a), porque se ha eliminado lo que no se puede ver.

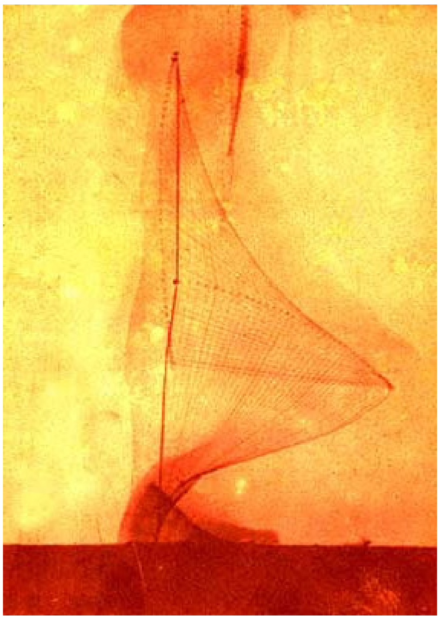


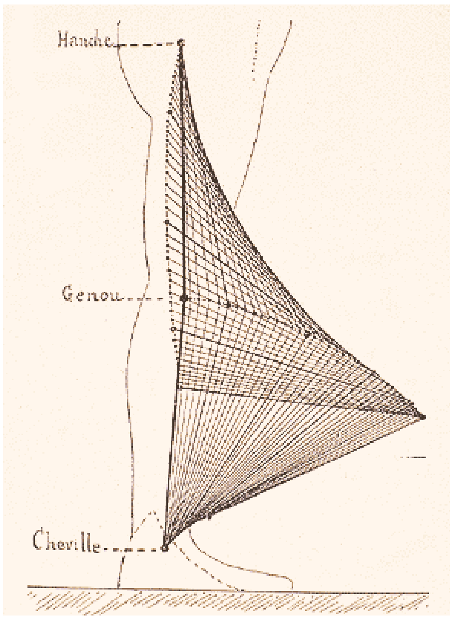
Entendemos luego el interés de la versión no-orientada: se aleja de la percepción visual, pero simplifica la formulación matemática (la imagen de una recta es una recta,...) y permite representar enteramente el espacio infinito (con la única excepción, marginal, del plano





A finales del siglo XIX, Eadweard Muybridge, y luego Étienne-Jules Marey, utilizaron la fotografía para capturar el movimiento. Marey se defendió de cualquier similitud entre sus trabajos científicos y los efectos del cine naciente. Los trabajos de ambos precursores se inscribían en una tradición mucho más antigua, la de Villard y Leonardo: ¿cómo se mueven los caballos, los humanos y las aves? ¿Cómo se expresa, geométricamente, la dinámica del agua (Muybridge) o del humo (Marey)?





“Hombre tirando un cubo de agua”, Eadweard J. Muybridge; “Vuelo de pelícano” y “Estudio de una flexión de rodilla”, Etienne-Jules Marey.

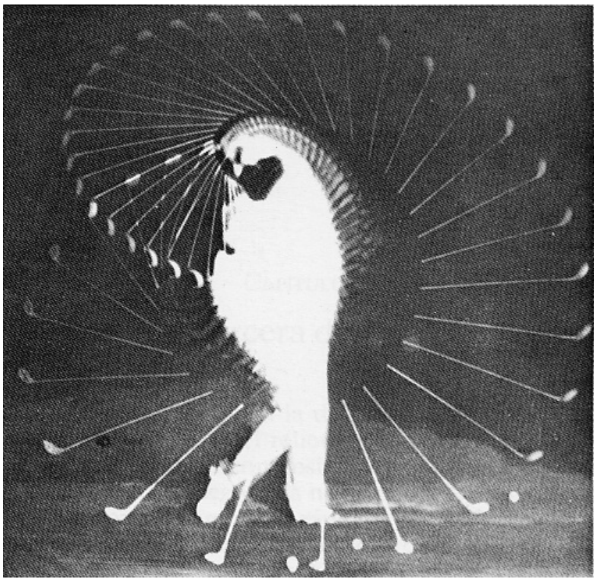
desvanecente). Comparte tal propiedad con la proyección diédrica de Monge: las trazas y proyecciones en dos planos ortogonales (Monge) o las trazas, los puntos de fuga y las líneas de fugas (proyección central) permiten representar los objetos infinitos de Euclides - el plano, la recta - y manipularlos.

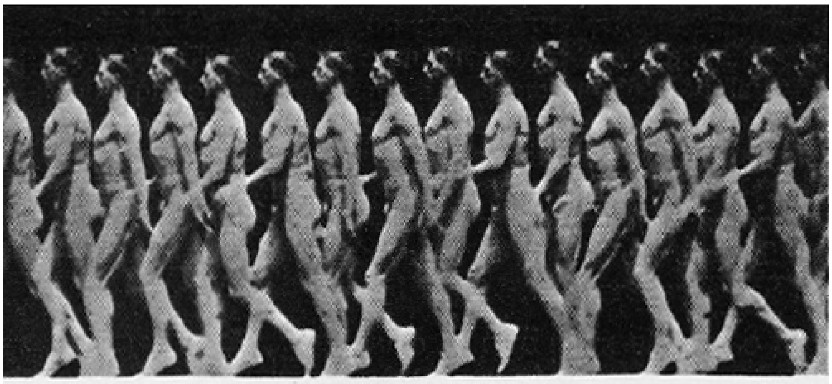
La geometría proyectiva del siglo XIX se encuentra luego en una posición algo inconfortable. Comparada con la geometría diferencial, es algo anticuada, anacrónica, porque su verdadera utilidad es para con los objetos euclidianos, infinitos y no infinitesimales. Por ello, sólo pudo participar al progreso científico en su parte más técnica, y se vio reducida a una utilidad, como base del dibujo técnico. Comparada con la geometría sensible, es exageradamente abstracta. Ni siquiera engendró las técnicas de dibujo perspectivo que en ella se justifican (como los métodos del geometral, de las diagonales o de la cuarta proporcional), las cuales habían sido descubiertas, mucho antes, por los pintores. Igualmente alejada del ojo y de la ciencia moderna, se refugió en un callejón sin salida, donde permaneció, soberbia y prestigiosa, con su compás, su regla y su escuadra, hasta que su pobre armamento caducara.

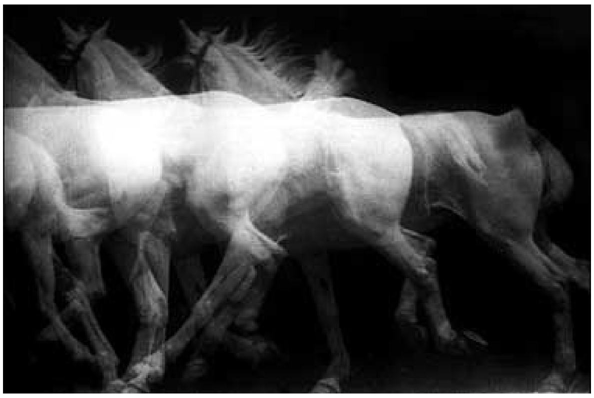
En efecto, el ordenador, como el ojo, no puede concebir el infinito. Ni la geometría de Monge ni la de Poncelet le son de gran utilidad. La algorítmica geométrica procede como la óptica de Euclides, como la perspectiva manual de Brunelleschi: *trazando rayos*. Como el propio ojo, trabaja naturalmente con la versión orientada de la proyección, que constituye el núcleo central de un método hoy en auge: el *trazado de rayo*. Los rayos, emitidos desde el ojo, o desde las fuentes de luz (o de sonido, o de cualquier otro fenómeno cuya propagación se quiera estudiar) interceptan los objetos, se reflejan o se refractan, se curvan o se multiplican, hasta desvanecerse o alcanzar, finalmente, los receptores, llevándoles una información diversamente alterada a lo largo de su recorrido... La perspectiva es ya solamente un primer resultado de la proyección, la cual estudia, más allá, la radiación de las energías en el espacio, para representarla gráficamente sobre la pantalla.

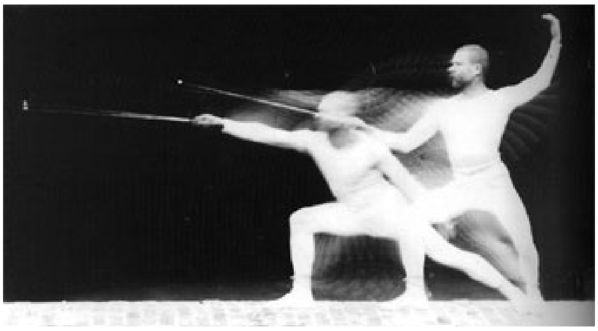
En la pantalla, las imágenes se hacen ligeras y fugaces. Las reglas y recetas de proyección, esparcidas en los manuales, han perdido su sentido. ¿Para qué aprender a hacer caber toda la escena en un determinado cuadro, si podemos desplazar una cámara virtual de forma interactiva? ¿Porqué confiar en una sola proporción ideal para la axonometría, si podemos deformarla al antojo, hasta obtener la vista que más nos agrade? Un primer resultado de la pantalla, es de haber liberado la axonometría, del mismo modo que la fotografía había soltado la perspectiva central. Las isometrías o las dimetrías son ciertamente más fáciles de dibujar a mano, pero comprobamos ahora que el ojo suele preferir la trimetría, porque su menor simetría engendra mayor riqueza visual, y un riesgo menor de ambigüedad. Nuestro ojo se hace más exigente: quiere observar los espacios virtuales con la misma libertad de que dispone en el mundo real. Las imágenes se animan. Por otra parte, las distintas proyecciones se unifican. ¿Qué son las proyecciones paralelas, sino casos límites de la proyección central, cuando las dimensiones del objeto examinado se hacen pequeñas con respecto a la distancia que lo separa del ojo? Las proyecciones se combinan, con toda naturalidad, porque cada imagen nace del encuentro de una proyección de la luz, y de otra del ojo: exactamente como lo decía Aristóteles. ¿Qué es la perspectiva caballera? Una sombra producida por el sol, y que nos revela los laterales de un edificio mirado de frente, proyectándose de nuevo, centralmente esta vez, para penetrar el ojo. Todo eso, ya lo sabíamos, pero podemos ahora manipularlo, conscientemente, con toda libertad. Nuestro gusto por la proporción ya no necesita de fórmulas preestablecidas, como la sección áurea, tan prácticas para asegurar el éxito de un penoso dibujo manual. Cuando diseñamos, podemos modificar las proporciones, hasta en las últimas etapas del proyecto, sin freno y sin trabas. Podemos también modificar los colores, sin esfuerzo.

En la historia de la humanidad, afirmaremos con toda seguridad que la difusión del trabajo sobre la pantalla constituye la tercera gran revolución geométrica, después de la difusión del papel, después de la elaboración perceptiva de la vieja intuición griega.









El movimiento y los apremios dinámicos crean nuevas figuras geométricas. Unas dejan su huella en la estructura de los caracoles o de los árboles, en los dibujos del viento sobre la arena, en las formas redondeadas de los cantos rodados, en los estratos de la tierra. Otras, más fugaces, pueden ahora captarse con dispositivos fotográficos. Motivos generadores, motivos generados: las dos caras de la geometría dentro-del-tiempo.

"Jugador de golf", H.E. Edgerton; "El saludo", A. G. Bragaglia; "Cronofotografía", "Caballo corriendo", "Esgrima", Etienne-Jules Marey.

La geometría proyectiva quedará como una bella curiosidad matemática, producida por la ambigüedad del papel, aquel soporte barato pero lento de trabajar, donde el penoso dibujo queda fijado para siempre. La pantalla acabó con su imposible anhelo de eternidad, y con la forzosa abstracción de los que sólo podían dibujar en el aire o en el polvo. La versatilidad del nuevo soporte nos libra de las formas cristalizadas, y de su carga ideológica. El espacio visual vuelve a ser libre e ingrávido, pero su memoria es infinita. En las animaciones y en la interactividad, lo trabajamos ya como queremos, explorando el tiempo, deteniendo el tiempo, conjugando las reglas intemporales con las del movimiento: la nueva geometría, como la música tonal, es una estructura dentro-del-tiempo, como la misma percepción visual del espacio.

En efecto, la gran limitación de la geometría sintética, desde un punto de vista perceptivo, es precisamente su esencia estática. El ojo no ve así, fuera del tiempo, y tampoco se pierde en el tiempo, fugaz y olvidadizo. Constantemente, pone en relación lo que está viendo con esquemas geométricos elementales, atemporales, para asegurar la coherencia de sus percepciones efímeras.

Deberíamos, por lo tanto, aprender a separar las figuras estáticas, que fundan la geometría fuera-del-tiempo, como una imprescindible biblioteca visual de situaciones estándar, parecida a la serie de los intervalos que estructuran la música tonal, y, por otra parte, las reglas de sucesión y de composición de estas figuras, que rigen su despliegue en el tiempo, y que nos permiten, luego, percibir la coherencia de un espacio que conocemos solamente a través de imágenes continuamente cambiantes.

Un ejemplo: el cuadrado constituye, sin duda, un esquema visual básico. ¿Y el rectángulo? Depende: si es muy parecido al cuadrado, lo percibiremos forzosamente como una deformación de este; lo mismo si se parece a la suma de dos cuadrados; si se alarga aún más, veremos una recta con anchura... El esquema rectangular básico presenta por lo tanto una relación entre sus costados próxima a la sección áurea (digamos: entre 1.3 y 1.7). El paralelogramo, en cambio, sólo puede percibirse de forma dinámica (un marco rectangular que se desploma hacia un lado: deformación del objeto) o cinemática (un rectángulo que cae hacia atrás o hacia adelante, en perspectiva: deformación de la imagen). La perspectiva es una deformación, implica movimiento. La armonía visual, como su equivalente musical, implica por lo tanto una doble definición de sus elementos constructivos, en cada imagen: como esquema fuera-del-tiempo y, a la vez, como función temporal.

Insistamos: aún limitada al estudio de las solas figuras geométricas en el espacio, a lo que Leonardo da Vinci llamaba la “perspectiva lineal” (por oposición a su “perspectiva atmosférica”), la geometría sensible debe ya considerarse como una estructura dentro-del-tiempo, separándose así definitivamente de las geometrías sintética y proyectiva. Uniremos la geometría y la óptica de Euclides, pero, en vez de acordar ésta a las exigencias estáticas de aquella, introduciremos en aquella el movimiento de esta. Quizás se cumpla así la intuición de Platón, en contra de su propio sistema: hay una forma dialéctica que gobierna la geometría sensible...

Origen de las ilustraciones

p.067 iz. hasta p.069 iz.: Français 19093, Bnf, *ex* "Cuaderno de dibujos" Villard de Honnecourt, hacia 1230, Francia. Texto en: "Villard de Honnecourt", Roland Bechmann, Picard Editeur, Paris, 1993.

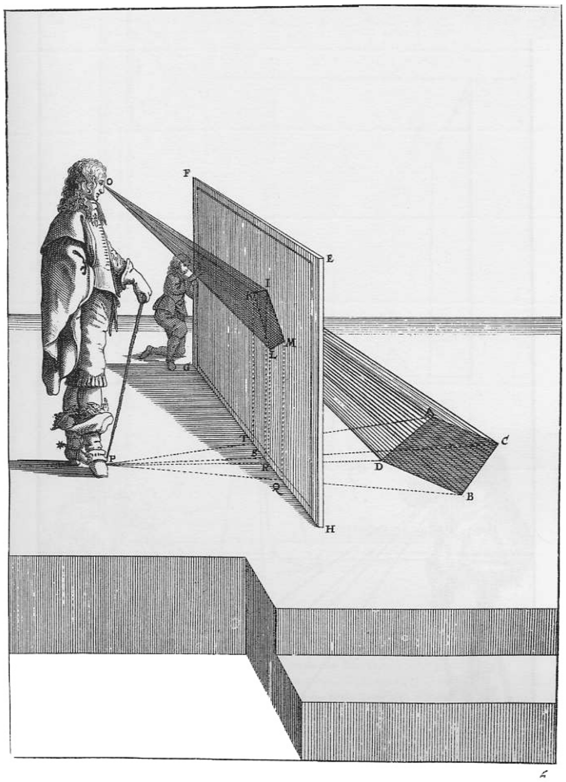
p.070 iz.: - "Las dos versiones de la proyección", dibujo propio, realización gráfica: Gori Moya.

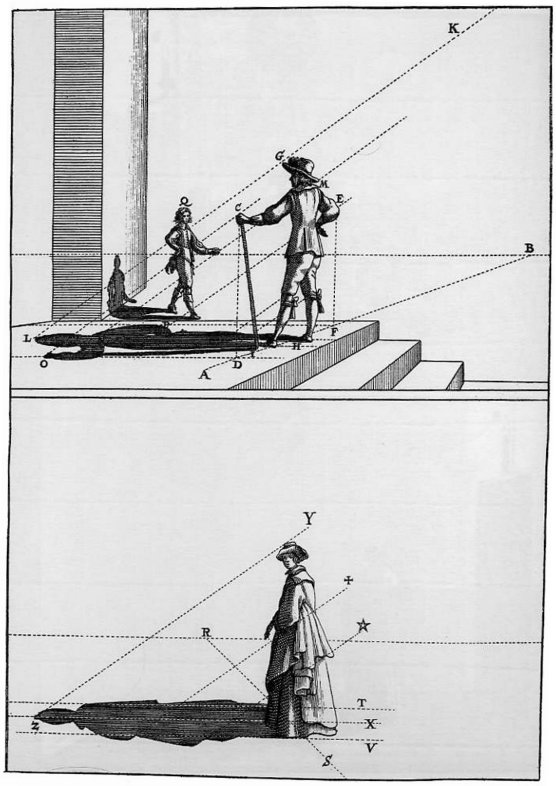
p.071 iz.: - "Hombre tirando un cubo de agua", Eadweard J. Muybridge (plancha 399 de "Human and Animal Locomotion", 1887), *in* "Artstudio-spécial Francis Bacon", n°17, 1990.
- "Vuelo de pelícano", Etienne-Jules Marey, *in* http://www.expo-marey.com.
- "Estudio de una flexión de rodilla", Etienne-Jules Marey, *in* http://www.expo-marey.com.

p.072 iz.: - "Jugador de golf", H.E. Edgerton (foto realizada con flash estroboscópico hacia 1935), *in* "Historia de la fotografía", Marie-Loup Sougez, ed. Cátedra,1994.
- "El saludo", A. G. Bragaglia (fotografía futurista, 1913), *in* "Historia de la fotografía", Marie-Loup Sougez, ed. Cátedra,1994.
- "Cronofotografía", Etienne-Jules Marey, *in* "Historia de la fotografía", Marie-Loup Sougez, ed. Cátedra,1994.
- "Caballo corriendo", Etienne-Jules Marey, *in* http://www.expo-marey.com.
- "Esgrima", Etienne-Jules Marey, *in* http://www.expo-marey.com.

- 10 -

Sobre las proyecciones





En la perspectiva central sobre el plano, con sus rayos convergentes (izquierda), puede aparecer otra proyección, la de los rayos luminosos. Los del sol son paralelos entre sí y, si la iluminación es perfectamente lateral, o sea si los rayos se desplazan en un plano frontal, seguirán paralelos en el dibujo (derecha).

Dos dibujos de Jean Dubreuil, “La perspectiva práctica” (1642-1649).

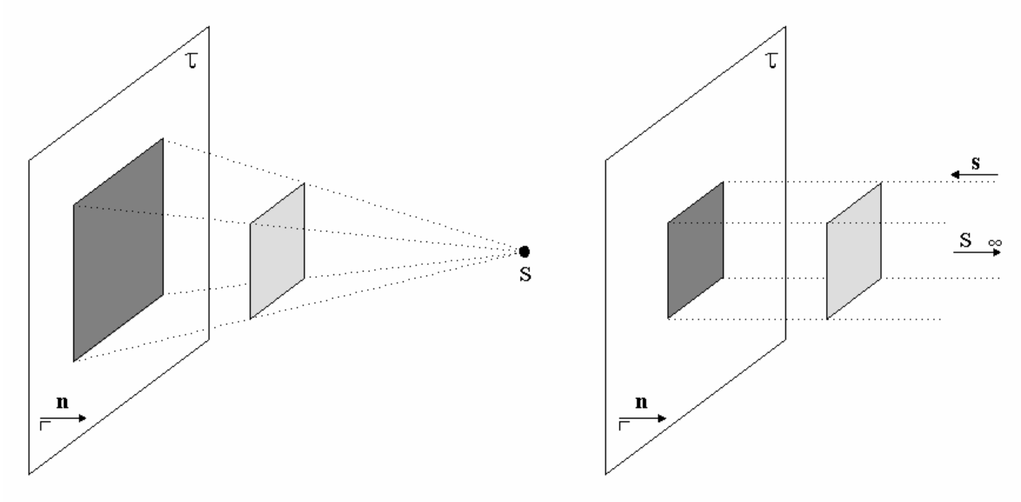
10. Sobre las proyecciones

- proyección paralela -

Toda *proyección* puede definirse como la *transformación* de un espacio de *m* dimensiones en un espacio de dimensión *n*.

Implica la definición previa de tres lugares geométricos: el que ocupa el *objeto* por representar, el del *cuadro* donde aparecerá la imagen y el que determina la misma proyección, generalmente asimilado a una "fuente" puntual (punto *S*) - el *centro de proyección* - de donde brotan los *rayos proyectantes*, semirrectas que interceptan a la vez el objeto y el cuadro; cada uno de ellos asocia así uno o varios puntos del objeto (los puntos proyectados) a un punto del cuadro (la proyección - o *imagen* - de estos puntos). Si la fuente es puntual y si el cuadro es plano, la imagen de cada punto interceptado por un rayo será siempre única y puntual.

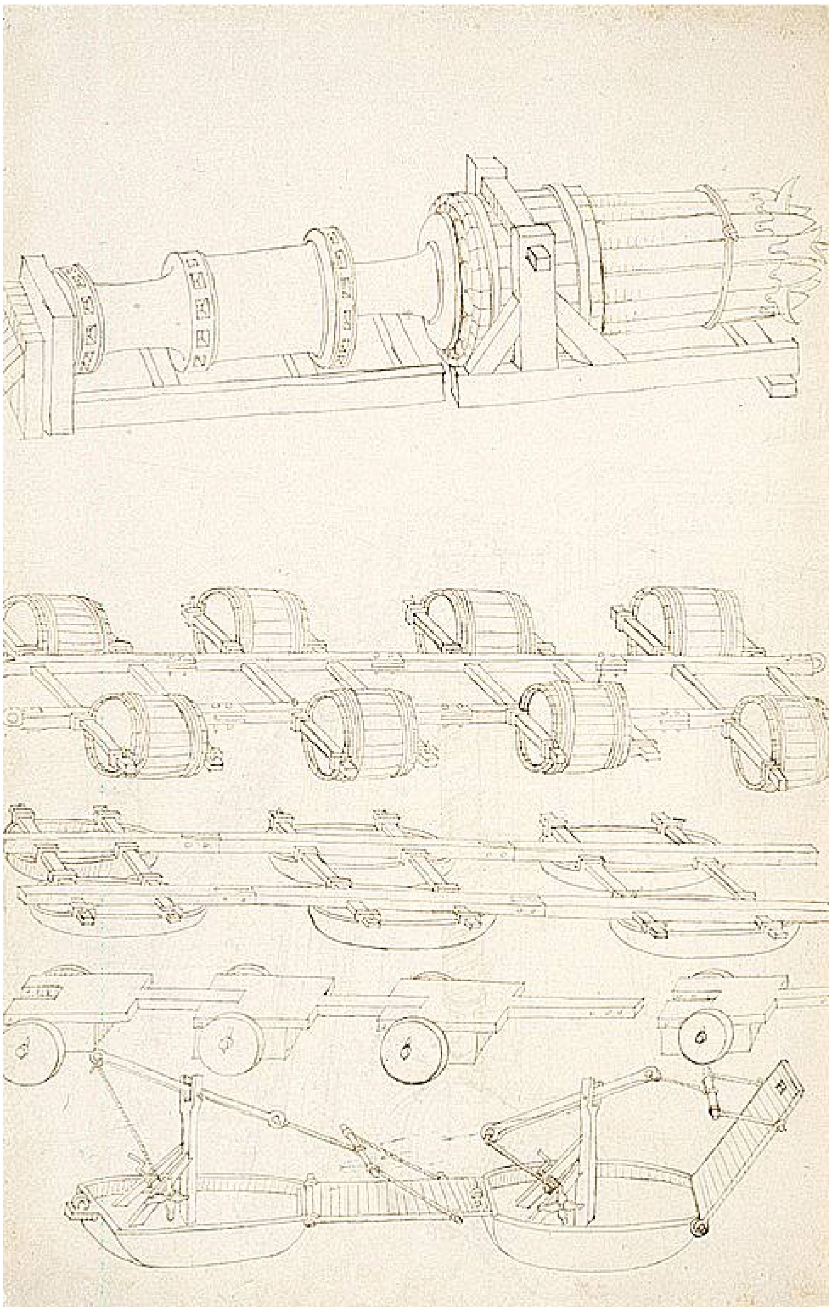
Tradicionalmente, el centro de proyección ha sido asimilado al *punto de vista*, e incluso al *ojo* que observa la *escena* (conjunto de objetos). Estas expresiones, que se explican, históricamente, porque la teoría moderna de las proyecciones ha sido desarrollada, en un primer momento, por pintores en busca de técnicas con las cuales mejorar la ilusión perspectiva en sus obras, se vuelven algo ambiguas cuando el centro de proyección está alejado al infinito, caso límite de lo que se da, visualmente, al observar un objeto relativamente pequeño con respecto a la distancia desde la cual se mira. Tampoco se pueden aplicar a las luces, que se proyectan, realmente, en rayos divergentes (iluminación artificial puntual) o paralelos (iluminación solar). Por ello, conviene preferir el término más general de *fuente de emisión*, aplicable tanto a las luces como al ojo, retomando para este último la antigua pero muy acertada teoría del *ojo proyect*ante.



A medida que la fuente S se aleja de la escena, la divergencia de los rayos disminuye, hasta el caso límite (ocular o solar), donde se hacen paralelos e infinitos. Sin embargo, siguen orientados, desde la fuente (alejada al infinito) hacia el objeto. Para describirlos, se substituye entonces la noción de "centro de proyección" *S* por la de "dirección de proyección" ***s***.

Según nos referimos a la divergencia de los rayos de proyección, a la configuración de su conjunto o a la apariencia del dibujo obtenido, hablamos, en el caso de una fuente próxima, de "proyección central", de "proyección cónica" o de "verdadera perspectiva" y, en el caso de una fuente al infinito, de "proyección paralela", de "proyección cilíndrica" o de "falsa perspectiva".

La primera terminología es la mejor, pues pone en evidencia la importancia del centro de proyección en la perspectiva central y del paralelismo de los rayos proyectantes en la perspectiva paralela. En efecto, la primera es extremadamente sensible a la posición de su punto de vista, mientras que la segunda destaca por sus propiedades fundamentales, que se deducen directamente del paralelismo de sus rayos. Estas propiedades son:



En la Europa medieval y renacentista, las proyecciones paralelas son muy poco frecuentes. Aquí, Francesco di Giorgio Martini hace uso de una representación axonométrica para describir un cañón y diferentes puentes flotantes.

Axonometrías, "Tratado de arquitectura", Francesco di Giorgio Martini (siglo XVI).

- toda figura inscrita en un plano paralelo al cuadro se ve en *tamaño real* (es decir: se proyecta sin escalar);
- las proyecciones de dos rectas paralelas entre sí son también paralelas entre sí;
- las relaciones de distancias entre tres puntos alineados permanecen entre sus proyecciones (por ejemplo: la imagen del punto mediano de un segmento está en la mitad del segmento proyectado).

La *proporción* es, por lo tanto, un *invariante* para la perspectiva paralela, como el paralelismo.

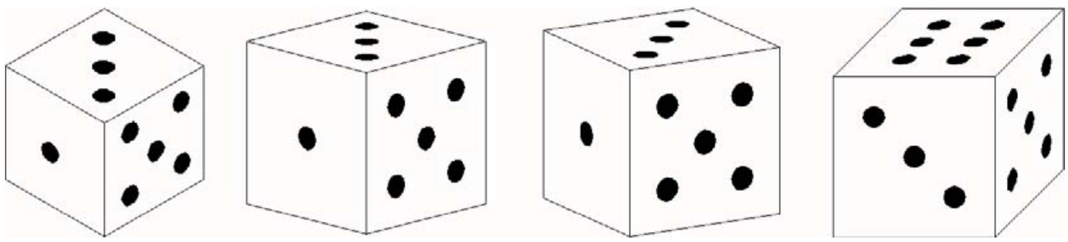
Sea $\boldsymbol{n}$ la normal al cuadro. Dos configuraciones se presentan para la proyección paralela: en la *proyección ortogonal*, los rayos son perpendiculares al cuadro ($\boldsymbol{s} = \pm\, \boldsymbol{n}$). En el caso general ($\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{n}$), hablamos de *proyección oblicua*.

Llamamos *axonometría* el uso de la proyección paralela que produce, en la imagen, un efecto de perspectiva, es decir la sugestión de cierta profundidad en el ojo. Este efecto nace siempre de cierta oblicuidad en el dibujo, tanto en el caso ortogonal como en el caso oblicuo, razón por la cual generalizamos, con muchos autores, el uso de la palabra axonometría, a diferencia de otros autores, generalmente más antiguos, que la aplicaban al único caso ortogonal.

Para disfrutar plenamente las propiedades de la proyección paralela, se imponen ciertas condiciones sobre el objeto: nadie intentaría dibujar una nube en axonometría. El objeto debe describirse fácilmente en sus *ejes principales*, ortogonales entre sí, y presentar cierto grado de paralelismo. En la práctica, el uso de la proyección paralela se limita a aquellas construcciones humanas (edificios, objetos manufacturados) que presentan una forma de tipo paralelipipédico, o que pueden derivarse de un cubo unitario, el cual sirve de ejemplo para clasificar las diferentes variantes de proyección, al materializar los tres ejes principales de cualquier objeto proyectable.

En la axonometría ortogonal, distinguimos, según la relación entre los tres ángulos separando los ejes proyectados, la *trimetría* (los tres ángulos son diferentes), la *dimetría* (dos ángulos iguales) y la *isometría* (los tres ángulos son iguales a 120°).

En la axonometría oblicua, distinguimos el caso de la *perspectiva caballera*, donde una de las caras del cubo se ve frontalmente, y por lo tanto en tamaño real: dos de los ejes principales permanecen entonces perpendiculares en la imagen, mientras que el tercero presenta, generalmente, una inclinación de 45°, más fácil de dibujar.



Todas las axonometrías responden, forzosamente, a algún aspecto de nuestra experiencia visual: de no ser así, el ojo no sería sensible a su efecto perspectivo. Isometrías, dimetrías y trimetrías corresponden a la visión que podemos tener, por ejemplo, de un dado que rodamos entre los dedos, a cierta distancia del ojo (muy cerca, sus aristas fugarían ostensiblemente). Las sombras arrojadas por el sol, en cambio, producen naturalmente todo tipo de perspectiva oblicua.

Aunque la impresión retiniana de un objeto fugue ligeramente, nuestra mente, propensa en descubrir los paralelismos presentes en la escena, la traducirá inconscientemente en axonometría, corrigiendo naturalmente la convergencia óptica inducida por la perspectiva: por ello, resulta absurdo tachar las axonometrías de "falsas perspectivas", cuando, en realidad, tienen sus propias condiciones de vigencia, como todas las demás formas de perspectiva.

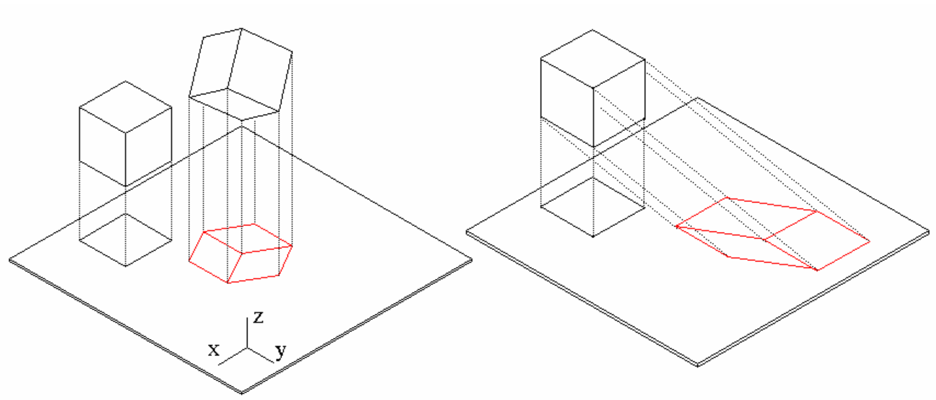



La iluminación persa conoce su época de gloria entre los siglos XVI y XVII. Hay un dibujo extremadamente libre, que despliega sus curvas en un espacio natural totalmente reacio al pensamiento proyectivo (arriba), el mismo que se da en todo el Oriente, hasta Japón, y que sigue sensible hasta en los dibujos del famoso Hokusai. ¿Cómo se tratan los interiores? Dos planos (el suelo y el fondo) abatidos, como en el método de Monge, fundidos en uno solo, irremediablemente plano (abajo). Así, esta rigurosa geometría estática se opone notablemente a la libertad de los personajes y de sus movimientos

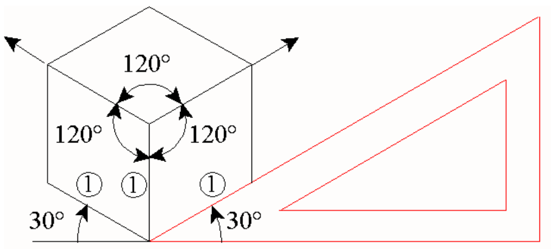
Iluminaciones persas de los siglos XVI y XVII.

Por otra parte, el teorema de Pohlke reza que, en el plano del dibujo, tres segmentos cualesquiera originados en un mismo punto siempre constituyen cierta proyección oblicua de un sistema ortogonal unitario del espacio. Esta propiedad explica el éxito de la axonometría entre los dibujantes aficionados: cualquier representación de un cubo corresponderá siempre a una proyección correcta, cuales sean los factores de escala aplicados a cada una de sus direcciones, mientras se respete el paralelismo. Desde luego, el dibujo puede ser tan deformado que no resulte muy agraciado; aún así, no lo será más que aquellas sombras agigantadas del amanecer, y, por lo tanto, no saldrá nunca de nuestra experiencia visual...

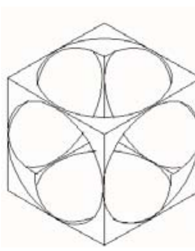
Para resaltar el efecto perspectivo de una proyección oblicua, conviene orientar el objeto frontalmente (perspectiva caballera), ya que la misma oblicuidad de los rayos producirá el efecto de profundidad. En cambio, en la proyección ortogonal, parece necesario que las direcciones principales del objeto estén orientadas de la forma más oblicua posible, con respecto al cuadro.



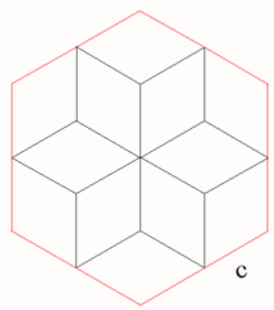
Sin embargo, la forma más oblicua, la isometría, presenta ciertas dificultades. Es muy fácil de dibujar (ver figura a[1]), y mantiene las proporciones internas del objeto sin privilegiar ninguna de las tres direcciones principales (figura b), al contrario de la proyección caballera. Sin embargo, por su mismo exceso de simetría, crea fácilmente ambigüedades en el dibujo, cuando las rectas situadas en el primer plano y las del plano trasero concurren (figura c) o se recubren (figura d), en cual caso conviene recurrir a la dimetría (figura e).



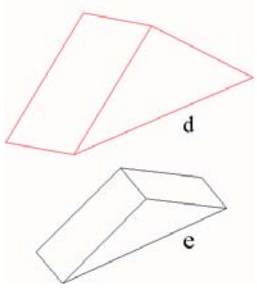
a



b



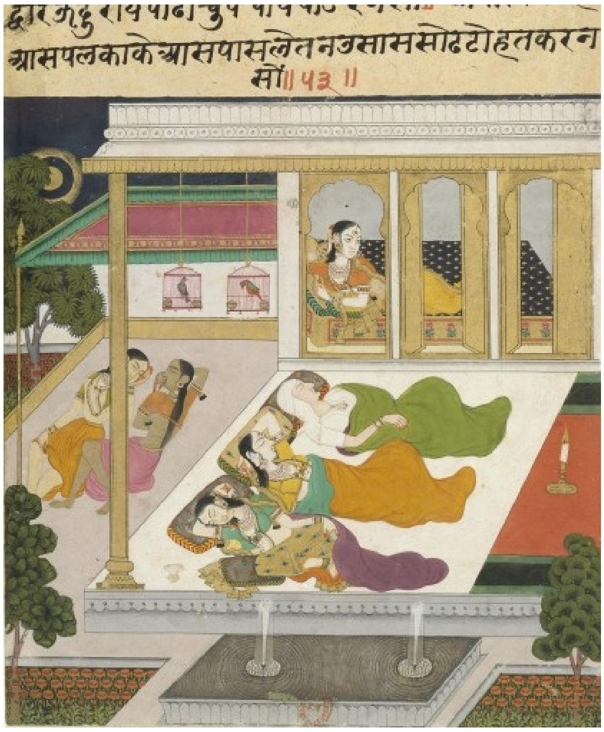
c



d

e

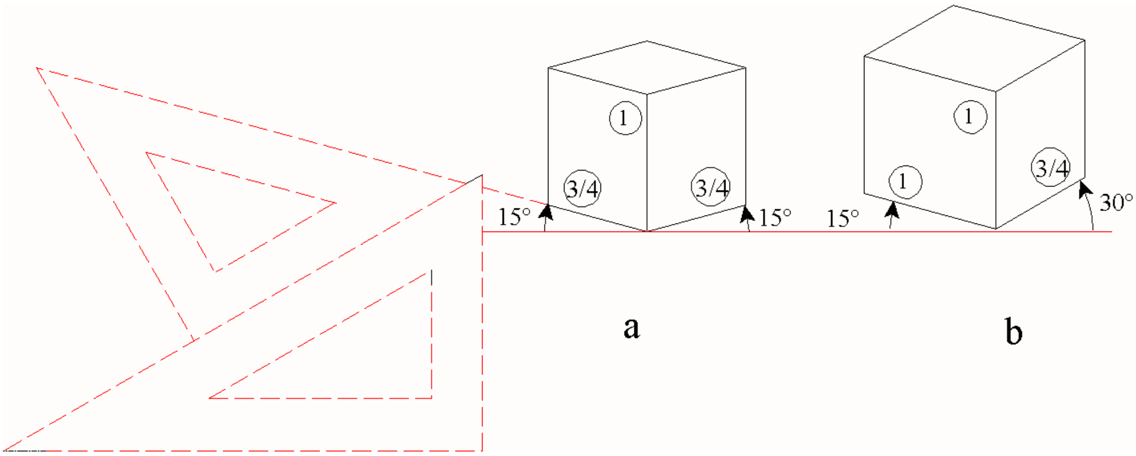
[1] Inspirado en “Dibujo y proyecto” (p.180 y 183), Francis D.K. Ching, Gustavo Gili, 1999, México.



A menudo, sin embargo, la libre naturaleza y la severa geometría humana se mezclan. Pasan entonces cosas muy curiosas (arriba), complejos juegos geométricos entre un espacio de curvas y otro de rectas. La separación total entre lo natural y lo humano se mantiene cuando se hace necesario hacer percibir más precisamente el espacio. Entonces, lo humano se proyecta en axonometría (abajo).

Iluminaciones persas (ar.), turca (ab.iz.) y moghol (ab.dr.).

En todo caso, la dimetría y la trimetría suelen dar mejores resultados visuales que la isometría, por permitir a la vez mucha oblicuidad y poca simetría. Los manuales de dibujo perspectivo del siglo pasado solían aconsejar el uso de unas formas isométrica, dimétrica y trimétrica fáciles de reproducir con escuadra y cartabón. Con el ordenador, hemos aprendido a pasarnos de estos modelos cristalizados, y a buscar en cada ocasión la forma de proyección conveniente, que deforme menos el objeto y resalte más el efecto perspectivo: en general, se trata de una trimetría.



Existe un uso de la proyección ortogonal opuesto a la axonometría, el del *dibujo técnico*. Si orientamos el objeto de forma que sus direcciones principales presenten la menor oblicuidad posible con respecto al plano del dibujo, se suprime el efecto perspectivo. En el caso de un cubo, su proyección es un simple cuadrado, en tamaño real, pero que no nos indica de ningún modo a qué objeto tridimensional corresponde. En el *dibujo multivista*, se utilizan tres proyecciones del objeto, ordenadas según una estricta convención, de modo que el destinatario pueda medir sobre el dibujo, y reconstituir exactamente el objeto (a veces, hacen faltas proyecciones adicionales). Gaspard Monge ha mostrado, con su *método diédrico*, que bastan dos proyecciones sobre sendos planos ortogonales entre sí para describir un objeto tridimensional: las dos proyecciones de los puntos y de las rectas y las dos trazas de los planos bastan para determinarlos exactamente. El método de Monge constituye, sin embargo, la forma más abstracta posible de dibujo, que rechaza totalmente la sugestión perspectiva, de modo que la tercera dimensión se ha de reconstituir mentalmente, y no visualmente.

En conclusión, la proyección paralela nos obliga a pensar constantemente en el objeto proyectado, cuyas propiedades geométricas y cuya orientación respecto al cuadro determinan esencialmente el interés de esta proyección como método de dibujo, y su capacidad de sugerir profundidad en el plano de la imagen.

* * *

- *proyección central* -

La proyección central sobre un cuadro plano ha sido ignorada por civilizaciones brillantes, que no parecieron echarla de menos. Según Vitruvio, los griegos la llamaban *escenografía*, lo cual indica que sólo la hacían servir para los decorados de sus teatros, cuya configuración (el público dispuesto en semicírculo y una escena muy poco profunda) no le podía dejar mucho protagonismo. Se perdieron los tratados helenísticos al respecto (puede que el mismo Euclides haya escrito sobre ella).

En "La redición de Qandahâr" (arriba), la ciutadela está representada en una rigurosa perspectiva caballera, mostrando exactamente sus medidas y disposiciones, ante vencedores y vencidos reunidos en el primer plano. En China (abajo), se dibuja exactamente del mismo modo: los edificios se miden en axonometría, mientras que la naturaleza, libre y generosa, sólo sufre los efectos de la perspectiva aérea hacia la cual montes y árboles se declinan solapándose unos a otros...

Pinturas moghol (ar.) y chinas (ab.) del siglo XVII.

La ambigüedad de esta forma proyectiva puede resumirse así: a diferencia de la axonometría, no condiciona el objeto, y se aplica naturalmente a las escenas más variadas, a los paisajes. La pintura holandesa del siglo XVII, luego la fotografía y el cine, nos han inmerso en un mundo de imágenes perspectivas que percibimos fácilmente, pero que no se dejan analizar geométricamente, porque tampoco se dejan modelizar los objetos representados: nubes, olas, vegetación, y otras figuras "amorfas". Para descubrir las reglas de esta perspectiva, hay que aplicarla primero a objetos más definidos, como los artefactos humanos. Pero, justamente, las principales propiedades de estos objetos (el paralelismo, la proporción) se pierden en la perspectiva central... Los chinos, entre otros, parecen haberse parado ante esta paradoja: magníficos pintores de paisaje, introducían siempre los edificios en axonometría. Y así, es imposible progresar...

Resulta muy lógico, pues, que el descubridor europeo de la perspectiva central, Filippo Brunelleschi, fuera un arquitecto en busca de efectos espaciales. Sin embargo, como lo comprobaron sus seguidores, ella no se deja tampoco manejar en el espacio, porque es demasiado sensible al cambio de punto de vista: los efectos perspectivos de la arquitectura se reducen luego a fenómenos en "trompe-l'oeil", que sólo se perciben desde un lugar muy preciso. De allí que la perspectiva volvió rápidamente al dominio de los pintores y de sus imágenes fijas, las cuales dominaron esta revolución óptica, única entre las civilizaciones humanas, sello del Renacimiento europeo, hacia el espacio perspectivo, y luego cartesiano.

Muchos historiadores han afirmado que la perspectiva central fue el gran descubrimiento occidental, característico del afán racional europeo, por el cual nuestra civilización se singulariza. No estoy de acuerdo. Creo que el arte europeo se singularizó mucho antes, con el desarrollo de la música como estructura dentro-del-tiempo, que Iannis Xenakis distinguía muy justamente de la armonía antigua, aunque fuera para censurar lo que, en toda verdad, creó la insigne originalidad europea: el sistema modal de las frecuencias sonoras, con sus proporciones trabajadas conjuntamente fuera y dentro del tiempo.

Creo que los renacentistas nunca hubiesen deparado en la importancia de las reglas perspectivas - al ejemplo de sus modelos greco-latinos -, de no haber sido por su formación musical, que les hizo contemplar ciertas correspondencias entre proporciones visuales y auditivas, con la esperanza de conseguir en las artes visuales lo que ya se había logrado en la música. Los grandes teóricos italianos, como Leonardo de Vinci, se maravillaron de que los escorzos perspectivos fueran regidos por las mismas mediedades pitagóricas que determinan los intervalos musicales. En tales observaciones se armó el gran sueño renacentista, su utopía de un mundo sensible lleno de correspondencias. Sólo faltó el libre manejo de las imágenes animadas, donde la perspectiva central se revela con toda su fuerza y todo su sentido: decorados de teatro, como la serie a la cual pertenece la famosa "Ciudad Ideal" (atribuida a Francesco Laurana), nos permiten, quizás, imaginar lo que hubiera podido ser un "cine de animación" renacentista, cuyas formas en movimiento se hubiesen desplegado con el mismo rigor de la música...

A pesar de la posterior generalización geométrica de la perspectiva por parte de los matemáticos franceses, se deja aún sentir su primer desarrollo, musical, a mano de los teóricos italianos, en todos los manuales de dibujo, y la mezcla de ambas finalidades - la matemática y la artística - ha generado las mayores confusiones. ¿Qué sentido tiene, por ejemplo, la distinción tradicional entre perspectivas con uno, dos o tres puntos de fuga? Para un geómetra, ninguno: hay tantos puntos de fuga en la imagen cuantas direcciones presenta el objeto proyectado. Pero, si consideramos el cubo como elemento estructural básico, podemos mostrarlo de frente (un punto de fuga), de soslayo (dos puntos), de frente en picado (dos puntos) o de soslayo en picado (tres puntos): sentimos en esta observación un ramalazo del sueño perdido de estructurar la perspectiva como una escala musical, a la vez fuera-del-tiempo (esquemas básicos de composición) y temporalmente (desplazamiento del ojo).

La óptica euclidiana no prestaba la menor atención a la fisiología del ojo y sólo se interrogaba, directamente, sobre "lo que se puede ver". Para los primeros perspectivistas, el

Esta dicotomía realza a la vez el perfecto orden de lo humano, y el generoso caos de la naturaleza, toda ramificaciones, obedeciendo a su propia ley. La caligrafía, como en la cultura árabe, juega entre lo uno y lo otro, une y separa, imitando a veces la regularidad humana, otras veces la fantasía natural.

Pinturas chinas del siglo XVII.

nuevo método limitaba aún más este campo, reduciéndolo a “lo que se puede representar”, es decir, esencialmente: la arquitectura. Para ellos, las nubes, por ejemplo, no tenían forma, y su representación no se podía concebir según las reglas de la *construcción legítima*. Entenderemos mejor el tenor de tal razonamiento - a priori tan extraño para nosotros como para los pintores chinos - tras recordar el ingenioso procedimiento que Brunelleschi puso en obra para demostrar la “veracidad” de la perspectiva central, en una experiencia inaugural, según la tradición, del nuevo método.

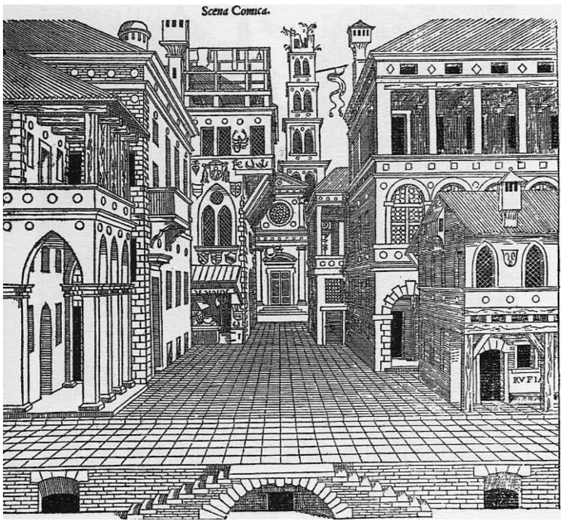
Tras pintar el baptisterio de Florencia, el florentino da la vuelta a su cuadro, lo emplaza al revés sobre el caballete, perfora un orificio en su centro, en la exacta posición del punto perspectivo, y hace disponer un espejo, paralelo al cuadro, entre éste y el baptisterio, a una distancia tal que, mirando por el agujero, se ve la imagen pintada reflejarse en el espejo e integrarse, sin solución de continuidad, en el paisaje real. Para simular en su pintura un cielo naturalmente cambiante, y que no se podía por lo tanto pintar, el artista recurre a una placa de plata bruñida, que corta siguiendo el perfil de su dibujo y con la cual adorna la parte superior del cuadro.

Desde este primer experimento, los perspectivistas italianos trataron las formas visuales del mismo modo que los músicos empleaban los sonidos: como elementos estructurales que se deben organizar previamente, según las mismas reglas que rigen luego la composición. Las formas naturales son meros ruidos, amorfos, no directamente utilizables. Recordemos que los sonidos musicales, es decir: periódicos, se distinguen por su estructura armónica, que les propicia una posición exacta en la escala de altura, es decir: una frecuencia dominante; en esta misma estructura armónica se fundan luego las reglas de composición del sistema modal. Pues, para los pintores renacentistas, e incluso para los arquitectos, la arquitectura no tendrá otra función que la de organizar previamente el material visual, definiendo exactas posiciones que sirvan para conformar bellas perspectivas, según las mismas reglas.

Al contrario de la pintura china, el arte europeo procederá, a partir de entonces, desde la arquitectura hacia la naturaleza, la cual también quedará instrumentalizada, por los paisajistas, para “crear perspectivas”, es decir: para integrarse a la nueva visión perspectiva del mundo. En la era barroca, el mito de la perfecta correspondencia entre todas las artes, alimentado por exquisitas disquisiciones sobre la sección áurea y las formas puras de la geometría (la esfera, la elipse,...) se trasladará al teatro, lugar de absoluto control, donde una platea idealmente circular (según las concepciones acústicas de la época) entra en contacto con la escena, una caja de ilusiones perspectivas y musicales, dispensadora de proporciones y desproporciones...

Todo eso hasta que G. E. Lessings, en su “Laocoonte”, obra inaugural de la estética contemporánea, afirmara las insalvables diferencias entre poesía y pintura, entre las artes del tiempo y las artes del espacio.

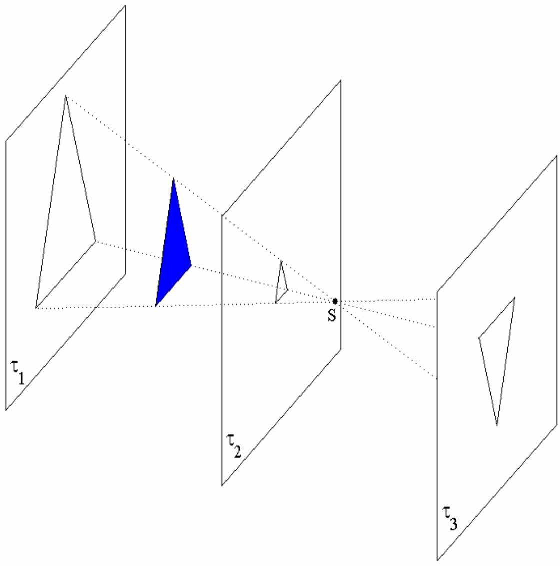
Hoy, si queremos tratar la perspectiva central con la misma neutralidad con la cual estudiamos la axonometría, debemos despejar su teoría de la excesiva abstracción geométrica decimonónica y, a la vez, de la instrumentalización musical legada por el Renacimiento, inoperante porque demasiado ingenua: debemos, por lo tanto, estudiar sus propiedades intrínsecas, con un enfoque puramente perceptivo.



En Europa, todo cambia con el descubrimiento de la perspectiva central. Esta jugará en la pintura el mismo papel que la caligrafía en oriente, pero de forma más rígida y hegemónica: no respetará lo uno y lo otro, sino que doblegará tanto la arquitectura como la misma naturaleza a su ley. En la escena bucólica de Sebastiano Serlio (abajo), los árboles, pese a su aparente confusión, están sometidos a la misma rigurosa perspectiva que los edificios de las escenas trágica y cómica (arriba). La exigencia perspectiva transformará rápidamente los callejonnes góticos en avenidas y los bosques en jardines, subordinándolo todo a la tiranía de un punto de vista ideal.

Escenas trágica, cómica y satírica según Sebastiano Serlio (siglo XVI).

- *Disposición general*

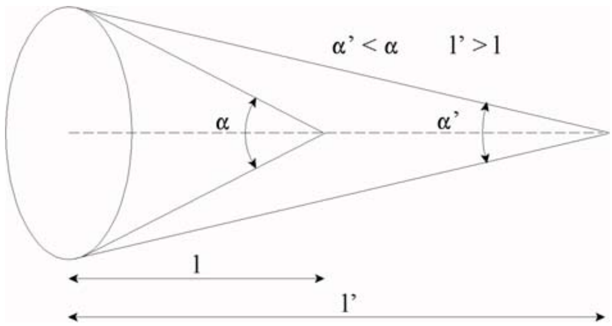


La perspectiva central es particularmente sensible a la disposición de los tres lugares que la definen: el ojo, el objeto y el cuadro.

Estos lugares pueden escalonarse en tres configuraciones diferentes: el cuadro puede ubicarse detrás del objeto (τ_1), entre el objeto y el centro de proyección (τ_2) o detrás del ojo (τ_3).

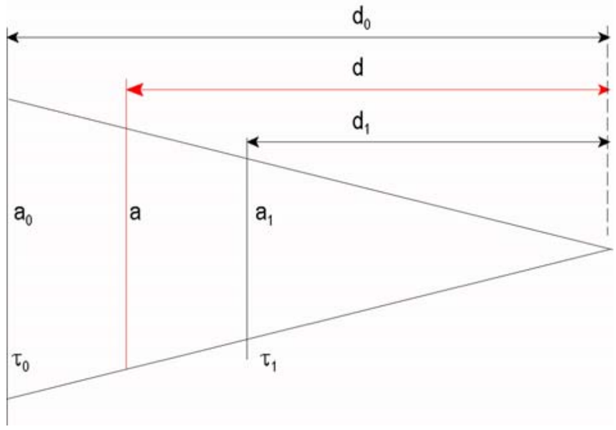
El primer caso corresponde a la sombra proyectada sobre una pantalla por una fuente luminosa, mientras que el segundo se asimila al calco de una escena sobre un papel translúcido. Sin embargo, la proyección no se ve afectada por estas disposiciones, y resulta indiferente que el objeto se halle delante o detrás del cuadro, o incluso atravesándolo. En cambio, el tercer caso, que representa la configuración del ojo o de la célula fotográfica, produce una inversión de la imagen, que hace falta luego enderezar: el cerebro realiza esta operación inconscientemente. No obstante, cabe notar que esta configuración desaparece en la versión orientada de la proyección, ya que la pantalla se halla detrás del plano desvanescente: las semirrectas que interceptan el objeto nunca la atinarán.

- *El ojo y el objeto*



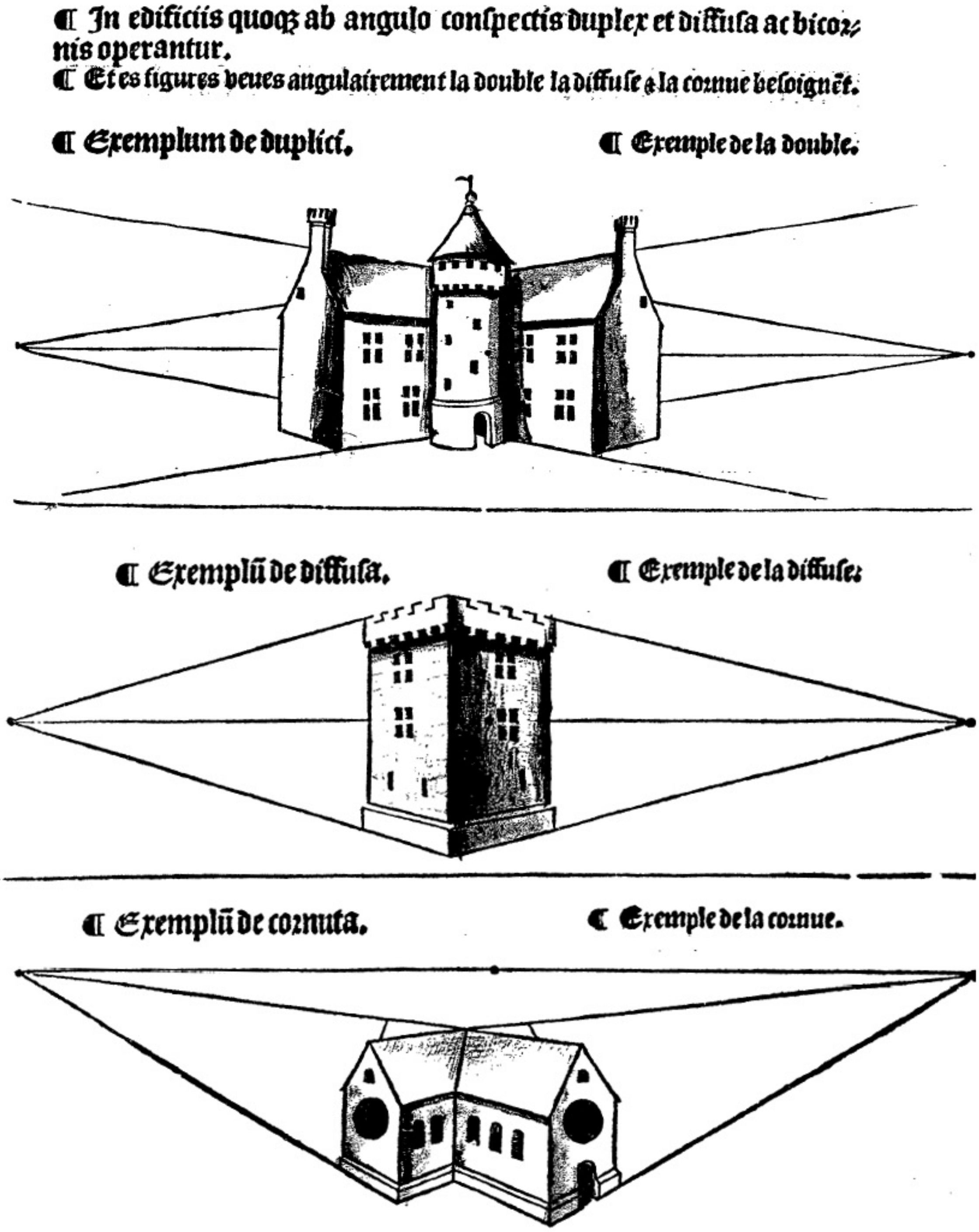
El *ángulo de obertura* se define como el mayor ángulo entre dos de lo rayos que interceptan el objeto, es decir: la obertura del más pequeño cono que contiene el objeto. Si el ojo se aleja, el ángulo de visión disminuye, independientemente del emplazamiento del cuadro.

- *El ojo y el cuadro*



Fijados el ojo y el objeto, la variación de la distancia del ojo al cuadro engendrada por un desplazamiento del cuado paralelamente a sí mismo induce – por el teorema de Tales – un simple cambio de escala en la imagen. Las dimensiones de las imágenes se relacionan con las distancias al cuadro de la manera siguiente:

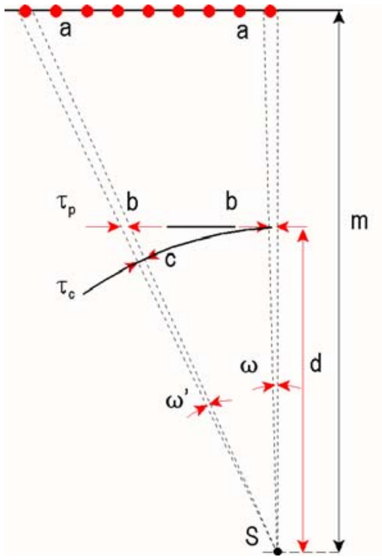
$a_1/a = d_1/d$; $a_0/a = d_0/d$; $a_0/a_1 = d_0/d_1$



Ordenar las perspectivas, como si fueran intervalos musicales... La propuesta de Viator es bastante curiosa. Lo que distingue las perspectivas doble y difusa no es el punto de vista, sino la misma forma del objeto representado (convexo o estrellado). En cambio, la perspectiva cornuda se distingue por dejar el objeto por debajo de la línea del horizonte. Mi interpretación es que la lógica seguida por el autor es más perceptiva que geométrica...

Las perspectivas doble, difusa y cornuda, según Viator

- *El cuadro y el objeto*

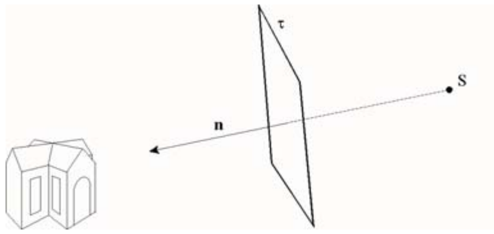


Sea un cuadro emplazado paralelamente a una alineación de columnas de diámetro *a*. Sus imágenes por proyección central se ven afectadas de un mismo factor de escala: todas tienen una misma anchura *b* en el dibujo, independientemente de su alejamiento del centro de proyección.

Es lo que los pintores han llamado, a partir de este ejemplo clásico, la "aberración de la perspectiva central", para significar que la perspectiva difiere, en este caso, de la percepción visual, donde el efecto de alejamiento nace simplemente de la distancia al ojo (ω' < ω, c < b). En la proyección central sobre un cuadro plano, la proporción entre las dimensiones de los elementos del objeto ubicados en un mismo plano frontal (es decir: paralelo al cuadro) se conserva en la imagen del objeto. Dicho de otra forma, el efecto de alejamiento no se figura aquí con respecto al ojo, sino con respecto al plano desvanecente, es decir, obviando el factor de escala: con respecto al cuadro, según la relación:

$b/a = d/m$

- *El dispositivo*



Obviando el factor de escala, la imagen de una proyección central sobre el plano queda enteramente determinada por la posición del ojo *S* y por la dirección de observación, la normal *n* al cuadro.

Comparada con la axonometría, la proyección central refuerza la sugestión perspectiva, porque añade a la profundidad un efecto de *alejamiento*, ya que las dimensiones de los objetos disminuyen en la imagen con su distancia al cuadro.

Su condición de vigencia se establece sobre el ángulo de obertura, que Piero della Francesca proponía limitar a dos tercios de un recto (60°).

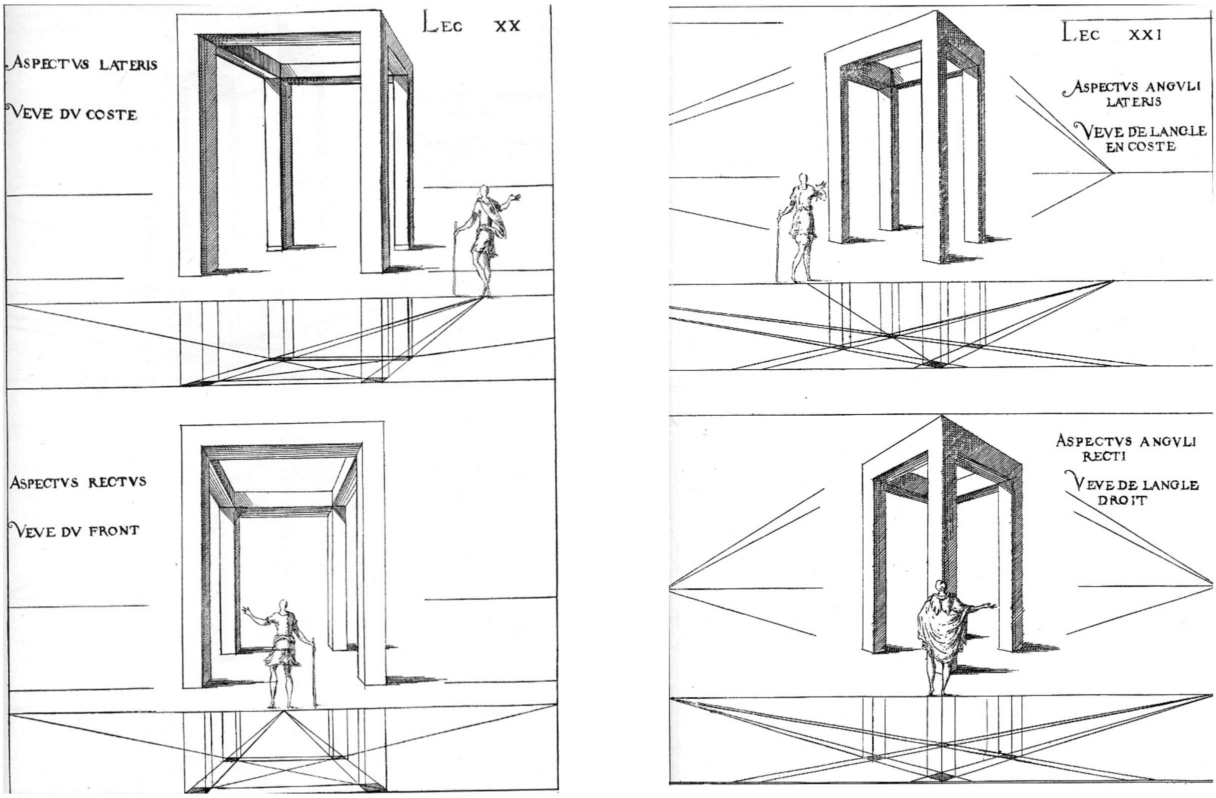
La proyección de un haz de rectas paralelas converge en un *punto de fuga*, la de un haz de planos paralelos en una *línea de fuga*: estas propiedades, que participan de la sugestión de alejamiento, significan que el paralelismo no es un invariante de la proyección central, y tampoco lo es la proporción (la imagen del punto mediano de un segmento no está en la mitad del segmento proyectado), salvo en los planos frontales, cuya proyección se reduce a una simple homotecia: sólo el mismo plano del cuadro se proyecta en tamaño real.

El invariante de la proyección central es la *relación anarmónica*, es decir: la relación entre las proporciones que se establecen entre cuatro puntos alineados.

* * *

- El cuadro esférico -

Hasta ahora, hemos considerado solamente el cuadro plano de una hoja de papel o de una pantalla de ordenador. Podemos también proyectar, por ejemplo, sobre un cilindro o sobre una esfera. Entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, muchos autores vieron en ello la posibilidad de corregir las "aberraciones" de la proyección central sobre el plano.



Con Du Cerceau, en cambio, la gama de perspectivas se vuelve más clara. Podríamos divertirnos en llamar, por ejemplo, *tónica* su vista recta, *sensible* su vista lateral, *subdominante* su vista de ángulo lateral y *dominante* su vista de ángulo recto. ¿No sería posible imaginar una animación, donde cualquier objeto se presentara volviéndose, girando, acercándose, enmascarado, alejándose, mostrado, según reglas precisas gobernando los cambios de puntos de vista y colores, hasta presentarse, tras la cadencia final, frontalmente, apagando definitivamente las deliciosas disonancias de sus variados escorzos? De alguna manera, creo, todos los renacentistas soñaron con ello.

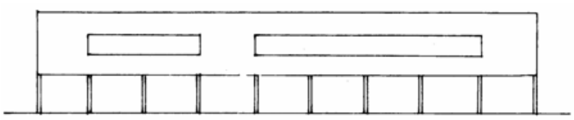
Los cuatro aspectos de la perspectiva (ángulo lateral, lateral, ángulo recto, recto), según Du Cerceau.

En efecto, la imagen obtenida sobre un cuadro plano sólo es de buena calidad si el ángulo de obertura es pequeño, es decir: si la porción utilizada del cuadro queda muy cerca de la esfera tangente centrada en el punto de vista. Cuando se hace necesario examinar lo que ocurre en un campo de obertura angular importante, o incluso en los 360 grados del campo que rodea el punto de vista, el único método posible consiste en proyectar sobre la esfera.

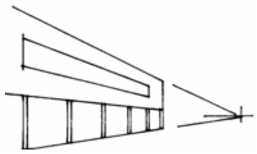
Sin embargo, algunos autores, como Erwin Panofsky, en su famoso "La perspectiva como forma simbólica"[1], cometieron el error de confiar demasiado en la fisiología del ojo - que sólo es esférico en apariencia, ya que la pupila se deforma continuamente -, para concluir que la verdadera perspectiva debía ser curvilínea, porque "las rectas se curvan en el ojo". Con ello, pasaron por alto el que no vemos con el ojo, sino con la mente: de no ser así, veríamos incluso, como las cámaras de foto, las imágenes al revés... Cuando el ojo examina la rectitud, ve recto, y cuando examina el paralelismo, ve paralelas.

Si entendemos la perspectiva sobre la esfera, es porque pertenece también a nuestra experiencia visual, como todas las demás formas de perspectiva. Los espejos curvos que encontramos en las ferias, en las fiestas navideñas o en los cruces de caminos nos muestran imágenes siempre comprensibles, pero que juzgamos deformadas: nos turba la sensación de encontrar resumido en tan pequeño espacio lo que solemos ver solamente cuando, para abrazar una escena muy amplia, movemos rápidamente la mirada. En este caso, efectivamente, las rectas se curvan en el ojo (ligeramente), debido al movimiento. En sus composiciones fotográficas, David Hockney ha sabido jugar con este efecto cinemático, muy a conciencia.

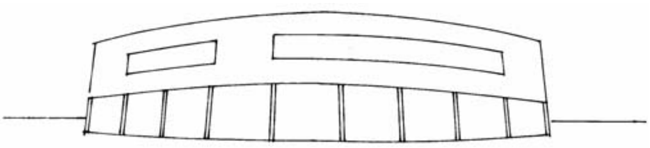
Si miramos un edificio muy extendido desde lejos, lo podemos hacer entrar entero en nuestro campo de visión. Su dibujo puede entonces reducirse a una simple vista frontal.



Pero, al acercarnos, sólo podemos contemplarlo girando la cabeza de izquierda a derecha, es decir: inclinando progresivamente el cuadro de la proyección, con lo cual se modifican las posiciones en el horizonte de los puntos de fuga de las horizontales.



Al efectuar rápidamente este movimiento, vemos realmente las horizontales curvarse, adaptándose continuamente a la orientación cambiante del cuadro.

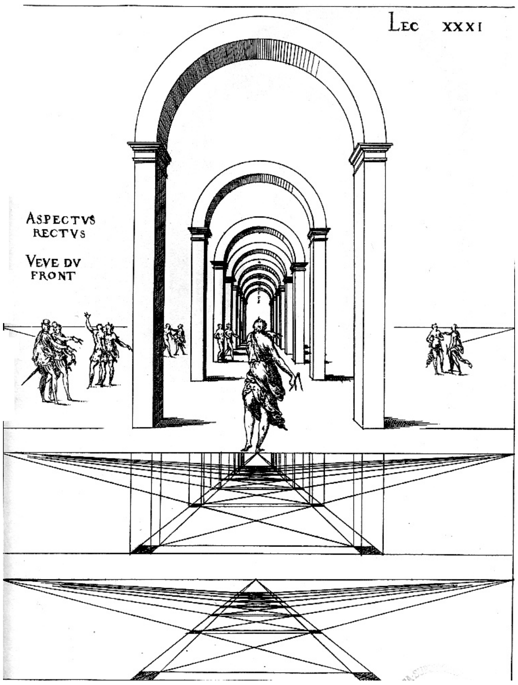


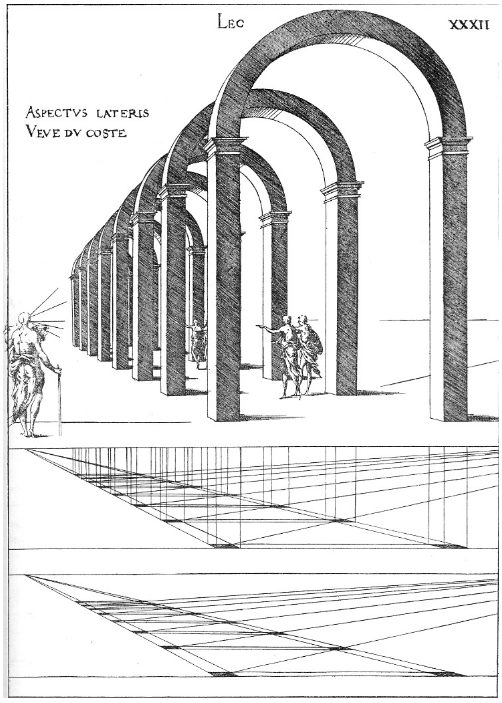
Lo mismo ocurre con las verticales cuando, ubicados al pie de una torre, levantamos bruscamente los ojos para verla enteramente. Semejantes fenómenos se dan también en el cine, cuando se efectúan rápidos movimiento de la cámara.

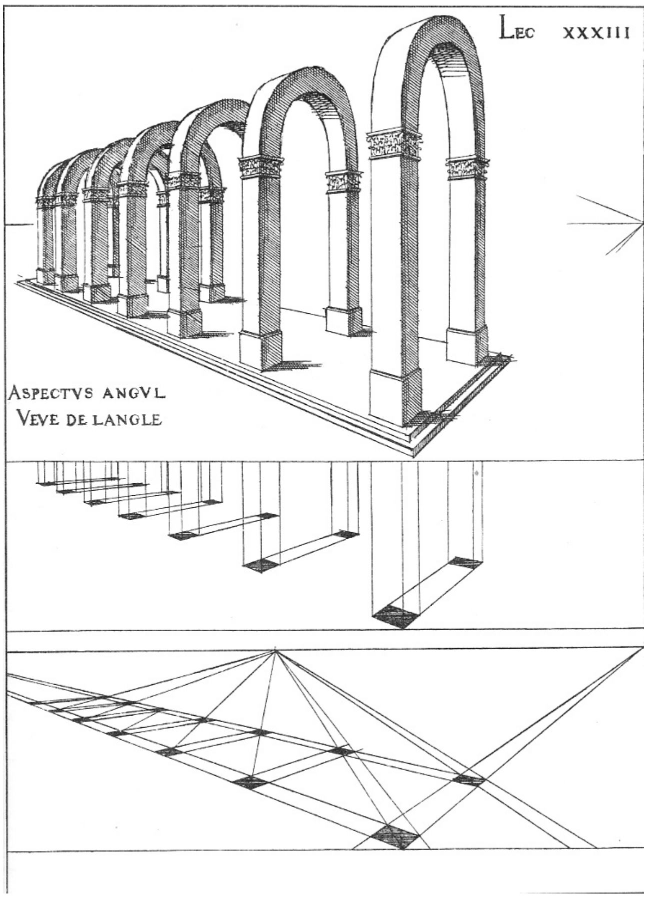
El cuadro esférico plantea otro problema: no es desarrollable. Por lo tanto, para representarlo en un libro o sobre una pantalla plana, debemos volver a proyectar. El cuadro esférico se transforma entonces, para la segunda proyección, en un objeto esférico, introduciendo nuevas dificultades.

* * *

[1] "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky, versión castellana de Virginia Careaga, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999.







Una vez definidos sus cuatro aspectos de perspectiva, Du Cerceau, en todo su tratado, no hace más que repetirlos, cambiando solamente el objeto representado. Es cómo si un músico repitiera siempre la misma composición, cambiando solamente el reparto instrumental: ¡miren lo bien que suena con cuerdas, y ahora con vientos, y ahora con voces humanas!

Tres aspectos de la perspectiva (ángulo lateral, lateral, ángulo recto, recto) según Du Cerceau.

- El objeto esférico -

Hemos notado que la perspectiva central, a diferencia de la axonometría, no impone condiciones sobre el objeto. Existe sin embargo un objeto que justifica una atención especial: la esfera. Desde luego, podemos proyectarla como un objeto normal, paralelamente o centralmente, y obtendremos siempre una imagen con forma de cónica, que nos enseñará, al máximo, la mitad de la esfera.

La proyección central de la esfera sobre un cuadro plano nos propone, además, dos casos particulares, que merecen un nombre específico, por el interés de sus propiedades.

Cuando el centro de proyección está en el centro de la esfera por proyectar, hablamos de *proyección gnomónica*. Si se halla sobre la superficie de la esfera, y si proyectamos sobre un plano perpendicular a la recta que lo une al centro de la esfera, hablamos de *proyección estereográfica*.

Los campos de aplicación naturales, para estas proyecciones específicas, son la cartografía (proyección de la esfera terrestre) y la astronomía (proyección de la *bóveda celeste*, es decir: del espacio previamente proyectado sobre una esfera de radio cualquiera).

En estos campos, se utilizan también proyecciones más complejas (Mercator, Postel, Aitof,...) que ya no proceden con rayos rectos.

* * *

- Nomenclatura general -

Hasta aquí, la proyección ha sido definida a partir de una fuente puntual, también llamada *centro de proyección*, de donde brotan los rayos proyectantes, los cuales interceptan a la vez el *objeto* por proyectar y el *cuadro* donde se forma la imagen.

En vez de describir la proyección paralela como una proyección central cuyo centro ha sido alejado al infinito, podría también definirse a partir de un *plano de proyección*, supuesto infinito, pero ubicado a una distancia finita del objeto, que emitiría rayos proyectantes paralelamente a su normal; esta concepción se integra mejor a la descripción general de la proyección a partir de los tres lugares geométricos y pone en evidencia la analogía con las *ondas planas* de la física, que tienen la misma configuración.

Del mismo modo, los rayos de la proyección central son comparables con las *ondas esféricas* y, por analogía con las ondas cilíndricas, se introduce naturalmente un tercer tipo de proyección, que llamaremos *axial*, donde los rayos se emiten perpendicularmente a un eje de proyección.

La introducción de esta proyección axial, cuya fuente de emisión, decididamente, ya no es puntual, justifica a posteriori nuestra referencia a un tercer lugar geométrico que, añadido a los dos primeros, el del objeto y el del cuadro, define la misma proyección: se trata de un *punto* en la proyección central, de una *recta* en la proyección axial y de un *plano* en la proyección paralela.

En vez de hablar de proyección paralela, central o axial, como seguiremos haciéndolo, sería lógico hablar de proyección “plana”, “esférica” o “cilíndrica”, respectivamente, si estas expresiones no tuviesen, para la mayoría de los autores, un significado muy distinto.

Para calificar enteramente una proyección, hay que describir, además de la forma de la fuente, la del cuadro. Este suele ser un plano, pero también se proyecta sobre la esfera, sobre el cilindro o sobre el cono. En la mayoría de los libros, las expresiones “proyección plana” y “proyección esférica” se refieren precisamente a la forma del cuadro.

La expresión “proyección cilíndrica” es aún más ambigua. En efecto, no sólo se justifica a la vez para la emisión axial y para el cuadro cilíndrico, sino que con ella se designa muy a menudo la proyección paralela, por oposición a la proyección central, calificada de “cónica”.

Para evitar toda confusión, sólo utilizaremos aquí las expresiones siguientes: hablaremos solamente de proyección *paralela*, *central* o *axial*, *sobre el plano*, *sobre la esfera* o *sobre el cono*, reservando

Otra posibilidad de juego: curvar el cuadro, totalmente, o parcialmente. Para un miniaturista, eso permite dibujar vistas más amplias, de una forma muy dinámica. Jean Fouquet, maestro de la forma como del color, lo hizo con mucha fortuna. Había aprendido la nueva perspectiva en Italia, y la manejaba perfectamente. Pero nunca se resolvió en convertirla en su dueña: se jugaba de ella cuando y cuanto quería. Limpió y amplió la mirada de sus contemporáneos. La distancia más corta entre dos puntos dejaba de ser forzosamente recta, los verdes y los azules se hacían magnéticos, electrizantes.

Cuatro miniaturas de Jean Fouquet (siglo XV).

el empleo del adjetivo para calificar el tipo de proyección, y el del complemento circunstancial para describir la forma del cuadro.

Al haber adoptado la versión orientada de la proyección, nos hemos facilitado el paso a la algorítmica y la resolución inmediata de problemas otrora complejos, como la eliminación de las partes escondidas. Así, consideramos la proyección como una estructura temporal, como un fenómeno de propagación, lo cual nos permite la comparación con las ondas. Una consecuencia ventajosa de ello es que unificamos la formulación de las proyecciones con la de los métodos geométricos aplicados al estudio de los campos energéticos. En este espíritu, reuniremos todas las formas aquí descritas, donde los rayos proyectantes son rectilíneos, bajo el rubro de *proyecciones lineales* (por analogía, por ejemplo, con la "acústica lineal"); la cartografía, en particular, emplea corrientemente algunas formas no-lineales (Mercator, Postel,...).

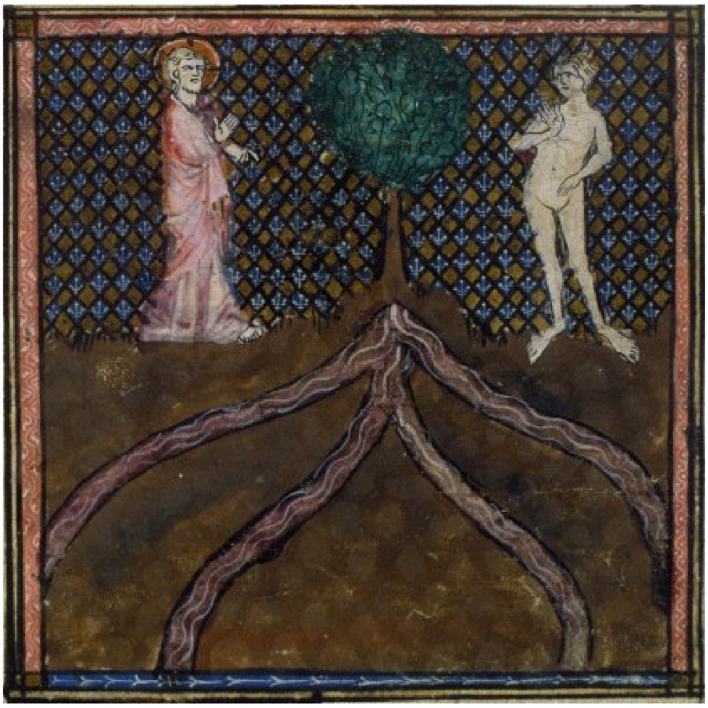
Tal formulación unificada cobra todo su sentido en las aplicaciones algorítmicas, donde vemos que los caminos seguidos por las partículas virtuales de sonido o de luz son a la vez rayos que dibujan imágenes y perspectivas...

Origen de las ilustraciones

p.074 iz.: - Dos dibujos de Jean Dubreuil, "La perspective pratique" (1642-1649), Francia, *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.
p.075 iz.: - Figuras axonométricas, "Trattato d'architettura", Francesco di Giorgio Martini, dibujos a la pluma (siglo XVI) *in* http://www.bncf.firenze.sbn.it.
p.076 iz.: - "Husraw II mirando Shîrîn bañándose", Supplément persan 1029, fol. 49v, BnF, *ex* "Husraw va Shîrîn", Nizâmî, iluminador: Haydar Qulî Naqqash, 1622-1623, Isfahân.
- "Lucha entre los compañeros de David y de Goliath", Supplément persan 1313, fol. 112, BnF, *ex* "Qisas al-anbiyyâ", Ishâq Nishâbûrî, iluminador: Rizâ'î'Abbâsî, finales del siglo XVI, Isfahân.
- "Hâfiz en la fiesta", Supplément persan 1309, fol. 23, BnF, *ex* "Dîvân", Hâfiz, hacia 1575, Shîrâz.
- "Hâfiz en la fiesta", Supplément persan 1309, fol. 89v, BnF, *ex* "Dîvân", Hâfiz, hacia 1575, Shîrâz.
p.077 iz.: - "Shîrin llevada par Farhâd", Supplément persan 1029, fol. 80, BnF, *ex* "Husraw va Shîrîn", Nizâmî, iluminador: Haydar Qulî Naqqash, 1622-1623, Isfahân.
- "Majnûn en la tumba de Laylâ", Supplément persan 1029, fol. 180v, BnF, *ex* "Husraw va Shîrîn", Nizâmî, iluminador: Haydar Qulî Naqqash, 1622-1623, Isfahân.
- "San'Ân y la cristiana", Supplément turc 316, fol. 169, BnF, *ex* "Mantiq al-tayr", Attâr, iluminador: Shayh Zâda, Herat, 1524.
- "Radha despierta entre sus sirvientes dormidas", Smith-Lesouëf (oriental) 249, fol. 6543, BnF, *ex* "Colección de caligrafías y pinturas [bâbur-nâma]", Bâbur, India.
p.078 iz.: - "La Redición de Qandahâr", MA 3318, Musée Guimet, *ex* "Crónica oficial del reino de Shâh Jahân", India del norte, hacia 1640, témpera sobre papel 47,5 x 31,7 cm.
- "Paisaje chino", Shen Yu (1649-?), 27 x 29,5 cm, BnF, Estampes et Photographie, Rés. Hd 90.
- "El jardín de la claridad perfecta", Tang Dai (1673-1752) y Shen Yuan, 62,3 x 62,3 cm, BnF, Estampes et Photographie, Rés. B 9.
p.079 iz.: - Dos páginas de "Cuadros de la labranza y del tejido", autor y calígrafo: Qing Shengzu Xuanye (1696), edición xilográfica ilustrada (con pinturas de Jiao Bingzhen) y coloreada, Manuscrits orientaux, Smith-Lesouëf chinois 69, BnF.
p.080 iz.: - Las tres escenas teatrales (trágico, cómico y satírico) según Sebastiano Serlio, *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.
p.081 iz.: - Las perspectivas doble, difusa y cornuda, según Viator, *in* "De Artifi[cia]li P[er]spec[ti]va Viator Ter[ti]o", Pélerin, Jean dit Viator (ca 1435-1524), editado en Toul por Pierre Jacobi (tercera edición, 1521), BnF, RES-V-169.
p.082 iz.: - Los cuatro aspectos de la perspectiva (ángulo lateral, lateral, ángulo recto, recto), según Du Cerceau, *in* "Leçons de perspective positive", Jacques Androuet Du Cerceau, editado en Paris por Mamert Patisson imprimeur, 1576, École Nationale Supérieure Des Beaux-Arts, LES 1171.
p.083 iz.: - Tres aspectos de la perspectiva (ángulo lateral, lateral, ángulo recto, recto), según Du Cerceau, *in* "Leçons de perspective positive", Jacques Androuet Du Cerceau, editado en Paris por Mamert Patisson imprimeur, 1576, École Nationale Supérieure Des Beaux-Arts, LES 1171.
p.084 iz.: - "Llegada de los cruzados en Constantinopla", "Entrada del emperador Carlos IV en Saint-Denis", "La caridad de san Martín", "El emperador Carlos IV y los dignitarios de Paris", Jean Fouquet, *in* Exposición monografica sobre Jean Fouquet, www.bnf.fr.

- 11 -

Sobre los cortes



En toda la producción histórica de imágenes, los cortes son muy escasos, y siempre fascinantes; muestran lo que no puede verse, o acaso lo que no debería verse: las raices del árbol de la sabiduría o los siete durmientes escondidos en la cueva... El recurso medieval común consistiendo en quitar una pared para mostrar un interior no es, propiamente, un corte: no revela el interior de las cosas.

“Adán y Dios”, miniatura francesa (1320-1330); “Los siete durmientes”, miniatura persa (finales del siglo XVI).

11. Sobre los cortes

Un *corte* puede definirse como la *intersección* entre un espacio de dimensión *m* y un espacio de dimensión *n* inferior.

Como las proyecciones, los cortes permiten pasar del espacio tridimensional al plano, pero con una notable diferencia: el conocimiento del espacio exterior al plano de corte se pierde totalmente, mientras que la proyección conserva siempre una información suficiente como para permitir, por ejemplo, la sugestión en el dibujo de un efecto de perspectiva. Para restituir el objeto tridimensional representado, comprobamos, con el método diédrico de Monge, que dos proyecciones relacionadas son teóricamente suficientes, cuando se necesita un número muy importante de cortes ordenados para formar, por *tomografía*, una reconstitución fiel del mismo objeto.

Los cortes revelan el volumen de los objetos opacos, y pertenecen a nuestra experiencia visual más corriente. Son incluso más fáciles de entender que las proyecciones, aunque su estudio geométrico suele resultar mucho más complicado, porque no se dejan reducir a simples intersecciones entre rectas y superficies. En particular, los algoritmos para determinar los límites de corte son relativamente complejos.

La mineralogía, la dendrocronología (estudio del crecimiento de los árboles mediante cortes transversales) y la medicina (tomografía del cerebro, de los huesos,...) hacen un uso bien conocido de los cortes.

Un simple corte puede revelar la estructura interna de un objeto complejo (una fruta, por ejemplo), pero nos dirá muy poco acerca de los objetos alámbricos elementales que maneja la geometría, los cuales modelizan los esquemas visuales primarios. Sabemos que las cónicas corresponden a los distintos cortes posibles de un cono por un plano, pero pocas veces valdrá la pena representar el cono mediante una tomografía. Sólo la esfera, irreconocible por proyección (a no ser que se sombree) encuentra una representación práctica en su forma *armilar* (es decir: mediante tres cortes ortogonales pasando por el centro).

La tomografía se define como una serie de cortes paralelos, generalmente equidistantes y escalonados según la dirección normal al plano de corte, que llamamos *dirección de corte*.

Los objetos elementales discretos de la geometría (el cubo, el tetraedro, los prismas,...) son los más reacios a la tomografía. En efecto, estas figuras se reconocen por sus aristas, límites de los planos que las componen. Si la dirección de corte corresponde a una dirección principal del objeto, lo más probable es que se pierdan los planos perpendiculares a esta dirección; si la tomografía se realiza de forma oblicua, las aristas se verán completamente deformadas; de todas maneras, se generará una ambigüedad entre las aristas y las líneas de corte, formadas también por segmentos de recta.

La tomografía se presta mucho mejor a la descripción de la superficies complejas, a las cuales permite dar una representación alámbrica manejable. Si abandonamos el estudio del volumen encerrado, sólo quedan los límites de corte, las llamadas *curvas de nivel*. Para presentar estas curvas en un plano, hace falta proyectarlas; aquí, la axonometría resulta ventajosa, pues preserva el paralelismo de las líneas; las curvas de nivel ofrecen luego una manera interesante de presentar un objeto complejo (por ejemplo: una cara humana) en proyección paralela. Como conviene entonces eliminar las partes escondidas, varias proyecciones serán necesarias para dar una imagen exhaustiva del objeto.

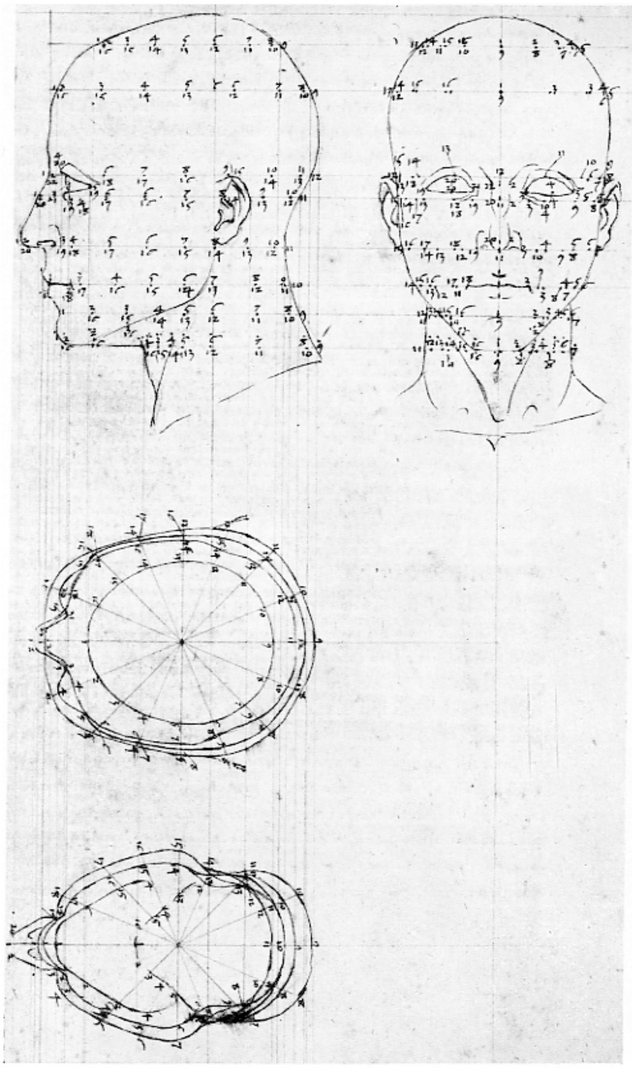
Sin embargo, la presentación más común de las curvas de nivel se realiza sin efecto perspectivo, proyectando según la misma dirección de corte, para facilitar la medición en el dibujo. Esta opción impone tres condiciones sobre el objeto:

- debe presentar una dirección privilegiada, que se elegirá para cortar;
- en esta dirección, no pueden existir recubrimientos;
- el objeto puede ser muy extendido en los planos de corte, pero no en la dirección de corte.

Las curvas de nivel se adaptan particularmente bien al estudio de los bajos relieves, cuyo grosor es muy inferior a las dos otras dimensiones.

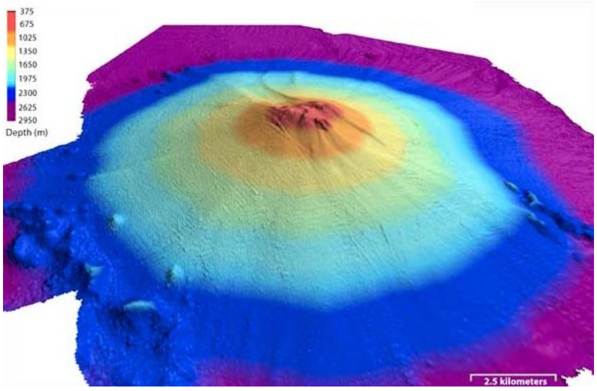
Análisis geométrico del "márfil de Notger" (Lieja, siglo X), tomografía fotográfica.

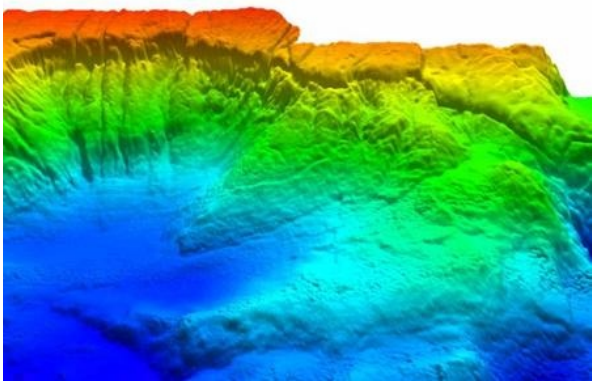
Un caso límite es el de la figura humana: Piero della Francesca, en su tratado de perspectiva, recurrió a los cortes para estudiar una cabeza desde arriba y desde abajo. El resultado, como se ve en la siguiente ilustración, es algo tétrico. Si el perspectivista se hubiera preocupado aquí más de representación que de morfología, hubiese elegido, seguramente, la vista frontal (arriba a la derecha) para realizar su tomografía: en esta disposición, la cara humana respeta mucho mejor las condiciones de corte...



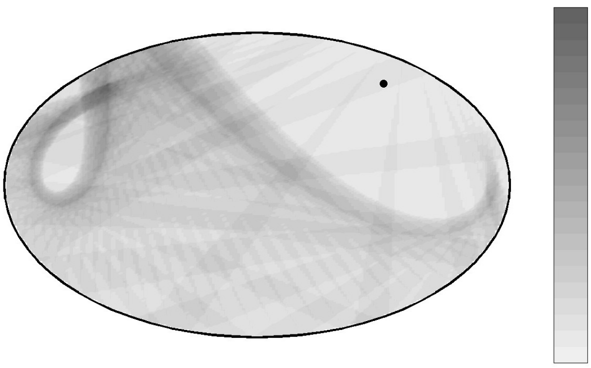
Los relieves geográficos cumplen también admirablemente con estas condiciones, pues están conformados, esencialmente, por la fuerza de gravedad, cuya dirección resulta muy privilegiada, realzando la importancia de una dimensión (la altitud) respecto a las dos otras. Asimismo, la gravedad ha limitado a poca cosa los vuelos y desplomes, que causarían recubrimientos entre las curvas de nivel. Finalmente, las altitudes son muy limitadas con respecto a la extensión horizontal.

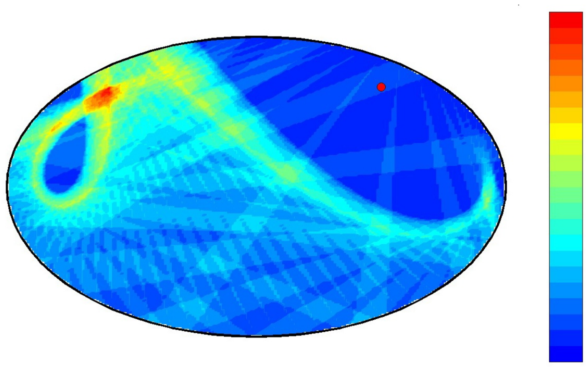
Aún así, queda un problema por resolver en el dibujo. En efecto, a no ser que la figura representada sea visualmente muy evidente, es imposible saber, al pasar de una curva a su vecina, si se "sube" o si se "baja" en la tercera dimensión. Para eliminar esta ambigüedad, y precisar la representación, la solución tradicional consiste en asociar a cada curva (o a cada tantas curvas) un valor numérico, la *cota*. Esta solución, que llamamos *proyección acotada*, ofrece un método de representación muy preciso, que podemos comparar con las otras formas del dibujo técnico (el





Arriba: el mapa de la derecha se interpreta mucho mejor que el de la izquierda, donde convendría eliminar el color "violeta", más próximo, visualmente, al rojo opuesto que al azul vecino. Abajo: el gris oscuro (izquierda) parece más denso, más cargado de energía que el gris claro, como el rojo cálido (derecha) con respecto al frío azul.





Imágenes geográficas coloreadas (NOAA); curvas de nivel acústicas coloreadas (El autor y Luc Masset).

diédrico de Monge, la representación multivista), sobre los cuales, a pesar de sus limitaciones, presenta la gran ventaja de adaptarse mucho mejor a las formas complejas o erráticas.

Una variante de la proyección acotada consiste en colorear de distinto modo cada intervalo entre dos curvas de nivel, y asociar cada color a un intervalo numérico, en una barra de color exterior al dibujo.

El color nos permite aprovechar directamente ciertas propiedades perceptivas del ojo, y obtener dibujos menos abstractos, donde lo esencial de la información se capta inmediatamente.

Una primera propiedad aprovechable es la analogía que el ojo establece naturalmente entre la intensidad luminosa y la gravedad: lo claro parece más alto y lo oscuro más bajo. Aunque sea posible formar una escala de intensidad en cualquier color determinado (escala monocroma), la solución más corriente es la escala de grises.

Sin embargo, cabe recordar aquí que las curvas de nivel no se emplean solamente en geometría pura, sino que permiten también describir, por ejemplo, determinado campo energético - acústico, lumínico,... - en un corte del recinto donde éste se despliega. Notamos que, en semejantes aplicaciones, suele resultar mejor utilizar la escala al revés, porque, tratándose de una información no vinculada a la ley de gravedad, el ojo recurre más fácilmente a una analogía contraria: lo oscuro se ve como más denso, más cargado de energía, y lo claro como menos denso, correspondiendo a niveles de energía más bajos...

El contraste del color en sí no se asocia ni a la gravedad ni a la densidad: si el amarillo suele parecernos más ligero que el violeta, es por la mayor sensibilidad del ojo hacia él, que lo hace ver más claro, no por una calidad intrínseca. Los intentos de utilizar el espectro de los colores puros como escala orientada producen siempre resultados muy malos. Además, el ojo tiende a reunir los colores límites del espectro (el rojo y el violeta), por su invención del púrpura, aumentando la confusión.

Sin embargo, existe otra propiedad de la visión del color, que nos puede ayudar aquí: la percepción del contraste cálido-frío, cuyos polos son, según J. Itten, el rojo anaranjado y el azul verdoso. El ojo asocia naturalmente este contraste a un efecto de profundidad (cercano-lejano). Este fenómeno se explica por el hecho de que, en la naturaleza, los objetos muy alejados se tiñen de azul, debido a la capa de aire que nos separa de ellos: en esta observación basó Leonardo da Vinci su definición de la *perspectiva atmosférica*.

Luego, para colorear eficazmente las curvas de nivel, la solución consiste en reducir la escala de colores, rehusando los violeta y los rojos puros (en el ordenador, basta rechazar los primeros, porque el rojo más puro que nos ofrece la pantalla es ya bastante anaranjado).

El contraste cálido-frío puede reforzarse, combinándolo con el contraste claro-oscuro.

Finalmente, existe un último recurso, empleado en cartografía: aprovechar la carga simbólica del color en sí. En los mapas geográficos físicos, el nivel más bajo, pintado en azul, suele, justamente, corresponder a los mares; luego vienen, en verde, las llanuras fértiles; luego, en amarillo anaranjado, las secas mesetas; finalmente, en un rojo apropiadamente oscurecido, las cumbres estériles: en este caso, los colores simbólicos se ajustan maravillosamente al contraste cálido-frío, que refuerza su interpretación.

Origen de las ilustraciones

p.086 iz.: - "Adán y Dios", Français 8, fol. 7v, BnF, *ex* "Biblia historial", Guiard des Moulins, iluminador: Maestro de Fauvel y colaboradores, Paris, 1320-1330.
- "Los siete durmientes", Supplément persan 1313, fol. 160v, *ex* "Qisas al-anbiyyâ", Ishâq Nishâbûrî, iluminador: Rizâ'î'Abbâsî, finales del siglo XVI, Isfahân.

p.087 iz.: - Análisis del "Márfil de Notger" (Lieja, siglo X), documento producido por el servicio de topografía de la Universidad de Lieja, bajo la dirección de F. Camps, 1990 (comunicación personal, Profesor Francis Peters).

p.088 iz.: - Imágenes batimétricas del volcano submarino Kasuga 1 y de la fosa de Puerto Rico, The National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), in www.3DSoftware.com.
- Focalización del sonido en un recinto elíptico, programa Radit2d (autores: Benoit Beckers y Luc Masset)

- 12 -

Sobre los desarrollos

En unas obras tan antiguas como las de Lascaux - o de Altamira o de la cueva Chauvet - todo es misterioso para nosotros, insondable, y a la vez familiar. La escena del pozo de Lascaux (arriba), retuvo particularmente la atención de Georges Bataille, no sólo por su perspectiva, desde luego. Tan fascinantes, en mi opinión, resultan los tableros de color en los pies de la gran vaca negra (¿pisados? ¿colgando?) con su sentido impenetrable. Sus colores son -forzosamente- los mismos de los frescos. Todos ostentan nueve casillas, con colores distintos, en distintas cantidades. ¿Pensaron sus autores en proporciones? Tenían que fabricar sus pigmentos: tanto manganeso para los negros, tanto óxido de hierro para los ocres rojizos... ¿No sería plausible que los tableros manifestaran estas preocupaciones?

Dos detalles de las pinturas de las cuevas de Lascaux: el toro del pozo y los tableros de color.

12. Sobre los desarrollos

Si algo compartieron los primeros defensores de la perspectiva central con sus más férreos críticos, es el haber sobrevalorado esta forma de proyección, por encima de todo, hasta reconocerle sobre el ojo contemporáneo una dominio absoluto, legítimo o deplorable, pero siempre muy por encima de lo que podía razonablemente prometer a la humanidad el simple encuentro de un haz de semirrectas con un cuadro regular...

Así, cualquier dibujo medieval habría de considerarse como un torpe o conmovedor esfuerzo en acercarse a la "construcción legítima". En cuanto a los antiguos, si no proyectaban bien sobre el plano, a pesar de la excelencia de su geometría, no podía ser sino porque prefiriesen conscientemente el cuadro esférico, como nos lo demuestra... su alfarería.

En el magnífico ensayo que Georges Bataille publicó sobre las pinturas de Lascaux, en 1954, pocos años tras su descubrimiento, estudiaba detalladamente las misteriosas figuras que aparecen en el pozo donde termina la cueva:

"El bisonte del fondo del pozo es representado de una manera a la vez sumaria y expresiva. Al igual que las figuras vecinas, no es policromo, sino trazado con anchos trazos negros. Sólo utiliza el cálido color ocre de la roca en este lugar, que acaba de animarlo.

Insistiría en la torpeza y en la fuerza de expresión mezcladas en esta imagen. Su torpeza hace más sensible un carácter común al conjunto de las figuras de la cueva: están trazadas en "perspectiva torcida". Es decir: de perfil, pero como si, para mejor dibujarlas, se hubieran torcido ciertas partes, las patas, las orejas y los cuernos. En estos animales de perfil, las patas, las orejas y los cuernos están representados de frente (o de tres cuartos). Las patas del bisonte son hendidas y los dos cuernos, en vez de confundirse, o de ser paralelos, tienen la forma de lira que presentarían a nuestros ojos si el animal nos hiciera frente (pero esta lira está inclinada: el bisonte está figurado con la cabeza baja, en actitud de embestida).

El paleolítico superior se divide en principio en tres períodos, Auriñaciense, Solutrense y Magdaleniense. Ya he representado las dificultades que levanta actualmente el empleo de la palabra "auriñaciense", pero, considerándola en el sentido amplio, es posible formular un aspecto característico de estos períodos diciendo que, en el Auriñaciense, la perspectiva torcida es la regla; en el Solutrense, el arte de las cuevas está esencialmente representado por la escultura, y la pintura está casi ausente; pero en el Magdaleniense, normalmente, las patas y los cuernos se representan de perfil (excepto al sur de los Pirineos, en el norte de España, donde la perspectiva torcida no ha desaparecido)."

Georges Bataille[1]

Nosotros diríamos que el arte rupestre del paleolítico manifiesta desde luego una forma de *perspectiva*, ya que sugiere indudablemente cierta profundidad en la imagen, pero que esta perspectiva no proviene en absoluto de una proyección: si bien se eliminan las partes escondidas, la organización formal responde a una necesidad geométrica mucho más fundamental: manifestar claramente los esquemas visuales elementales que diferencian en su apariencia las distintas especies animales representadas: las pezuñas hendidas de los rumiantes opuestas a los cascos plenos de los caballos, los cuernos con forma de lira de los toros opuestos a la cornamenta arborescente de los ciervos,... Dibujar los animales de frente, en fuerte escorzo, hubiera sido más difícil y menos característico (tales escorzos sólo se harán corrientes en el Renacimiento, cuando pintores como Ucello, Mantegna o Durero querrán alardear de su dominio en el manejo de la proyección central); por lo tanto, era lógico representarlos de perfil, pero subrayando sus características visuales más marcadas, aún fuese al precio de "torcer" la imagen.

Ahora bien, si la importancia de los esquemas elementales para la visión (y por lo tanto la irreductibilidad de la escena visual a una simple proyección geométrica) ya no es objeto de debate,

[1] "Lascaux ou la naissance de l'art", Georges Bataille, Skira, Genève, 1955.

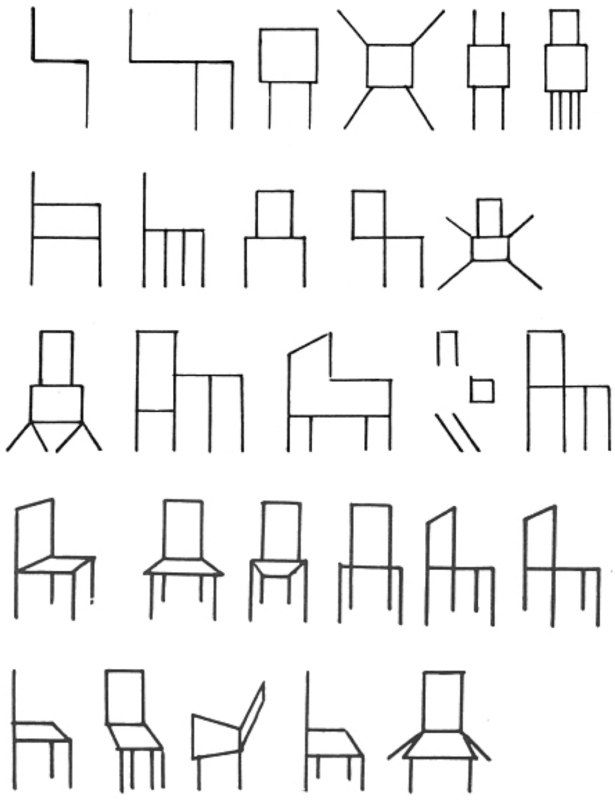
El códigо Manesse es el más famoso de los manuscritos alemanes. Contiene las vidas y los poemas de los Minesangers, los trovadores alemanes. La “perspectiva torcida” se emplea aquí para mostrar los tableros de juego (arriba) o los instrumentos de música (abajo) de la forma más conveniente, más fácil de identificar visualmente.

Cuatro miniaturas del código Manesse.

la distinción que proponemos aquí entre perspectiva (como efecto) y proyección (como herramienta) no es nada corriente entre los autores. Cuando G. Bataille habla de "perspectiva torcida" o E. Panofsky de "perspectiva en espina de pez", por ejemplo, podríamos entender que se refieren a cierta forma de proyección, pero sólo nos explican cómo se organizan las imágenes, y no cómo se define la operación geométrica que las produce. Seguramente, ni los cazadores del Auriñaciense proyectaban por trozos, ni los primitivos italianos proyectaban axialmente, sino que unos y otros componían sus obras aplicando ciertas reglas elaboradas directamente sobre el soporte. Entonces, queda pendiente una pregunta: ¿cómo transformaban sus observaciones del mundo, repetidas pero siempre fugaces, en imágenes fijadas y, para ellos, visualmente convincentes? ¿Qué operación mental les permitía pasar del espacio sensible al plano del dibujo?

Es tentador interrogar aquí el dibujo de los niños, porque intuimos que las formas de representación que manejan libremente antes de aprender la perspectiva central pueden ser las mismas que desarrollaron, mucho más allá, los grandes artistas de civilizaciones desprovistas de nuestros prejuicios perspectivos.

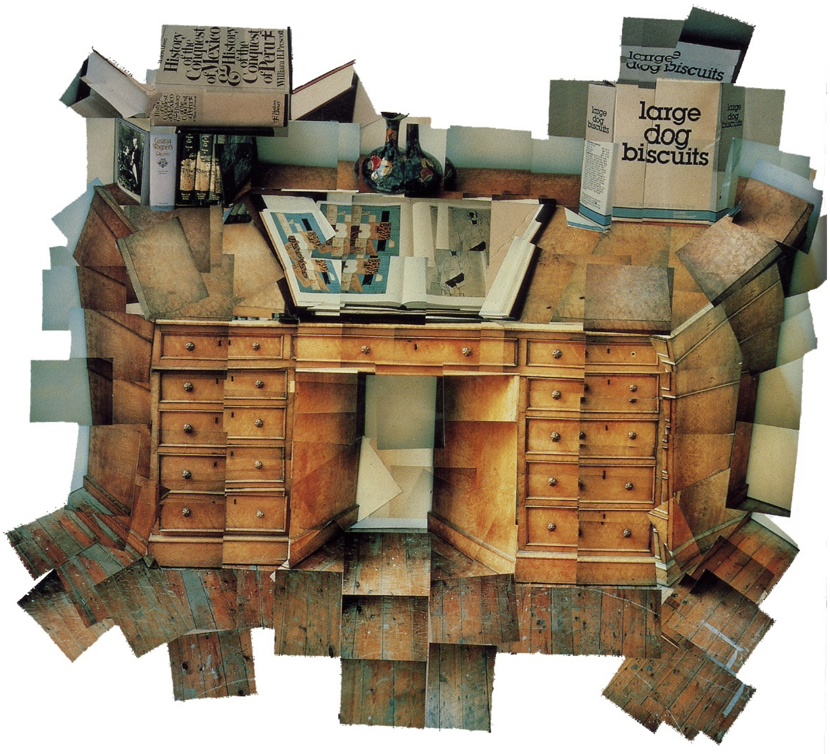
R. Arnheim ilustra un capítulo de su libro "Arte y percepción visual" con algunos de los resultados que G. Kerschensteiner ha obtenido tras pedir a unos niños en edad escolar que reprodujesen de memoria "la imagen tridimensional de una silla, dibujada en perspectiva correcta"[1].



Entre todas las soluciones reproducidas en la figura 1, la perspectiva (1e) es sin duda la que recibe primero nuestra adhesión. Se juzgará incluso superior a las dos variantes que la siguen, porque el punto de vista elegido respeta mejor el sentimiento de neutralidad que prestamos generalmente a un objeto tan cotidiano como es una silla. La silla siguiente (1f) parece en cambio destinada a un personaje importante: en ella sentaríamos naturalmente un emperador con su corona, pues el punto de vista elegido la convierte naturalmente en un trono. El ejemplo siguiente (1g) es aún más explícito: apostaríamos que su autor era muy bajito. Esta vista no tiene realmente nada de extraño, pero seguramente no es la que vendría primero a la mente de un adulto sometido al mismo experimento... Tales ejemplos ilustran lo que se llegó a llamar la "tiranía del punto de vista" en la perspectiva central. Por cierto, la axonometría no hace más que endulzarla en el régimen arbitrario de la dirección de vista, y sólo la representación de las tres vistas se libra enteramente de ella, ya que se funda solamente en las direcciones principales, definidas por el mismo objeto.

Por su extremo esquematismo, el primer dibujo (1a) es también eficaz a su manera, pues se limita a la estructura esencial del objeto descrito. Parece decirnos que una silla se compone siempre de tres elementos: una parte vertical (los pies) sobre la cual descansa una parte horizontal (el tablero) de donde arranca una nueva parte vertical (el respaldo). En el mismo orden de ideas, el dibujo de abajo (1c) nos parece menos expresivo, por el mismo hecho de añadir una

[1] "Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Editorial, Madrid, 2001.



David Hockney ha estudiado mucho la obra de Picasso, y su “silla del jardín del Luxemburgo” (arriba) se inspira evidentemente de los experimentos cubistas. La “mesa de despacho” (abajo) es un claro ejemplo de desarrollo, que permite mostrar mucho más del objeto, al desplegarlo, de lo que ofrecería una simple perspectiva.

“Silla, Jardín del Luxembourg, Paris, 10/08/1985” y “La mesa de despacho, 01/07/1984”, David Hockney.

información cuantitativa, sobre el número de patas, que perturba la definición puramente cualitativa anterior. El primer dibujo parece responderle justamente que una silla con sólo tres pies, o cinco o seis, seguiría siendo, esencialmente, una silla.

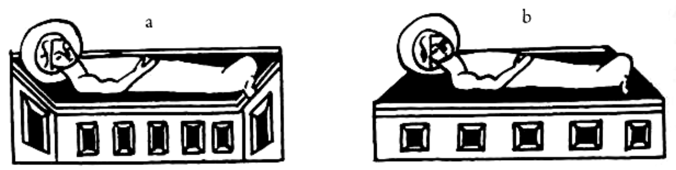
El dibujo siguiente (1b), es mucho más extraño, ya que confunde dos puntos de vista en un solo dibujo. Es una solución adoptada en numerosas culturas gráficas "primitivas", desde el paleolítico auriñaciense hasta el Egipto antiguo. Ha sido juzgada a menudo inferior a las perspectivas proyectivas, porque, contrariamente a éstas, rompe la unidad del espacio cartesiano. Sin embargo, H. Schäfer, igualmente citado por R. Arnheim, descubrió un caso muy curioso[1].

En él, vemos dos obreros esculpiendo una estatua. Ahora bien, si estos se representan efectivamente "a la moda egipcia", con el torso y las piernas diversamente orientados, no ocurre lo mismo con la estatua, que está enteramente de perfil. Tal elección parece indicar que, para una mirada egipcia, el modo de representación que nos parece tan extraño era el que otorgaba la mayor vitalidad a la obra gráfica, mientras que un perfil riguroso sólo podía convenir para cosas inanimadas, como la estatua de este ejemplo.

El dibujo 1d recuerda también una forma histórica importante, corriente, esta vez, en las vistas de arquitectura del arte paleocristiano y medieval, y que ha sido a menudo criticada porque las líneas parecen fugar "al revés". Sin embargo, este procedimiento no tiene en realidad nada que ver con la perspectiva, pues se trata de un *desarrollo* geométrico, del cual los niños adquieren en muy temprana edad una gran experiencia visual, a través de los juegos de plegado. Bastaría, pues, recortar el dibujo 1d, y luego doblarlo correctamente, llevando los pies y el respaldo a la vertical, para obtener, ya no una simple vista perspectiva de la silla, sino su materialización exacta en el espacio, en modelo reducido.

Entre los métodos geométricos que permiten pasar del espacio tridimensional al plano, los desarrollos forman una tercera gran familia, al lado de las proyecciones y de los cortes. Si estos últimos han tenido poco protagonismo en las artes (quizás por parecer demasiado técnicos), no es el caso de los primeros, que compitieron durante milenios con el uso intuitivo de la proyección, hasta que esta tomara la ventaja, en Europa solamente, tras quedar explicitada en el Renacimiento.

Si R. Arnheim no repara nunca en la verdadera naturaleza geométrica de los dibujos en desarrollo (que llama "perspectivas divergentes"), acierta plenamente en describir sus ventajas:



"Fijémonos en la siguiente figura, un detalle de un retablo español del siglo XIV; *b* muestra el mismo tema dibujado en perspectiva convergente. Observamos que *a* revela claramente las alas laterales del objeto cúbico y al hacerlo le presta más volumen. Además, los ángulos obtusos de las esquinas delanteras hacen que en *a* la superficie de arriba se ensanche hacia el fondo y abrace al Niño Jesús con una especie de recinto semicircular, mientras que en *b* la base convergente recorta al Niño. Las ventajas visuales de este procedimiento son tan evidentes que no sorprende que los artistas modernos volvieran a utilizarlo tan pronto como el arte occidental se liberó de la compulsión de la perspectiva "realista". Tenemos ejemplos en la obra de Picasso (ver figura). En algunos estilos arquitectónicos,

[1] "Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Editorial, Madrid, 2001.

Desplegando las escenas, los iluminadores pueden representar mucho más de lo que permitiría la perpectiva: gracias al desarrollo, podemos ver a la vez (abajo), la chimenea, la cuna donde Hércules lucha contra las serpientes, e incluso, gracias a una contracción temporal habitual en la época, la habitación donde fue concebido... Simultaneidad y desarrollo: una combinación muy eficaz para contar historias en dibujos.

Dos miniaturas de "Historias de Troya", Raoul Lefèvre (siglos XV-XVI).

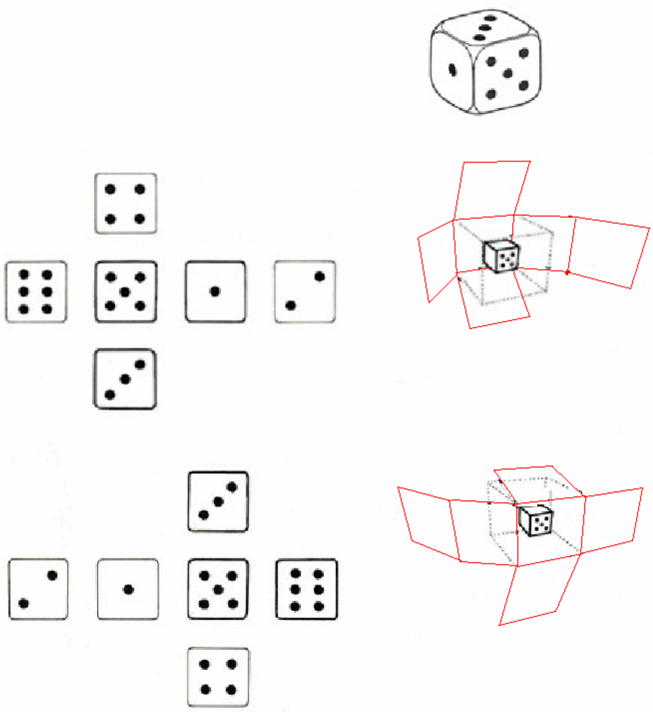
la preferencia por las formas hexagonales o semihexagonales (como ciertas ventanas saledizas) está también directamente vinculada al hecho de que las caras laterales divergentes revelan el volumen de la estructura de manera mucho más directa que las de cubos rectangulares.”

Rudolf Arnheim[1]

Es fácil imaginar que el autor del retablo español aquí aludido desarrolló mentalmente la escena que representó; el caso de los pintores cubistas es aún más evidente, pues es bien conocido el interés marcado por Picasso o por Braque hacia los juegos de plegado. Resulta luego muy desafortunado hablar aquí de una “perspectiva divergente”, es decir: donde las paralelas no fugan hacia un punto del fondo sino hacia delante, porque el pensamiento proyectivo es, en mi opinión, totalmente ausente en tales escenas.

Quizás haya que buscar la razón de esta equívoca en las pinturas romanas o medievales, donde tales “divergencias” se mezclan a menudo con ostensibles intuiciones proyectivas. Pienso que en estos casos, como en varios dibujos técnicos de Villard de Honnecourt, el autor empieza por desarrollar ciertos elementos de la escena (generalmente arquitectónicos), para poder mostrar las partes escondidas que le interesan, antes de proyectar - con mayor o menor rigor - el modelo obtenido sobre el plano del dibujo.

Y es que los desarrollos, al igual que los cortes, se combinan maravillosamente bien con las proyecciones, permitiendo, en ciertas situaciones visuales complejas, obtener representaciones asombrosamente eficientes: valga, para ilustrar, el ejemplo de un dado.



Si bien el cubo es la forma la más simple de representar en perspectiva, ya no ocurre lo mismo cuando esta figura presenta una información diferente en cada una de sus caras, como en el caso del dado. Entonces, la representación de las tres vistas se vuelve particularmente inoperante, pues harían falta tres vistas auxiliares. También la perspectiva - sea central, sea paralela - se hace torpe, pues sólo puede enseñar tres caras a la vez: habría luego que añadir a dos vistas opuestas una tercera, intermedia, para mostrar cómo las dos primeras se conectan entre sí, y despejar así toda ambigüedad sobre la configuración del dado. Podríamos, desde luego, jugar con las transparencias, pero resultaría entonces difícil evitar la confusión resultando del recubrimiento por lo menos parcial entre los puntos del dado. Un pintor barroco hubiese sin duda dispuesto el dado en equilibrio sobre un espejo, con otro espejo detrás, de manera a realizar una perspectiva sutil y laboriosa donde las caras escondidas apareciesen en los reflejos... En la solución aquí expuesta, primero se desarrolla el dado, luego se proyecta la cruz latina obtenida, de modo a indicar cómo empieza a doblarse. Nuestra mirada termina este trabajo y, gracias a la experiencia que tenemos de los juegos de plegado, obtenemos una visión final clara y completa del dado en el espacio, sin punto de vista.

[1] “Arte y percepción visual”, Rudolf Arnheim, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Editorial, Madrid, 2001.

El estudio de las técnicas de cortes y desarrollos, y, en general, de todas las técnicas para representar el espacio en el plano sin recurrir a las proyecciones, queda todavía por hacer. Demasiado a menudo, las perspectivas no-proyectivas se han querido describir como proyecciones erróneas o fantasiosas. Cortar y desplegar son, sin embargo, actividades lúdicas adquiridas por los hombres en muy temprana edad; enriquecen su experiencia visual, y pueden utilizarse independientemente o en complemento de las técnicas proyectivas, aportando cosas que el ojo entiende, y que nada tienen que ver, no obstante, con el rastreo visual...

“Gregory leyendo en Kyoto, feb. 1983”, David Hockney.

Tal observación ilustra la particular potencia del desarrollo: nos permite aquí concebir visualmente una imagen que nuestros ojos son incapaces de percibir...

Queda por aclarar porqué nos permitimos considerar aquí el desarrollo como una operación puramente geométrica. Para poder desarrollar una escena, es necesario modelizarla previamente como el resultado de un pliegue: basta luego "desplegar" el modelo para pasar del espacio al plano. Tal operación, que podríamos calificar, en este sentido, de "inversa", parece más bien vincularse a la mecánica y, de hecho, la geometría platónica, que la hubiera rechazado por depender forzosamente del tiempo, la hubiera seguramente tachado de "truco mecánico", al igual que los procedimientos de los pitagóricos tardíos, es decir: comparable a un efecto teatral, indigna de la geometría eterna.

Sin embargo, en las ciencias modernas, la noción de "mecánica" ha cobrado un sentido mucho más preciso: el estudio de los sólidos sometidos a fuerzas externas. Ahora bien, aún cuando se trata de eso, los investigadores preocupados por problemas de desarrollos (pensemos, por ejemplo, en el despliegue de antenas gigantes de satélites) descubren enseguida que las dificultades algorítmicas generadas son más bien de orden topológico: las mismas que resuelve virtualmente el ojo, dentro de su experiencia, de manera, esta vez, puramente cinemática, sin esfuerzos.

La teoría de los desarrollos integra muy naturalmente la geometría sensible, como una opción visual elemental, la que ya ponían en obra los cazadores auriñacienses, cuando, tras modelizar los bisontes en sus recuerdos, a partir de su experiencia visual, *torcían* luego su imagen, para plasmar en las paredes de las cuevas todo lo que habían visto, tal y como lo recordaban. Perspectiva *torcida* luego: Georges Bataille tenía razón.

Origen de las ilustraciones

p.090 iz.:	- Dos detalles de las pinturas de las cuevas de Lascaux, *in* “Lascaux ou la naissance de l’art”, Georges Bataille, Skira, Genève, 1955.
p.091 iz.:	- Cuatro miniaturas del código Manesse, *in* web del museo.
p.092 iz.:	- “Silla, Jardín de Luxembourg, Paris, 10/08/1985”, *in* “Así lo veo yo”, David Hockney, Ediciones Siruela, 1994. - “La mesa de despacho, 01/07/1984”, *in* “Así lo veo yo”, David Hockney, Ediciones Siruela, 1994.
p.093 iz.:	- “Raoul Lefèvre escribiendo”, Français 252, fol. 1v, BnF, *ex* “Histoires de Troyes”, Raoul Lefèvre, iluminador: Robinet - Testard, siglos XV-XVI, Cognac. - “Concepción de Hércules”, Français 252, fol. 73, BnF, *ex* “Histoires de Troyes”, Raoul Lefèvre, iluminador: Robinet - Testard, siglos XV-XVI, Cognac.
p.094 iz.:	- “Gregory leyendo en Kyoto, feb. 1983”, *in* “David Hockney: Retratos”, Marco Livingstone, Editorial Cartago, Palma de Mallorca, 2003.

- 13 -

Las mediedades

Veintinueve platos pequeños, con un radio de unos ocho centímetros. Veintinueve cuadros incurvados, donde Pablo Picasso, en una semana, pintó escenas de corrida. Una serie, luego, pero no una narración. Más bien una búsqueda repetida en veintinueve ocasiones, con determinadas variaciones: una búsqueda esencialmente geométrica. Pero una geometría, ciertamente, que no puede describirse con palabras de manual. Hay un ruedo, un círculo dentro de otro, el cuadro, un cilindro dentro de una esfera. Y hay un toro, un centro en torno al cual todo gira. Hemos seguido a Villard de Honnecourt estudiando el triángulo sometido a un movimiento circular. Veremos ahora a Pablo Picasso vérselas con la esfera sometiendo a las rectas. Una esfera, es un centro, que atrae o rechaza, y un radio cualquiera, poco importa, pero constante. El problema, aquí, es el del centro, y de cómo organiza su entorno, sus equidistancias. Picasso lo va a tratar perceptivamente, y geométricamente: según la geometría sensible

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

13. Las mediedades

- Del logos al análogos -

Llámase *razón* (de *ratio*, traducción latina del griego *logos*) toda fracción numérica (*v.g.:* a/b), y *proporción* (en griego: *análogos*) la equivalencia entre dos razones (*v.g.:* a/b=c/d).

En la notación tradicional, una proporción se escribe: “a : b :: c : d”
y se lee: “*a* es a *b* como *c* es a *d*”.

Según Aristóteles (en la “Ética Nicomáquea”), los pitagóricos distinguían ya entre proporción *discreta* (*dieremméne*), cuando los cuatro términos difieren entre sí (*v.g.*: a:b::c:d) y proporción *continua* (*synemméne*), cuando los medianos son iguales entre sí (*v.g.*: a:b::b:c). Aristóteles concluía que “la proporción es una igualdad de razones y requiere, por lo menos, cuatro términos; claramente, la proporción discreta requiere cuatro términos, pero también la continua, porque se sirve de uno de ellos como si fueran dos y lo menciona dos veces”[1].

Observamos que el sentido de las palabras “continuo” y “discreto” no tiene nada que ver aquí con el que hacemos servir habitualmente en este texto. Notemos que la proporción “discreta” puede considerarse como “estática”, mientras que la continua se dice “dinámica”, en el sentido de que puede reproducirse *continuamente*, introduciendo nuevos términos que la prolonguen (*v.g.:* a:b::b:c, b:c::c:d, c:d::d:e,...), generándose así una *progresión.*

En la proporción “continua”, el término medio, único, se define como *promedio* de los dos extremos (*v.g.:* en a:b::b:c, *b* es el promedio geométrico de *a* y *c*). En latín, se empleaba la palabra “medietas”, a veces para indicar el término medio, a veces refiriéndose a la relación entera. Esta palabra pasó al francés, como “médiété”, que el “Larousse Encyclopédique” de 1931 define aún así:

« Médiété : (du latin medius, qui est au milieu). n.f.

- géométrie : ancien nom des proportions qui contiennent une moyenne proportionnelles comme a : b :: b : c. »

Aunque no encontré en español la palabra “mediedad” (no aparece, por ejemplo, en el Diccionario de Autoridades), la utilizo aquí, en vez de “promedio”, cuando conviene resaltar el enfoque particular de los pitagóricos[2], cuyas diez *mediedades* son a la vez promedios, principios generadores de progresiones y, finalmente, fundamento de su aritmética y, por lo tanto, de su teoría de la percepción.

La palabra *mediedad* me permite evitar el adjetivo “continuo”, ambiguo en este contexto, y la palabra “proporción”, que sólo se aplica, en sentido estricto, a la mediedad geométrica (propiamente una “proporción continua”), aunque las demás mediedades puedan también explicitarse en forma de proporción (pero el término “razón”, cuando los matemáticos modernos lo aplican a una progresión aritmética, ha perdido su sentido inicial).

Recordemos ahora las tres primeras mediedades, atribuidas al mismo Pitágoras, las únicas que usaremos (las demás pueden considerares como permutaciones de éstas). Sean tres números *a*, *b*, *c*, en orden creciente (a < b < c):

- mediedad *aritmética*:
$(c - b) / (b - a) = b / b$ ó: $c - b = b - a$ ó: $b = (a + c) / 2$ *V.g.*: 1, 3/2, 2 ó 5,7,9
- mediedad *geométrica*:
$(c - b) / (b - a) = c / b$ ó: $a / b = b / c$ ó: $b^2 = ac; b = \sqrt{ac}$ *V.g.*: 1, $\sqrt{2}$, 2 ó 2, 4, 8
- mediedad *armónica*:
$(c - b) / (b - a) = c / a$ ó: $b = (2ac)/(a+c)$ ó: $1 / b = ½ (1/a + 1/c)$ *V.g.*: 1, 4/3, 2 ó 3, 4, 6

---

[1] “Éthique à Nicomaque”, Aristote (V, 6, 1131, p. 228), versión francesa de J. Tricot, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1990.

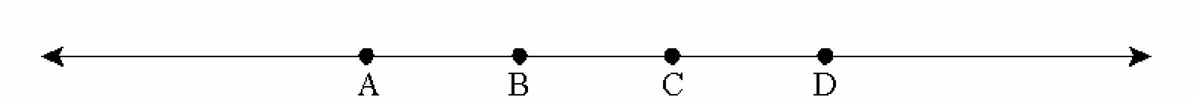
[2] “La science antique et médiévale”, R.Taton, édition Quadrige/PUF, 1994 (p. 230) : “On appelle médiété une progression de trois termes tels que deux d’entre eux et deux de leur différences soient dans le même rapport”.

A decir la verdad, hay dos centros: el centro de la atención, y el centro de la proyección. El toro, y el ojo que lo mira, múltiple como el público, y, a la vez, único: el ojo del pintor. Para él, las horizontales se curvan, pero las verticales se mantienen rectas. Proyección esférica de la esfera sobre la esfera. El cuadro es un casquete: tiene su propio centro, inmaterial, invisible si el pintor pone en él su ojo, realizando una proyección gnomónica. Entonces, la semiesfera que completa el casquete viene a morir en el plano desvanescente, su gran círculo rechazado al infinito. El ojo puede también retraerse, en el nadir del plato cuyo fondo es el cenit. Proyección estereográfica, entonces, que respeta localmente los ángulos. En el teatro olímpico de Vicenze, Palladio puso su ojo en el aire, unos metros por encima del público.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

Imaginamos ahora una serie de puntos *A*,*B*,*C*,… alineados sobre una recta orientada (un *vector*), y notamos *AB* la distancia signada entre los puntos *A* y *B*, de modo que *BA* = - *AB*.

- Progresión aritmética:

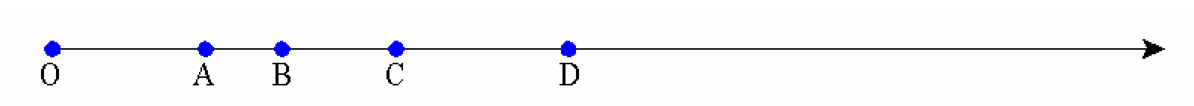


Si los puntos son equidistantes (AB = BC = CD,...), forman naturalmente una progresión aritmética. Notamos que esta progresión no tiene ni principio ni fin: se extiende hasta el infinito, igualmente, en ambas direcciones.

La distancia entre dos puntos de la progresión aritmética suele llamarse "razón", pero es importante notar que tal término no tiene aquí el sentido que le daban Aristóteles y Euclides, por lo cual preferiremos llamarla *paso*: el paso de una progresión armónica es la diferencia *p* entre dos de sus puntos.

Podemos decir que la progresión tiene dos *polos*, ubicados a $-\infty$ y $+\infty$, que nunca se alcanzan, y que son los mismos para todas las progresiones aritméticas. El infinito, lo consideramos como los griegos, un in-finito, un *ilimitado*, algo cuyo fin no se alcanza percibir. Hablaremos luego, para la progresión aritmética, de dos *polos al infinito*.

- Progresión geométrica:



Sean cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* alineados de modo que sus intervalos formen una serie creciente (*AB* < *BC* < *CD*) en mediedad geométrica (con $r > 1$):

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC} = r$$

Definimos el punto *O* de modo que: $\frac{OB}{OA} = r$

Esta condición puede expresarse así:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA + AB}{OA} = r \Rightarrow OA = \frac{AB}{r-1} \qquad (1)$$

Comprobamos entonces, a partir de esta relación, que:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA + AB + BC}{OA + AB} = 1 + \frac{BC}{AB} - \frac{BC}{r\,AB} = 1 + r - 1 = r$$

La progresión geométrica generada por esta mediedad puede, por lo tanto, expresarse de dos modos:

Entra la cuadrilla, y con ella se introduce un movimiento rectilíneo. La recta de la lucha, del enfrentamiento, que parte en dos el ruedo, desde la puerta de entrada hasta la puerta de salida. También parece dividir el público: los nuestros y los de enfrente. Sólo con el fin de la lucha, con la muerte del toro, se resorberá esta oposición, en el reino restaurado del círculo.

“Corrida”, serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CD} = \ldots = r \tag{2}$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OD} = \ldots = r \tag{3}$$

Podemos luego considerar el punto *O* como el origen del sistema de coordenadas natural de la progresión, y notar así los intervalos:

OA = a; OB = b; OC = c;...

La relación (3) puede entonces escribirse:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots = r$$

Recorriendo la progresión hacia la derecha, cada intervalo es igual al anterior multiplicado por *r*. Como $r > 1$, la progresión tiende hacia $+ \infty$.

Recorriendo la progresión hacia la izquierda, cada intervalo es igual al anterior dividido por *r*. Como $r > 1$, los intervalos tienden hacia cero, y los puntos hacia el origen *O*, el segundo límite de la progresión.

Por lo tanto, la progresión está enmarcada entre dos polos, el *origen* (*O*) y el *ilimitado* ($+ \infty$).

Si la progresión es inferior a 1, obtenemos la progresión inversa, idéntica, pero recorrida en sentido contrario.

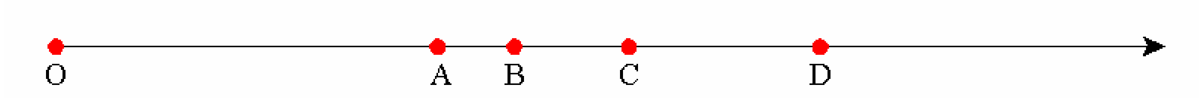
Cada mediedad geométrica determina por lo tanto su propio polo O, punto de referencia para la progresión generada, cero de su expresión aritmética, límite de su despliegue espacial.

Ejemplos :

AB = 1	BC = 2	⇒	r = 2	y	0A = 1
	Progresión :	(0) ←	...1, 2, 4, 8, 16,...		→ (∞)
AB = 2	BC = 5	⇒	r = 5/2	y	0A = 4/3
	Progresión :	(0) ←	...4/3, 10/3, 25/3,...		→ (∞)
AB = 1	BC = 1.5	⇒	r = 1.5	y	0A = 2
	Progresión :	(0) ←	...2, 3, 4.5, 6.75, 10.125,...		→ (∞)

- Progresión armónica:

Sean cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* alineados de modo que sus intervalos formen una serie creciente (*AB* < *BC* < *CD*) en mediedad armónica:



El rejoneador ha emprendido su lucha con el toro. El tiempo marca su paso con las sombras alargándose a los pies de los protagonistas. Un sol lateral produce sombras paralelas, que refuerzan la recta horizontal de la contienda. El sol de otro momento mancha el público de enfrente. Tú, perdido entre la gente, tienes tu parte de cielo, y tu propia visión del ruedo, entre sus dos límites circulares, decentrados y deformados, y ves las espaldas de tus compañeros de sombra, y los bustos iluminados de los que sufren el sol.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

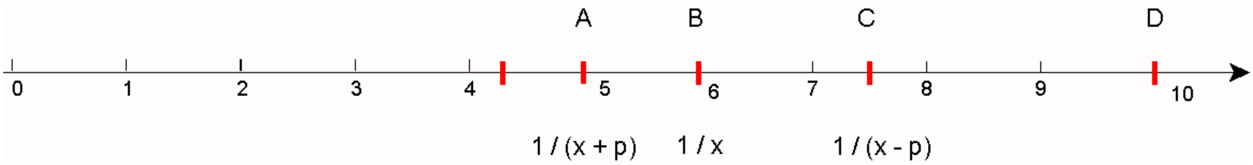
Una progresión armónica está constituida por términos que son los inversos de una progresión aritmética. Sea pues una progresión aritmética decreciente, de paso *p*:

$$x + p, \qquad x, \qquad x - p$$

y la serie armónica correspondiente creciente:

$$1 / (x + p), \qquad 1 / x, \qquad 1 / (x - p)$$

que corresponde a los intervalos *OA*, *OB* y *OC* medidos a partir de un origen *O* cualquiera:



Podemos derivar los valores de *x* y de *p* en función de los intervalos *AB* y *BC*:

$$AB = (1 / x) - 1 / (x + p)$$
$$BC = 1 / (x - p) – (1 / x)$$

Luego:

$$x = (BC – AB) / (2 . AB . BC)$$
$$p = (BC – AB)^2 / [2 . AB . BC (AB + BC)]$$

Por ejemplo, en la figura anterior, hemos elegido: *AB* = 1 y *BC* = 1.5, y verificamos que:

$r = 1/30$ y $x = 1/6$.

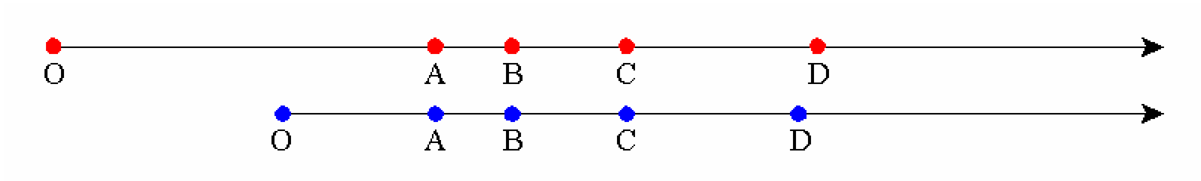
Cuando la serie aritmética progresa hacia el infinito, la serie armónica correspondiente progresa hacia un polo de coordenada $1/\infty$, es decir: cero. El otro extremo de la progresión armónica se alcanza cuando $x – nr = 0$, es decir: si la serie aritmética correspondiente pasa por el origen. En el ejemplo anterior, este valor se alcanza en el punto *G*, en la serie *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Si la serie aritmética se prolonga en los números negativos, se genera una discontinuidad en la serie armónica correspondiente, que pasa bruscamente de un valor positivo importante, (el infinito en el ejemplo), a un valor grande, pero negativo.

Tal comportamiento no nos puede dejar de recordar el de la proyección central de una recta, en la versión no-orientada, donde se genera la misma ruptura topológica en torno al punto de fuga, como aquí en torno al *polo al origen* de la progresión armónica...

El elipse del ruedo escorzado está mal dibujada, como por un niño distraído. A no ser que se trate de otra cosa: de la mandorla que confiere santitad al toro mártir esperando sin aliento la cruel acometida. Todo el ruedo se deforma : no es más ya que una almendra oscura, un adorno rojo como la sangre, el rojo del crepúsculo, la muerte del día. Pero hay otra posibilidad. A las dos y media, cuando el toro aún arremete con fuerza, el ruedo es un ojo gigante, su pupila una mancha de sol. El toro es una astilla, con toda la cuadrilla. Y nosotros, deslumbrados, no vemos más que un ojo agigantado, que ni siquiera nos mira.

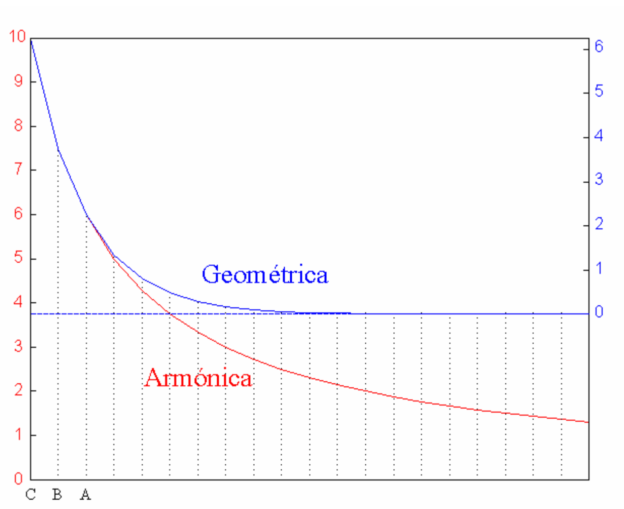
"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

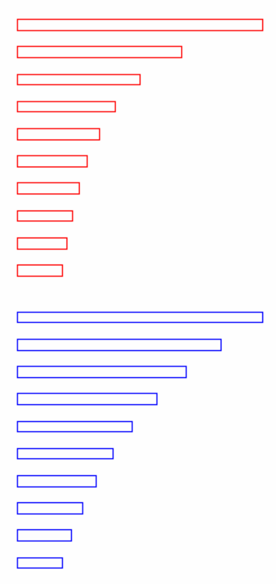
- Comparación entre las tres progresiones:



Las progresiones geométrica y armónica nos aparecen como dos variantes de un mismo tipo, caracterizado por dos polos diferenciados, uno al infinito y el otro en el origen del sistema de referencia natural de la progresión.

En el siguiente gráfico, se comparan una serie armónica y una serie geométrica calibradas en los valores *AB* = 1.5 y *BC* = 2.5. Como sus polos al origen no coinciden, cada una se expresa en su propio sistema de referencia (valores en azul para la geométrica, en rojo para la armónica). En el eje horizontal, se indica simplemente el número del punto dentro de cada progresión, empezando con el punto C y retrocediendo. Notamos que los cinco primeros puntos se corresponden bastante, pero, luego, la progresión geométrica tiende muy rápidamente hacia su polo, mientras que la armónica es mucho más lenta.





En los diagramas en bastoncillos, comprobamos que la serie armónica empieza a disminuir más rápidamente que la geométrica, y luego se ralentiza hasta producir disminuciones casi imperceptibles.

Es como cuando observamos una hilada de árboles lindando una carretera recta que se aleja al infinito: observamos un fuerte escorzo entre los primeros árboles, que se hace luego casi imperceptible entre los árboles lejanos.

Eso nos da un indicio más para sospechar del vínculo íntimo entre la progresión armónica y la proyección central...

En cuanto a la progresión aritmética, forma por sí sola un tipo de comportamiento peculiar, bien distinto del de las dos anteriores. Sin embargo, esta progresión resulta íntimamente vinculada a la progresión armónica conyugada, que se define con el mismo "paso".

De allí, no cuesta mucho intuir que la proyección central de una progresión aritmética bien podría ser la progresión armónica conyugada....

- La discretización del espacio -

Al detallar las progresiones engendradas por las tres primeras mediedades pitagóricas, hemos encontrado una puerta trasera que nos conducirá directamente, por los arcanos de la proyección central, hasta la propiedad esencial del espacio visual. Porque una serie aritmética, es decir: una fila de puntos equidistantes, cuando se proyecta centralmente sobre el plano del dibujo, se halla convertida en una serie armónica, cuyo polo del infinito es el límite hacia donde fugan los

Pues este gran ojo no es más que un espejo donde se mira el cielo. El centro no es el toro, ni el ruedo, ni el ojo del pintor, sino el Sol que todo lo ilumina, y lo aplasta, chafa y deforma, por su fuerza sin par, a mediodía. Aquí, sin embargo, no proyecta sus rayos como un astro distante, sino como un ojo al acecho, el gran mirón que todo lo mide, que todo lo ve. Tú, allí sentado, no sabes ya lo que miras ni quién te mira. Eres un centro más en el mundo de esferas cambiantes que forma la tragedia, no sabes si eres parte o estás excluido, perdido en el borde de un plato de arcilla.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

puntos proyectados. Y los pintores renacentistas, conscientes de ello, comprendieron de inmediato que podían así superar a sus admirados modelos griegos - ¡hasta el mismo Euclides! -, como los compositores medievales supieron hacerlo con la melismática música bizantina. Para resaltar tamaño descubrimiento, multiplicaron en las escenas pintadas: suelos de baldosas geométricamente ordenadas, hiladas de columnas regularmente espaciadas, bóvedas de casetones, tableros de ajedrez, manteles imprimados con motivos reticulares,... Discretizaron el espacio para que su proyección manifestara en el lienzo la maravillosa constancia matemática de las proporciones, convertidas, por la magia perspectiva, en otras proporciones.

Para comprender el verdadero alcance de tal propiedad, debemos desprendernos primero de ciertas ideas equívocas sobre el paso de la visión "antigua" a la visión "moderna": si bien es cierto que la proyección central condujo, a través de Desargues y Descartes, hacia la formulación moderna del espacio geométrico, su lugar en tal evolución quizás no sea tan fácil de precisar como lo intentó Erwin Panofsky en "La perspectiva como forma simbólica":

> "Si queremos garantizar la construcción de un espacio totalmente racional, es decir infinito, constante y homogéneo, la "perspectiva central" presupone dos hipótesis fundamentales: primero, que miramos con un único ojo inmóvil y, segundo, que la intersección plana de la pirámide visual debe considerarse como una reproducción adecuada de nuestra imagen visual.
>
> Estos dos presupuestos implican verdaderamente una audaz abstracción de la realidad (si por "realidad" entendemos en este caso la efectiva impresión visual en el sujeto).La estructura de un espacio infinito, constante y homogéneo (es decir, un espacio matemático puro) es totalmente opuesta a la del espacio psicofisiológico: "(...)".
>
> La construcción perspectiva exacta abstrae de la construcción psicofisiológica del espacio, fundamentalmente: el que no sólo es su resultado sino verdaderamente su finalidad, realizar en su misma representación aquella homogeneidad e infinitud que la vivencia inmediata del espacio desconoce, transformando el espacio psicofisiológico en espacio matemático. Esta estructura niega, por lo tanto, la diferencia entre delante y detrás, derecha e izquierda, cuerpos y el medio interpuesto ("espacio libre"), para resolver todas las partes del espacio y todos sus contenidos en un único *Quantum continuum*; prescinde de que vemos con dos ojos en constante movimiento y no con uno fijo, lo cual confiere al "campo visual" una forma esferoide; no tiene en cuenta la enorme diferencia que existe entre "la imagen visual" psicológicamente condicionada, a través de la cual aparece ante nuestra conciencia el mundo visible, y "la imagen retínica" que se dibuja mecánicamente en nuestro ojo físico (porque nuestra conciencia, debido a una peculiar "tendencia a la constancia" producida por la actividad conjunta de la vista y el tacto, atribuye a las cosas vistas una dimensión y una forma que provienen de ellas como tales y se niega a reconocer, o al menos a hacerlo en toda su extensión, las aparentes modificaciones que la dimensión y forma de las cosas sufren en la imagen retínica); y, en fin, pasa por alto un hecho importantísimo: el que en esta imagen retínica - prescindiendo totalmente de su "interpretación" psicológica y del hecho de la movilidad de la vista - estas formas son proyectadas, no sobre una superficie plana, sino sobre una superficie cóncava, con lo cual, ya a un nivel de grado inferior y aún prepsicológico, se produce una discrepancia fundamental entre la "realidad" y la construcción (es obvio que también surge esta discrepancia en los análogos resultados obtenidos mediante un aparato fotográfico)."
>
> *Erwin Panofsky*[1]

En esta crítica de la "construcción legítima", tan densa, cuyo defecto consiste precisamente, para nosotros, en confundir las épocas, los argumentos y sus exponentes, para mejor persuadirnos de la validez prestada luego a la perspectiva curvilínea, el autor resume útilmente las creencias de su tiempo respecto a la supuesta "matematización" del espacio.

Vemos como E. Panofsky se muestra muy influenciado por la mentalidad cientificista que por otra parte critica: divide la visión en un proceso físico y otro psicológico, y muestra una excesiva confianza hacia el primero, como si el ojo fuera un admirable mecanismo de relojería, separable de la mente que lo interpreta. Tal descripción, la vemos por primera vez imponerse en

[1] "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky, versión castellana de Virginia Careaga, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999.

La lucha se hace brutal. El centro es la acción. El público se ve envuelto en un movimiento de remolino, luego salpicado por la sangre brotando. Hay como un movimiento de ola, radiando desde la herida. La espiral une el círculo inmóvil al elipse de la contienda, la redonda pasividad al trazo recto de recia violencia. Luego, el elipse, soslayado, diforme, manda su horrendo goteo al mundo de los puntos. Unidad y multiplicidad. Formas oscuras y sombras rojas. La esfera centrípeta / centrífuga.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

la obra de Diderot, y, de hecho, no es anterior a la Ilustración, donde nacen los mitos de la ciencia positivista, decimonónica.

Quizás se podría acercar al uso de aparatos ópticos (espejos cóncavos y lentes de cámara clara) que hicieron servir ya, según la tesis brillantemente expuesta e ilustrada por David Hockney en "...", los primeros pintores renacentistas en pos de realismo "fotográfico", especialmente en Flandes, luego entre los caravagistas; pero nada tiene que ver, en mi opinión, con la elaboración perspectiva de Brunelleschi, de Alberti, de Piero de la Francesca, o del Leonardo geómetra nutrido de Euclides, la cual se transparenta en los experimentos del primero, en el tratado de los siguientes y en los cuadernos del último; sus autores muestran la misma indiferencia hacia la fisiología del ojo que el mismo Euclides: allí donde éste la ignora simplemente, ellos la burlan, con saltos metafísicos, directamente desde lo representable hacia la geometría.

La apuesta de E. Panofsky por la "realidad de la imagen retiniana" ha sido suficientemente criticada por autores posteriores para que sea necesario aquí extenderse más en este tema. En cuanto a la visión binocular, si es cierto que trae considerables ventajas, comparada con la perspectiva monofocal, en particular para la percepción del movimiento, también es evidente que no modifica sustancialmente las propiedades esenciales del espacio visual, de las cuales un tuerto se beneficia tanto como los demás. El cine, que se pasa muy bien de los efectos estereoscópicos repetidamente experimentados con escaso éxito, nos muestra también cuánto la perspectiva se beneficia del movimiento, afirmándose en él más aún que en las imágenes detenidas: en el siglo XX, las películas se han convertido en el campo privilegiado para el despliegue de la proyección central, cuyas propiedades quedan allí magnificadas, mucho más que en la fotografía o en la pintura.

Más grave resulta la crítica según la cual la perspectiva central hace aparecer un "infinito" que sería ajeno a la percepción visual. En la parte truncada de la cita anterior (marcada por "(...)"), E. Panofsky cita a su vez este pasaje de "Filosofía de la forma simbólica", de su maestro Ernst Cassirer:

"La percepción desconoce el concepto de lo infinito; se encuentra unida, ya desde un principio, a determinados límites de la facultad perceptiva, a la vez que a un campo limitado y definido del espacio. Y, puesto que no se puede hablar de la infinitud del espacio perceptivo, tampoco puede hablarse de su homogeneidad. La homogeneidad del espacio geométrico encuentra su último fundamento en que todos sus elementos, los "puntos" que en él se encierran, son simplemente señaladores de posición, los cuales, fuera de esta relación de "posición" en la que se encuentran referidos unos a otros, no poseen contenido propio ni autónomo. Su ser se agota en la relación recíproca: es un ser puramente funcional y no sustancial. Puesto que, en el fondo, estos puntos están vacíos de todo contenido, por ser meras expresiones de relaciones ideales, no hay necesidad de preguntarse por diferencia alguna en cuanto al contenido. Su homogeneidad no es más que la identidad de su estructura, fundada en el conjunto de sus funciones lógicas, de su determinación ideal y de su sentido. El espacio homogéneo nunca es el espacio dado, sino el espacio construido, de modo que el concepto geométrico de homogeneidad puede ser expresado mediante el siguiente postulado: desde todos los puntos del espacio pueden crearse construcciones iguales en todas las direcciones y en todas las situaciones. En el espacio de la percepción inmediata este postulado no se realiza nunca. Aquí no existe identidad rigurosa de lugar y dirección, sino que cada lugar posee su peculiaridad y valor propio. El espacio visual y el espacio táctil concuerdan en que, contrariamente al espacio métrico de la geometría euclidiana, son "anisótropos" y "heterogéneos"; las directrices fundamentales de la organización (delante-detrás, arriba-abajo, derecha-izquierda) son en ambos espacios fisiológicos valores que se corresponden de modo diverso."

Ernst Cassirer[1]

[1] Citado en: "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky, versión castellana de Virginia Careaga, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999.

Uno preferiría mirarlo todo desde arriba, como el sol, o mejor: por la ventana de una perspectiva clásica, como la que ofrecen las pantallas, con la posibilidad de acercarse mucho sin participar en nada...

Pero hemos de detenernos un momento, porque algo importante se está produciendo en la otra página, donde entra en escena Leonardo Da Vinci, y la música

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

El "espacio métrico de la geometría euclidiana" aquí descrito, es el que identificamos al *espacio cartesiano*, efectivamente infinito, constante y homogéneo, donde Newton y Leibniz desarrollarán la geometría diferencial. Pero este espacio poco tiene que ver con el de la perspectiva central, con su punto de vista y sus líneas de fuga, donde la verticalidad está tan marcada como lo requiere la escena, y cuyo cuadro, doblemente enmarcado por la materialidad del soporte (papel o pantalla) y por la necesaria limitación del ángulo de vista, consubstancial al método, manifiesta, con una fuerza superior a cualquier otro modo de representación, las categorías aristotélicas y su diferenciación visual: arriba-abajo (según la gravedad, donde el paralelismo se mantiene en la situación más natural para la cabeza o el cuadro), delante-detrás (con el escorzo), izquierda-derecha.

En cuanto al infinito, su representación perspectiva es la del ojo mismo, y de la geometría griega: algo cuyo fin no se percibe, donde las paralelas parecen converger (como lo dice la sexta proposición de la óptica de Euclides), que se manifiesta claramente al ojo, por ejemplo, en la línea del horizonte que separa el cielo del mar: una línea que no existe fuera del ojo, pero que el ojo identifica inmediatamente en la escena, porque es para él un esquema primario, con la misma importancia que el ángulo recto, el círculo o el triángulo equilátero...

Nos oponemos, por lo tanto, frontalmente aquí, a la opinión expresada por E. Panofsky y E. Cassirer, pues el "infinito" que ellos consideran abstraído de la percepción será solamente aquella infinitud positiva manejada por la matemática moderna, representada en el método de Monge, y no este familiar "ilimitado" hacia donde *vemos* fugar las paralelas, cuyo concepto la perspectiva central comparte con la óptica antigua, con la geometría proyectiva y con el mismo ojo. No existe ningún abismo metafísico que separe la perspectiva central de la óptica euclidiana, y la prueba es que el nuevo método no fue censurado ni por las iglesias ni por los eruditos, porque no significaba la menor revolución de tipo copernicano, sino que se inscribía, conscientemente, en la continuidad de la tradición, donde sólo pretendía aportar un progreso.

Nos falta aún rechazar un argumento, quizás el más anclado en la tradición histórica, según el cual el espacio visual, naturalmente discreto, hubiera sido abstraído por la perspectiva en un espacio continuo, más racional pero menos sensible. Creo que es todo lo contrario: el ojo percibe naturalmente de forma continua, como en la pintura china de paisajes, y lo que permitió la perspectiva renacentista fue, precisamente, discretizar el espacio visual, de manera coherente, en el plano del dibujo.

Una escalera, por ejemplo, se manifiesta al oído mediante una serie de pasos, lentos o rápidos, ascendentes o descendentes, lejanos o próximos, que sólo podemos contar para precisar nuestra idea auditiva de la misma. El ojo, en cambio, une las huellas y contrahuellas, y percibe naturalmente la misma escalera como un todo continuo, que responde al esquema básico de un plano inclinado. Desde luego, el ojo percibe también los peldaños, pero solamente como una discretización secundaria de la forma plana esencial, discretización cuya regularidad delata al ojo la impronta humana, como en estas pirámides escalonadas, que sólo difieren de un accidente natural por la regularidad de sus gradas.

En la cueva de Lascaux, los animales representados se funden con el fondo, cuyo color y relieve a menudo se aprovecha para enriquecer la escena: ¿acaso el "quantum continuum" con el cual E. Panofsky caracteriza la pretensión perspectiva no está ya presente? Pero existe, además, una serie de pequeños dibujos, tan sorprendentes como misteriosos: unos tableros coloreados de los cuales sólo podemos afirmar que sus autores, quince mil años ha, discretizaron allí el espacio, sin afán imitativo, abstrayéndose, quizás por primera vez, de la naturaleza, para expresar a los ojos de sus contemporáneos algo que sólo existe en la mente humana...

Gran parte de la arquitectura antigua parece querer resaltar lo discreto como un signo distintivo de la civilización: columnas, almenas, pirámides... Pero, durante mucho tiempo, no se podían representar tales estructuras discretizadas, sino en planta o en alzado. Las complejas estructuras medievales se determinan siempre en planta, y cuando Villard de Honnecourt quiere mostrarnos precisamente las relaciones formales de una iglesia, sólo la puede dibujar en planta.

Uno siempre anhela lo que no tiene. La pintura siempre soñó con la movilidad. Para Picasso, la fuente de emulación era, ante todo, la danza. Para Leonardo Da Vinci, fue la música. En el magnífico texto reproducido aquí al lado, Leonardo describe, con palabras mucho más precisas y profundas que las de Alberti, lo que fue el gran sueño de la perspectiva central, en sus principios.

"El músico", Leonardo Da Vinci.

Allí, los constructores de la época aplicaban conscientemente la parte discreta del cuadrivio - aritmética y música -, y en ella arrancaban las proporciones que luego se conducían hacia las fachadas. Los arquitectos actuales no han cambiado mucho al respecto, y apenas si suelen convertir la planta de sus primeras reflexiones en una axonometría donde controlar nuevas partes del diseño.

Los pintores del quattrocento italiano soñaron con algo mucho más fuerte: llevar directamente la discretización del espacio al plano de la pintura y, al precio de convertir la arquitectura en mera utilidad, crear para el ojo un arte artificial y supremo, comparable solamente con la música. No era ya el mundo, pues, que se podía discretizar, sino, gracias a las maravillosas propiedades de la proyección central, el mismo espacio pictórico, hecho así autónomo y universal. Este proyecto fue el que los alentó a establecer las reglas exactas de la perspectiva, y a renunciar - momentáneamente - a los dispositivos ópticos que hacían servir los flamencos para, más humildemente, plasmar con exactitud escenas reales en un lienzo.

"DA EL PINTOR GRADOS A LOS CUERPOS QUE VE EL OJO, COMO EL MÚSICO A LAS VOCES QUE EL OÍDO ESCUCHA

Aunque las cosas observadas por el ojo se tocan entre sí cuando se alejan, no otra cosa haré con mi regla de las XX brazas de intervalo que el músico con las voces, pues si éstas reúne y suena a un tiempo, no ignora, por ello, las distancias entre unas y otras, y así, con los nombres de primera, segunda, tercera, cuarta y quinta, ha enunciado los distintos grados que a las alzas y bajas de la voz aluden.

Si tú, músico, me dices que la pintura es mecánica, porque realizada con las manos, has de admitir que la música lo es con la boca, órgano humano también, aunque no por cuenta del sentido del gusto, como tampoco la mano por cuenta del sentido del tacto. Son aún menos dignos los dichos que los hechos. Pero tú, que escribes de ciencias, ¿no copias acaso con la mano, cual el pintor, lo que está en tu mente? Y si tú me dices que la música se compone de proporciones, te replicaré que de ellas se sirve la pintura, como pronto podrás ver."

Leonardo da Vinci[1]

¿No está todo dicho? ¿No está todo muy claro? La perspectiva central es sublime porque permite discretizar el espacio sobre el lienzo, manteniendo la proporción (toda progresión aritmética, bien se mantiene, si es frontal, bien se convierte en armónica, sin pérdida de orden). Gracias a sus reglas límpidas, el pintor puede ahora emular al músico. No hay nada más, ningún asomo de revolución metafísica, ninguna voluntad en abstraerse del espacio visual, sino, al contrario, la realización maravillosa del viejo sueño griego: regir el arte del color, hasta entonces aproximativo y arbitrario, con las mismas proporciones sensibles que gobiernan el oído. El gran cambio metafísico, el invento de un espacio positivamente infinito y desprovisto de la diferenciación visual entre altura, anchura y profundidad vendrá mucho más tarde, después de René Descartes, y este espacio ya no será proyectivo. De momento, la única víctima del descubrimiento renacentista es, probablemente, la arquitectura, reducida, para varios siglos, por lo menos para los grandes teóricos del humanismo europeo, a un simple decorado de teatro, privada de su antiguo monopolio sobre el espacio tridimensional, y forzada en rivalizar de perspectivas y escorzos con un arte más ligero, más libre y transportable...

[1] "Tratado de pintura", Leonardo da Vinci, versión castellana de Ángel González García, ediciones Akal, Madrid, 2004.

Origen de las ilustraciones

p.096 iz. hasta p.103: Serie de 29 platos pequeños. Corrida. Diám.: ~ 17 cm. Realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953 (Musée d'art moderne, Céret), *in* "Cerámica de Picasso", Georges Ramié, Ediciones Polígrafa, Barcelona,1974.

p.104 iz.: - "El músico", Leonardo Da Vinci (1485), óleo sobre tela, 31 x 43 cm, Pinacoteca Ambrosiana, Milano, *in* http://www.grandspeintres.com

- 14 -

La mirada

Volvamos ahora a la serie de Picasso, que sigue repitiendo, una y otra vez, el ruedo, la acometida y la muerte. El Sol de los cielos y el Sol de las arenas intercambian energías, parecen alimentarse uno de otro. La perspectiva transforma la curva del ruedo en una parábola, que abre sus brazos al infinito, hacia atrás del tercer ojo, idealmente pegado al borde del ruedo, el Sol húmedo de la mirada. O bien todo se vuelca, ojos, Soles, hipérbolas, y sólo mantienen firme la línea del horizonte los cascos del caballo y las pezuñas hendidas del toro, y sus astas amenazantes.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

14. La mirada

- Los ojos de Euclides -

El primer momento de la óptica, el que ocupa, en Europa, los dos milenios anteriores al siglo XV, se halla enteramente resumido en un pequeño libro, atribuido al geómetra Euclides, con el simple título de "Óptica".

Empieza con las siguientes siete definiciones:

1. Supóngase que las líneas rectas trazadas a partir del ojo se propagan a lo largo de un espacio de grandes magnitudes.
2. Y que la figura contenida por los rayos visuales es un cono que tiene el vértice en el ojo y la base en los extremos de los objetos vistos.
3. Y que se ven los objetos en los que los rayos visuales inciden y no se ven aquellos objetos en los que los rayos visuales no inciden.
4. Y que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales.
5. Y los que se ven bajo ángulos más elevados parecen más elevados, y los que se ven bajo ángulos más bajos, más bajos.
6. Y, de manera semejante, parecen más a la derecha los que se ven bajo rayos más a la derecha y más a la izquierda los que se ven bajo rayos más a la izquierda.
7. Los objetos que se ven bajo mayor número de ángulos aparecen con más precisión.

Euclides[1]

Hasta aquí, tenemos el inicio de una "pequeña algorítmica del trazado de rayos" concisa y precisa: rayos rectilíneos (1); fuente puntual (2); intercepción de la escena (3); formación de la imagen (4); invariancia topológica en profundidad (con (4), por precisar), en altura (5) y en anchura (6); cálculo de error (7).

Siguen cincuenta y ocho proposiciones, todas ellas demostradas, con procedimientos puramente geométricos: sobre el desvanecimiento de los objetos lejanos[2]; su desaparición[3]; la mengua causada por la distancia[4]; la convergencia de las paralelas proyectadas[5]; la determinación de las alturas mediante la observación de las sombras proyectadas[6] o el uso de un espejo[7]; las deformaciones de las figuras geométricas del espacio según cómo se miran[8], con un solo ojo[9] o con dos[10]; la relatividad del movimiento[11].

---

[1] "Óptica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.

[2] Proposición 2: "De los objetos de iguales longitudes que están situados a distancia, se ve con más precisión los que están situados más cerca".

[3] Proposición 3: "Cada uno de los objetos vistos posee cierta longitud de separación que, una vez situado allí, ya no se ve".

[4] Proposición 5: "Las magnitudes iguales situadas a distancias desiguales parecen desiguales, y parece siempre mayor la que está situada más cerca del ojo".

[5] Proposición 6: "Los espacios paralelos vistos de lejos parecen convergentes".

[6] Proposición 18: "Conocer de qué tamaño es una altitud dada cuando brilla el sol".

[7] Proposición 19: "Conocer de qué tamaño es la altitud dada no habiendo sol".

[8] Proposición 22: "Si se pone un arco de círculo en el mismo plano en que está el ojo, parece una línea recta".
Proposición 36: "Las ruedas de los carros parecen unas veces circulares, y otras, oblongas".

[9] Proposición 23: "Una esfera vista de cualquier manera por un ojo parece siempre menor que una semiesfera, y la parte vista de la esfera parece un círculo".

[10] Proposición 26: "Si la distancia entre los ojos es mayor que el diámetro de la esfera, se verá más de una semiesfera de la esfera".

[11] Proposición 51: "Si al trasladarse varios objetos a distinta velocidad se traslada también con ellos el ojo en la misma dirección, los objetos que se trasladan a la misma velocidad que el ojo parecerán estar fijos; los que se trasladan más despacio, que se trasladan en dirección contraria; los que van más deprisa, que se trasladan hacia lo que les precede".

A veces, el sol se ve negar su inmaterial unidad, se hace derrame de luz viscosa, canales amarillos en busca de desagüe; el suelo entonces ya no parece plano. Hay avalanchas, cataractas que afectan el ojo, despegamento de su retina demasiado expuesta. El toro-pupila se empaña. Entonces solamente, quizás, nos damos cuenta de los pocos colores, tan frágiles, que hasta aquí nos han llevado: son los de Lascaux y los de Empédocles: el rojo, el blanco, los ocres y el negro.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

Frente a tan brillante construcción, puede sorprender que parte de la crítica moderna haya llegado a poner en duda la autoría de Euclides, no por razones históricas o filológicas, sino porque "la Óptica no posee el orden, la claridad y el rigor matemático de los Elementos"[1].

No entraremos aquí en la polémica sobre el estado del texto, que no nos corresponde, pero sí nos importa rehabilitar una obra esencial para nuestra definición de la geometría sensible, y que presenta, según creemos, un orden y una claridad mucho más fáciles de captar que sendas calidades en los "Elementos"... Sus demostraciones nos parecen tan elegantes como rigurosas, aunque no responden del todo al ideal platónico de la geometría sintética, porque no pueden.

Desde luego, la "Óptica" no tiene el mismo alcance que los "Elementos", cuyo método axiomático, generalizado por el matemático David Hilbert, podía aún influir en el desarrollo de la lógica a principios del siglo XX[2]. Sin embargo, su proceder nos parece ahora más moderno que la ambición, reclamada por la obra magna de Euclides, de establecerse como una estructura atemporal, "insensibilizada", como lo muestra la caducidad, para nosotros, de los últimos ramalazos platónicos en la geometría proyectiva.

Se reprocha también a los griegos en general de "nunca haberse ocupado de la luz como fenómeno físico"[3], y a Euclides en particular de haber adoptado la opinión, mayoritaria en su época, de que "los rayos visuales son emitidos por los ojos a condición de que exista una luz exterior"[4]. Sin embargo, esta última idea resulta muy productiva, como principio de modelización, y es precisamente la que utilizan los algoritmos actuales de renderización, en los cuales se mandan rayos visuales, desde el punto de vista, al encuentro de los objetos iluminados de la escena, para traer esta luz hacia la imagen... A decir verdad, nuestro pensamiento algorítmico tampoco se interroga sobre la naturaleza de la luz, y las teorías contemporáneas al respecto no le serían de mucha ayuda en su propósito de hacer visible una escena virtual.

Se reprocha finalmente a los griegos en general y a Euclides en particular de haber ignorado totalmente la fisiología del ojo. Pero los pintores renacentistas hicieron lo mismo, y nosotros también, aquí, seguiremos como ellos, so pena de caer en la pretensión cientificista, lamentablemente muy común aún entre los comentaristas, según la cual los físicos y los médicos sabrían ahora más del ojo y del oído que los pintores y los músicos... ¿Qué nos ha aportado la fisiología? Nada, sino un triste velo que ha puesto sobre nuestros ojos, y que nos impide considerar el carácter más general de nuestra percepción del mundo.

Lo irónico, es que la crítica moderna, en su afán de rehabilitar la óptica de Euclides, pero solamente como un momento histórico insoslayable, ha concedido cómodamente que su fisiología del ojo y su física de la luz fueran muy pobres y equivocadas, en el mismo momento en que los desarrolladores de la óptica aplicada actual (los programadores y los que se expresan con las nuevas herramientas) retoman, quizás sin saberlo, pero al pie de la letra, los principales presupuestos griegos al respecto...

Debemos ahora despejar nuestro horizonte de aquellas críticas decimonónicas, anacrónicas y poco productivas, no sólo para hacer justicia a la obra de Euclides, sino porque se juega aquí nuestra propia comprensión del espacio visual, y de su carácter más general.

Retrocediendo en la historia de la recepción de la "Óptica", observamos que los renacentistas hicieron gran caso de ella, pero atrayéndola hacia sus propios intereses, de modo que "algunas versiones renacentistas - la italiana de Egnatio Danti (Florencia, 1573) y la española de Ondériz (Madrid, 1585), por ejemplo - se presentan bajo el título de *Perspectiva*"[5]. Sin embargo,

[1] Ver la introducción de Paloma Ortiz García en "Óptica", Euclides, Editorial Gredos, 2000.
[2] "Grundlagen der Geometrie", David Hilbert (1899), discutido en "Invitation à la géométrie", Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.
[3] Ibid.
[4] Ibid.
[5] Ibid.

Nos damos ahora cuenta de que el cielo siempre ha sido gris. Nada de azul, nunca: nubes blancas y negras, banderas rojas. Nada de verde tampoco: no hay generación aquí, sino lucha y muerte. Sus platos de arcilla, Picasso los ha arrancado de una cueva, y sólo puso el Sol, que allí no había. Colores frágiles, porque desenterrados. Y líneas errabundas, porque formadas por abultamientos de rocas y oquedades, profundas grietas, labios abiertos, hombros hundidos, dibujando las cazas milenarias, tantas veces repetidas como ha desde que el toro muere de conocer el hombre.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

Euclides nunca habla de dibujo, y menos de pintura, sino que se limita en preguntarse: ¿Cómo *parecen*, ante la mirada, los objetos del espacio tridimensional? Por lo tanto, si tuviéramos que acercar la "Óptica" a un arte, sería indudablemente a la arquitectura, que se nutre de las mismas interrogaciones, y quizás a la elaboración de decorados en relieve, pero seguramente no a aquella "escenografía" (es decir: perspectiva) que Vitruvio describirá diciendo que "hace ver no sólo la elevación de una fachada, sino también el arranque de los laterales por el concurso de todas las líneas que acaban en un centro"[1], centro que Euclides nunca menciona, porque no habla de dibujo.

En los tiempos de Euclides, el campo privilegiado para la aplicación de la mirada, y luego de la geometría, era la astronomía, la observación del cielo aparente. El geómetra alejandrino (o algún predecesor de su "Óptica" por nosotros desconocido) hizo un notable esfuerzo para volver la mirada hacia el mundo terrenal, la escala humana, el espacio donde se mueven "las ruedas de los carros" (proposición 36), pero lo hizo como geómetra, prestando la menor atención posible a las contingencias, centrándose en la percepción de la recta, del cono, del círculo o del cilindro, es decir: de los esquemas visuales primarios. ¿Qué buscaba?

Ante la obra euclidiana, siempre conviene echar una mirada hacia Aristóteles, que suele marcar las pautas seguidas luego por el alejandrino... ¿Y qué dice el gran estagirita respecto a la visión? Dice primero lo siguiente:

"El objeto de la vista, es lo visible. El objeto de la vista es el color y [la fosforescencia]. Lo visible es en efecto el color, y éste es el revestimiento superficial de los objetos visibles por sí - entiendo "por sí" no en el sentido lógico, sino en el sentido de que el objeto posee en sí la causa de su visibilidad. Todo color pone en movimiento el diáfano en acto [el aire, por ejemplo] y eso es lo que constituye su naturaleza. Por esta razón, el color no es visible sin luz, y sólo en la luz vemos el color de cada objeto".

Aristóteles[2]

Desde luego, según los conocimientos actuales, la teoría aristotélica de la luz es simplemente falsa. Pero eso no importa aquí. Lo que afirma Aristóteles, es que el objeto propio de la vista es el color. En el mismo texto, insiste en que sólo el color pertenece en propio a la vista, y a ningún otro sentido. "Lo que se ve", propiamente, es el color. Y Euclides nunca habla del color. Por lo tanto, su "Óptica" no trata, propiamente, de "lo que se ve". ¿De qué habla entonces?

Para Aristóteles, la visión es una forma de movimiento: el ojo no puede contentarse con "padecer", con recibir de manera pasiva la información exterior, sino que, cómo los demás sentidos, es una "potencia del alma", que actúa en la mirada.

Lo que hace la "Óptica" es precisamente eso: poner la geometría en movimiento, para poder aplicarla a una descripción de la mirada. Pero en este trance, la geometría deja de ser la estructura eterna y universal de los "Elementos", debe luego cambiar de nombre, y se convierte en *óptica*.

Toda la "Óptica" es movimiento, desde la primera proposición - curiosamente poco comentada - según la cual "Ninguno de los objetos vistos se ve entero al mismo tiempo"[3]. Esta afirmación, esencial, hace de la mirada un proceso de *rastreo*: la explicación de ello se basa, para Euclides, en la divergencia de los rayos visuales, que se separan desde su origen, no pudiendo por lo tanto incidir *continuamente* sobre un objeto dado, el cual "luego no se verá al mismo tiempo, pero parece que sí porque los rayos visuales se trasladan rápidamente"[4]. Tal interpretación resalta,

---

[1] "Les dix livres d'architecture", Vitruve, versión francesa de Claude Perrault (1684), éditions Pierre Mardaga, Liège, 1988.
[2] "De l'âme", Aristote (p. 57), versión francesa de E. Barbotin, Collection Tel, Gallimard, 1989.
[3] Proposición 1, en "Óptica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.
[4] Proposición 1, ibid.

Al prolongarse la tarde, llega un último invitado, un sirviente oscuro y familiar: la Sombra, el perceptor de la rústica economía en las plazas de toros: palcos de sol, palcos de sombra. Hemos salido de la tierra, devueltos a la razón de un manso atardecer. Ahora, entenderemos mejor los viejos colores, cuando el amarillo se apague, y los ocres se fundan en la noche...

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

desde luego, la falta de una teoría de los límites entre los griegos: no podían, como la algorítmica actual, concebir directamente la formación de una imagen continua a partir del trazado de una multitud de rayos, forzosamente discreta[1]. Sin embargo, el alejandrino salva aquí la dificultad, con una elegantísima evocación del fenómeno de persistencia retiniana: ¡chapeau! La primera proposición, lejos de ser un objeto curioso y equívoco, no es nada menos que la justificación del proceso "mecánico" de trazado de rayos, que se aplica en todo el resto del libro.

Esta manera de "mecanizar" la geometría, que ha sido continuamente criticada, hasta hoy, por los matemáticos rigurosos, se origina luego ¡en el mismo Euclides!, que termina su tratado con una serie de consideraciones sobre el movimiento de la mirada o de los objetos, como la proposición 51, que parece extraída de un manual de introducción a la física relativista (desde luego, esta descripción pertenece al relativismo perceptivo, no a la teoría de Einstein), o la proposición 56, que reza que "las magnitudes que crecen parecen acercarse al ojo"[2], expresando claramente la reciprocidad de la lógica perceptiva: si lo que se acerca parece crecer, lo que crece parece, a su vez, acercarse.

Concluiría al respecto que el verbo "parecer", omnipresente en el tratado, no insinúa una concepción ilusionista de la mirada, distinguiendo el ser de la apariencia, sino que se ha de entender en el sentido de una *comparecencia* recíproca de la escena ante la mirada, y de la mirada ante la escena: en un doble movimiento, como diría Aristóteles, desde el ojo que contempla, y desde los objetos bañados de luz.

Si el texto de Euclides da tan naturalmente hincapié a nuestra interpretación algorítmica, es porque, al hacer aquí de su geometría una estructura temporal, el genial alejandrino anticipa sorprendentemente las concepciones más modernas: diría que se ha mostrado en ello más contemporáneo nuestro que la mayoría de sus comentaristas actuales...

Sin embargo, la "Óptica" posee su límite interno, su propio escollo, que obstaculiza el camino de Euclides, el cual lo reconoce sin rodeos en la muy famosa y muy discutida proposición 8, obstáculo amargo y aparentemente insalvable al completo desarrollo del programa aristotélico.

* * *

- La octava proposición -

Proposición 8: Las magnitudes iguales y paralelas situadas a distancias distintas del ojo no se ven proporcionalmente a las distancias.

Euclides[3]

Eso es grave, y me imagino que debió causar una gran desilusión a Euclides, al aclararse que la visión, según dice la geometría, no percibe proporcionalmente, y que la geometría, aplicada a la visión, no confirma la intuición de Aristóteles:

"El oído constituye cierta proporción, razón por la cual toda impresión excesiva, lo agudo como lo grave, cancela el sentido del oído; del mismo modo, el exceso en los sabores destruye el gusto; en los colores, la vista queda abolida por el exceso de brillo o de oscuridad, y para el olfato, es el olor fuerte, el dulce como el amargo - todo eso supone que el sentido es una especie de proporción. Luego, las calidades sensibles causan placer cuando, primero puras y sin mezcla, están conducidas a cierta proporción - tales lo agudo, lo dulce, lo salado; de hecho causan entonces placer. De manera general, por otra parte, lo mixto realiza mejor una armonía que lo

---

[1] Pensar, por ejemplo, en las "integrales de Monte-Carlo", empleadas en el método aleatorio de trazado de rayos, que resuelven esta dificultad a partir de una aplicación nada trivial de la teoría de las probabilidades...
[2] Proposición 56, en "Óptica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.
[3] Proposición 8, ibid.

El sol, casi nocturno, se ha hecho un faro, y los grises de su sombra se vuelven azulados. El pintor inventa nuevas soluciones: ¿cómo representar los personajes en la sombra? En negativo, o con simples trazos. No hay imitación aquí: se trata de reinventar la mirada. El ruedo se ha convertido en media luna, invertida y creciente. La oscuridad va a ganar, y el ojo a ella se convierte: la parte de luz se hace borrosa, la parte de sombra más precisa.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

agudo o lo grave y, para el tacto, lo que puede ser calentado o resfriado. Ahora bien, el sentido, es la proporción; en cuanto a las impresiones excesivas, causan dolor o destrucción".

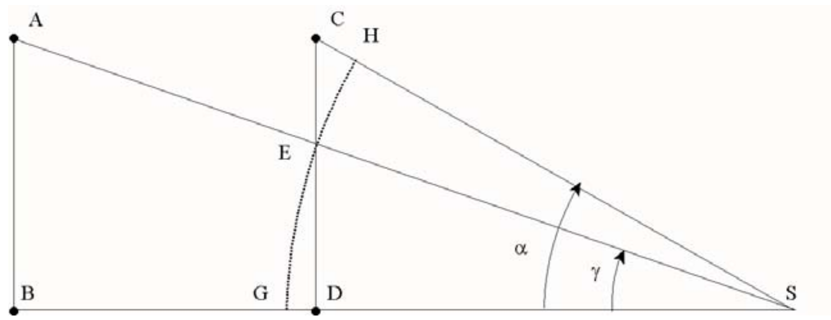
Aristóteles[1]

Aristóteles expresa aquí la relatividad de la percepción en general, la misma que Euclides describe en su proposición 51, en el particular de la visión de las distancias. Para los griegos, esta relatividad perceptiva es el campo donde se despliegan naturalmente las proporciones, herramientas necesarias y suficientes para comparar entre sí magnitudes que no se refieren a ningún absoluto (el absoluto eclipsa los sentidos). Entonces, ¿porqué las distancias no se dejan poner en proporciones ante la mirada?

A nosotros, tal descubrimiento nos sorprende doblemente: porque seguimos influenciados por la teoría helénica de las proporciones, y porque creemos, desde el Renacimiento, que las proporciones que se manifiestan en los objetos del espacio real también aparecen, directamente, ante la vista. Y he aquí que las distancias resultan tan difíciles de manejar como los colores, que los esfuerzos geométricos de Euclides en cuanto al espacio visual resultan tan estériles como los de Newton ante el color...

Los intentos desesperados de Euclides por recuperar geométricamente algo de la proporción visual (en las proposiciones 48[2] y 49[3], basadas en la consideración de los arcos capaces) no restan nada al carácter tajante, inapelable de su terrible octava proposición, y no cabe el menor error en la elegante demostración que de ella ofrece, la cual detallamos a continuación:

Lo que Euclides demuestra (ver figura) es que la razón de los ángulos γ y α según los cuales son vistos dos segmentos AB y CD, iguales y paralelos, no es igual a la razón inversa de sus distancias respectivas al punto S de observación.



Demuestra que:

SB / SD $>$ α / γ

Se traza primero el arco GEH centrado en S.

La demostración es puramente geométrica, y sólo utiliza relaciones de superficies (llamamos "área" la superficie de un triángulo y "sector" la superficie de un sector del círculo, definiéndose ambas entidades con tres puntos):

área SEC > sector SEH

área SED < sector SEG

Luego:

área SEC / sector SEH > área SED / sector SEG

Luego:

área SEC / área SED > sector SEH / sector SEG

[1] "De l'âme", Aristote (p. 81), versión francesa de E. Barbotin, Collection Tel, Gallimard, 1989.

[2] Proposición 48: "Hallar los lugares desde los cuales la misma magnitud parecerá la mitad o la cuarta parte o, en general, en la proporción en la que se corta el ángulo".

[3] Proposición 49: "Sea AB una magnitud vista. Digo que AB tiene lugares que, al poner el ojo en ellos, la misma magnitud parece a veces la mitad, a veces entera, a veces la cuarta parte y, en general, se ve en la razón dada".

Un último invento, una última oposición: el día luchando con la noche, que convierte los negros en rojos, las sombras en blancos. El amarillo ha desaparecido. Pero nada acaba aquí: el toro sigue de pie. En realidad, toda la serie es como una baraja: se puede volver a ordenar, mil veces, al azar, y componer mil otras historias. La pintura no puede convertirse en danza: es ingrávida y sin cansancio. A lo más, un cuento inacabable, dicho por marionetas, en la boca redonda de un teatro de tierra, modelado por un alfarero, pintado por una mirada.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

Luego, sumando en las razones los numeradores y los denominadores:

(área SEC + área SED) / área SED > (sector SEH + sector SEG) / sector SEG

O bien:

área SCD / área SED > sector SGH / sector SGE.

Pero, para los triángulos rectángulos:

área SCD / área SED = CD /ED

Pero, por el teorema de Tales:

AB / ED = SB / SD

Luego, como CD = AB, por hipótesis:

SB / SD = área SCD / área SED

Luego:

SB / SD > sector SGH / sector SGE

Como los sectores son entre sí como sus ángulos:

SB / SD > α / γ

Luego, la razón de las distancias es superior a la razón de los ángulos (Q.E.D.).

Ahora, si comparamos esta demostración, o cualquier otra de la "Óptica" euclidiana, con los escritos de los perspectivistas renacentistas, una diferencia esencial salta inmediatamente a la vista: Euclides nunca habla del cuadro, trabaja sin pantalla, sus imágenes se forman directamente en el ojo, sin intermediario. Sólo considera los ángulos visuales, como bien lo aclara desde las siete definiciones inaugurales, y no proyecta nunca sobre el plano.

En cambio, proyectar sin cuadro viene a ser lo mismo, geométricamente, que proyectar sobre un cuadro esférico cualquiera centrado en el punto de vista (por ejemplo, el que se manifiesta en la demostración anterior por su traza GEH en la figura). En efecto, en tal caso, las distancias proyectadas son iguales (obviando un factor de escala) a los ángulos visuales, es decir que las magnitudes consideradas por Euclides pueden medirse directamente en el dibujo.

Insistamos: no estamos diciendo que Euclides *pensara* en un cuadro esférico, lo cual sería un anacronismo, ya que Euclides no pensó en absoluto en un cuadro, decimos que su razonamiento sin cuadro es matemáticamente equivalente a una proyección sobre la esfera. Esta observación nos permite, para aclararnos, incluir la óptica euclidiana en nuestra teoría general de la proyección, insinuando un tercer lugar geométrico, neutral, - el cuadro esférico - entre los dos que menciona explícitamente Euclides: el lugar del ojo y el lugar del objeto. En este sentido, no hay por lo tanto nada paradójico en afirmar simultáneamente que Euclides proyectaba sin cuadro y que su óptica corresponde a una proyección central sobre la esfera.

Tal precaución, no la tomó Erwin Panofsky, y por ello, llegó a utilizar Euclides para confirmar su opinión de que los griegos veían las rectas como curvas. Sin embargo, como el mismo lo reconoce, la única proposición clara al respecto (la 22) establece el caso contrario, y la proposición 9, algo más hermética, habla de otro fenómeno; en cuanto a las numerosas anécdotas, descripciones y afirmaciones - antiguas y modernas - referidas a las curvaturas realmente aplicadas en la arquitectura griega, lo menos que se puede decir, es que resultan

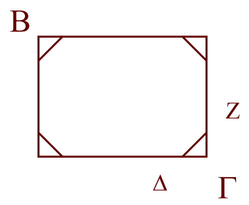
Este fue el primer plato de la serie que Picasso pintó. El toro empezó muerto, Faetón abatido arrastrado por las riendas del carro solar. A partir de allí, era inmortal, y podía dedicarse a su eterno retorno, su enfrentamiento sin fin con el rejoneador. En su inmemorial trayecto por las curvas de veintinueve platos, se benefició sin embargo - con infinita libertad, y toda la sensibilidad de su pintor - de una larga tradición, europea como él, de perspectiva.

"Corrida", serie de 29 platos pequeños, realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953.

confusas, y el mismo E. Panofsky no llega, en mi opinión, a sacar nada en claro de sus fuentes: "y es que estas curvaturas de la construcción de las que habla Vitruvio se producen precisamente en sentido contrario al que sería de esperar, teniendo en cuenta su fin originario de neutralizar las curvaturas visuales"[1]...

La proposición 9 de Euclides merece un estudio más detallado, que nos permitirá ilustrar un razonamiento típico de la geometría sensible en cuanto a la percepción del espacio.

Proposición 9: Las magnitudes rectangulares vistas a distancia parecen redondeadas.



Sea el rectángulo ΒΓ visto a distancia que se encuentra elevado. Puesto que cada uno de los objetos vistos tiene una longitud de separación que una vez que está allí ya no se ve [Proposición 3], entonces no se ve el ángulo Γ, sino que sólo aparecen los puntos Δ, Ζ. Eso sucederá de manera semejante también en cada uno de los restantes ángulos.

De modo que todo entero parecerá redondeado.

Euclides[2]

Valiéndose de un gran número de fuentes antiguas concordantes, E. Panofsky interpreta correctamente el sentido de esta proposición, pero la inserta en una serie de argumentos que le llevan a una conclusión insostenible, cuando dice: "Que un ángulo recto, visto desde lejos, parece un arco (e igualmente a la inversa, que un arco parece una línea recta en determinadas condiciones) nos lo muestra Euclides en el Teorema 9 y 22. Con mayor frecuencia puede encontrarse aplicada a objetos corpóreos; es decir, en la frase de que torres cuadradas parecen cilíndricas vistas desde lejos. (...) Vitruvio aconseja también curvar los elementos arquitectónicos horizontales como medida de compensación (...)"[3]. El texto aquí abreviado es el inicio de una larga nota del autor para explicitar la siguiente frase del texto principal: "Afirmando que todo lo que es recto es percibido siempre como recto, [Kepler] se había dejado condicionar por las leyes de la perspectiva pictórica sin pensar que, de hecho en el ojo no se proyecta la imagen sobre una *plana tabella*, sino sobre la superficie interna de una esfera visual"[4].

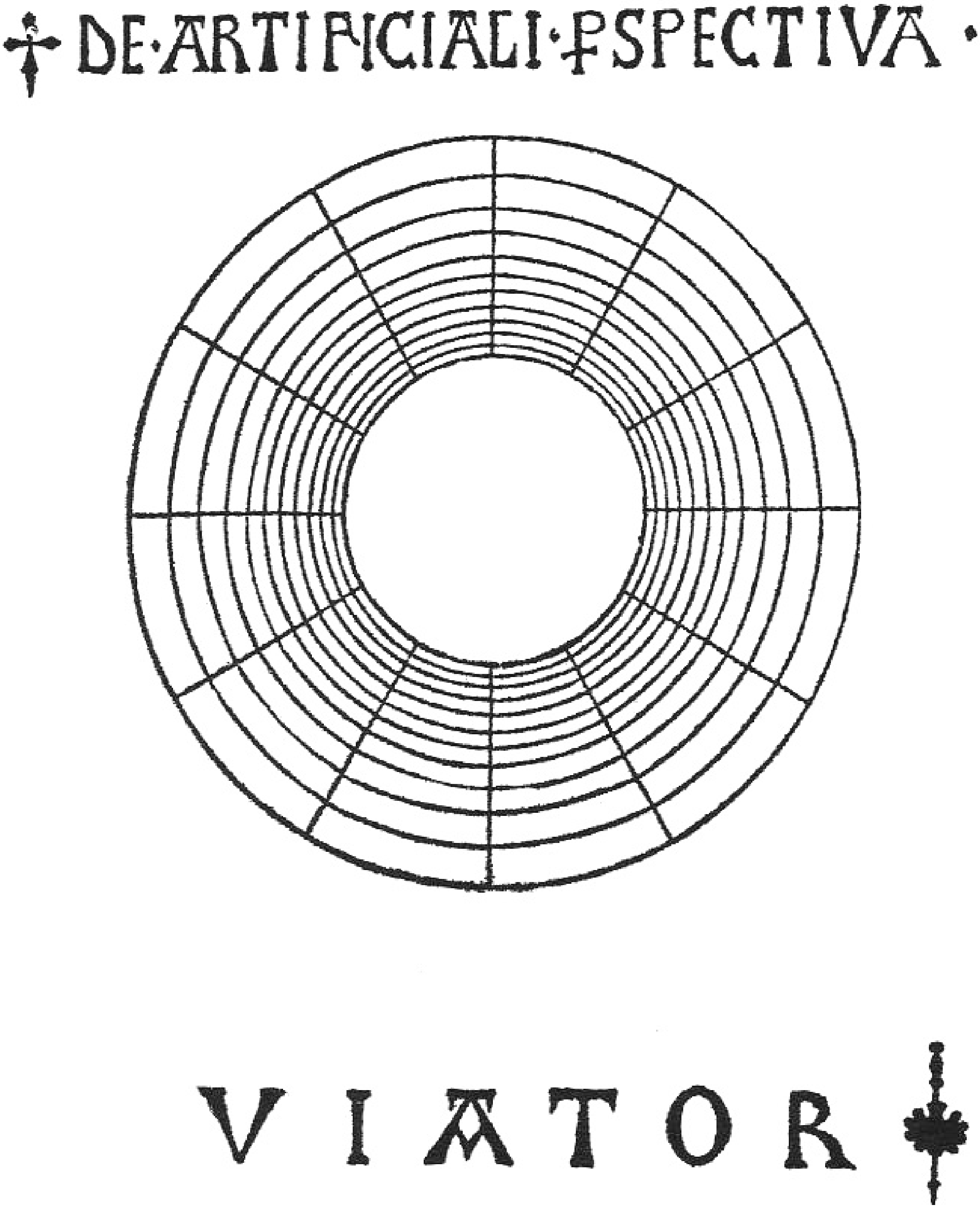
Ahora bien, el gran pensador alemán roza aquí la mala fe (o es que lo cegó su entusiasma por su propia teoría): en efecto, es evidente que la proposición 22 no presenta ningún argumento a favor del cuadro esférico, pues se verifica sobre el cuadro plano, donde un círculo ubicado en el plano de los ojos se proyecta precisamente como un segmento de recta.

La proposición 9 tampoco tiene que ver con la perspectiva curvilínea, donde las aristas (y no los ángulos) se curvan, tanto más ostensiblemente cuanto el objeto está cerca (y no alejado) del ojo. Incluso las mentes más "condicionadas por las leyes de la perspectiva pictórica" reciben el efecto aquí descrito por Euclides, el cual ofrece un recurso bien conocido, muy aprovechado por los programas de dibujo actuales, donde los círculos se simulan en la pantalla mediante polígonos, siendo vistos perfectamente circulares hasta que el utilizador se "acerque" mucho a uno de ellos (lo cual se hace agrandándolo en la pantalla, pues, como dice Euclides, "lo que crece, parece que se acerca"), descubriendo entonces que se trata, a lo mejor, de un simple octógono...

En resumen, no hay el menor argumento en la "Óptica" que nos permita deducir que Euclides viera "las rectas como curvas". Es más, de haber sido eso el caso, resultaría incomprensible que el geómetra alejandrino no lo hubiera expuesto claramente en su texto: en realidad, la teoría de E. Panofsky es meramente imposible.

---

[1] "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky (p. 110), versión castellana de Virginia Careaga, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999. El autor concluye que los griegos "sobrecompensaban"...
[2] Proposición 9, en "Óptica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.
[3] "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky (p. 108).
[4] "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky (p. 17).

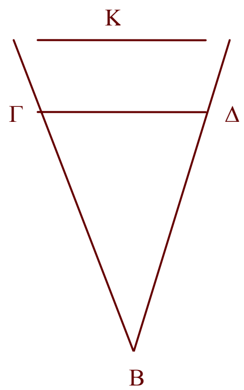


Las figuras del tratado de Jean Pèlerin son todas muy sencillas, con una gran pureza de trazo que su autor reivindicaba. En cuanto a esta portada, se ha observado que, además de mostrar el escorzo de una forma sencilla, no contradice la definición vitruviana - que habla de un círculo -, proponiendo así una continuidad con el mundo antiguo...

Portada de la primera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1505)

En mi opinión, lo más destacable, en la proposición 9, no es su enunciado, sino su demostración. Quiero ahora detallar mi interpretación de ella, pero no puedo seguir exactamente los pasos de Euclides (no me es posible salvar sus oscuridades, pensando literalmente cómo se hacía dos mil años ha, con el agravante de que sólo manejo una versión traducida del texto). Para reconstituir el razonamiento euclidiano, me veo obligado a completarlo, en paralelo, con un razonamiento propio a mi época. Así, sin embargo, me aseguro de pensar geométricamente, por la vía más clara que halle a mi alcance, como Euclides; luego, al confiar plenamente en la perfecta coherencia de un pensamiento expresado geométricamente, respeto la regla del juego, y realizo, una vez más, la geometría: en el ajedrez, igualmente, no hay desarrollo posible mientras el error ajeno se considere una opción válida.

La proposición 9, en su demostración, se apoya en la proposición 3:



Proposición 3: Cada uno de los objetos vistos posee cierta longitud de separación que, una vez situado allí, ya no se ve.

Sea B el ojo y ΓΔ el objeto visto.

Afirmo que ΓΔ, situado a cierta distancia, ya no se verá.

Quede situado ΓΔ a la distancia intermedia entre los rayos visuales a la que está situado K. Así, no incidirá ninguno de los rayos visuales que parten de B.

Y aquello sobre lo cual no inciden los rayos visuales no se ve.

Luego cada uno de los objetos vistos posee cierta longitud de separación que, una vez situado allí, ya no se ve.

Euclides[1]

La proposición 3, en su demostración, se apoya en la tercera de las definiciones inaugurales, la cual afirma que “no se ven aquellos objetos en los que los rayos visuales no inciden”.

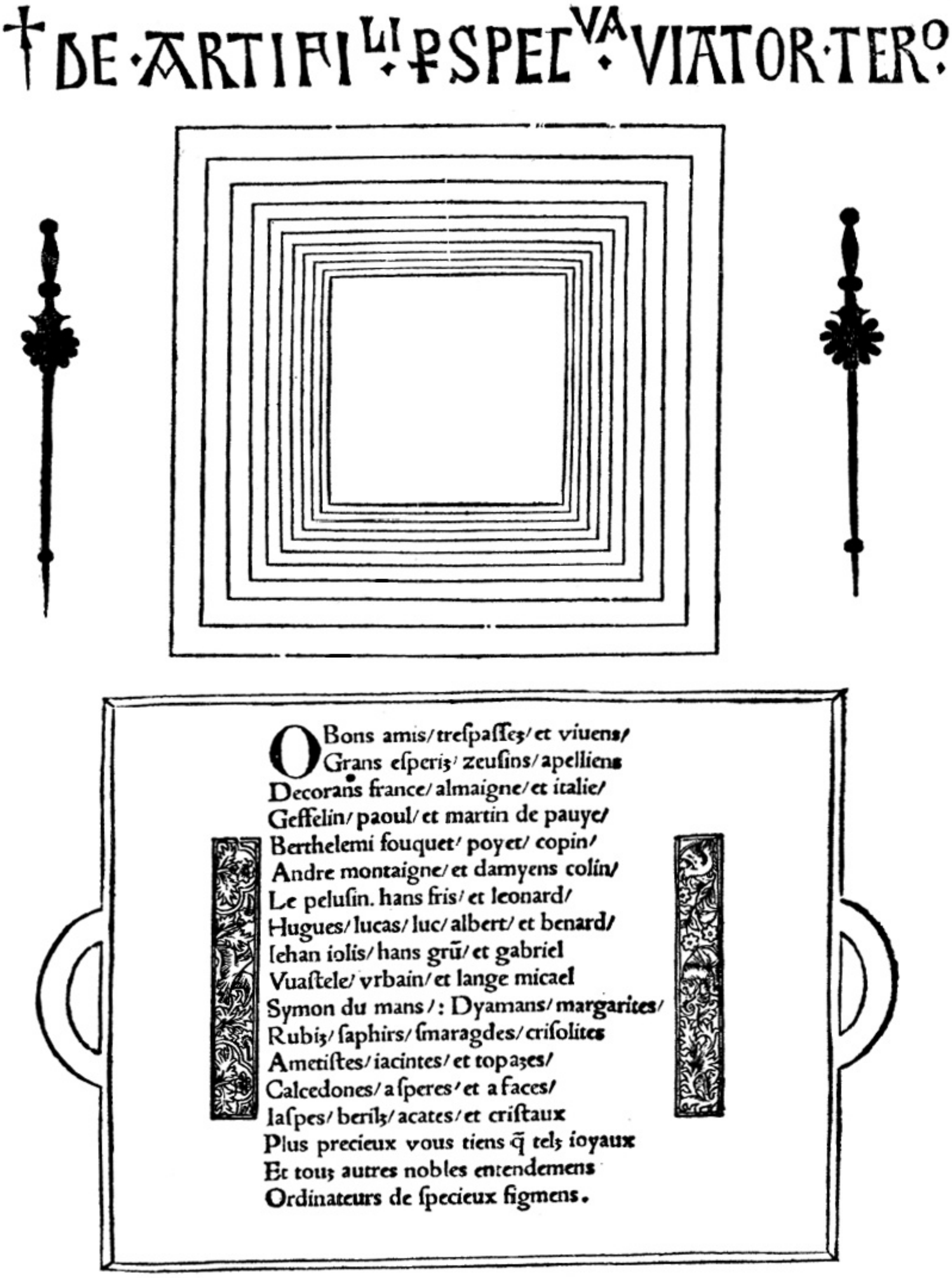
Ahora bien, en una primera lectura, distraída, de la “Óptica”, podemos entender que esta afirmación se refiere a lo que llamamos *la eliminación de las partes escondidas*, es decir: un objeto de la escena puede tapar otro, el primero parando los rayos visuales que, luego, no atinan el segundo. Sin embargo, comprobamos que Euclides nunca considera una escena visual compleja: sólo trabaja con objetos geométricos aislados. Una vez más, averiguamos que él no piensa como un pintor: la noción de “composición de la escena” le es tan ajena como la de “cuadro de proyección”.

El uso de la tercera definición en apoyo a la demostración de la proposición 3, y el uso de esta en apoyo a la demostración de la proposición 9, nos aclara que Euclides, en todo ello, está hablando de un asunto totalmente distinto: el que los rayos visuales no cubren la totalidad del espacio contemplado por la mirada.

Los rayos de Euclides son semirrectas, y las rectas, según Euclides, son extensiones sin anchura. Desde el siglo XIX, es habitual razonar positivamente con el infinito: concebimos que una infinidad de rayos puede cubrir enteramente el espacio continuo. Pero ni Euclides ni Aristóteles piensan así, ni la algorítmica, porque el ordenador puede trazar tantos rayos como queremos, pero no una infinidad de ellos: el proceso es inevitablemente *temporal*, y su resultado indefinidamente *discreto*.

En un algoritmo de trazado de rayos, para simular una emisión puntual y uniforme, podemos proceder de manera *determinista*, generando una serie de N semirrectas, con una separación angular constante; por ejemplo: 1 296 000 rayos formando una rueda plana en expansión, con una separación angular constante de un segundo de arco entre dos rayos contiguos. Podemos también proceder de manera *probabilista*, generando la dirección de cada rayo

[1] Proposición 3, en “Óptica”, Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.



† DE·ARTIFILI·ꝑSPECVA·VIATOR·TER°

O Bons amis/treſpaſſez/et viuens/
Grans eſperiz/zeuſins/apelliens
Decorans france/almaigne/et italie/
Geſſelin/paoul/et martin de pauye/
Berthelemi fouquet/poyet/copin/
Andre montaigne/et damyens colin/
Le peluſin. hans fris/et leonard/
Hugues/lucas/luc/albert/et benard/
Iehan iolis/hans grũ/et gabriel
Vuaſtele/vrbain/et lange micael
Symon du mans/: Dyamans/margarites/
Rubiz/ſaphirs/ſmaragdes/criſolites
Ametiſtes/iacintes/et topazes/
Calcedones/aſperes/et afaces/
Iaſpes/berilz/acates/et criſtaux
Plus precieux vous tiens q̃ telz ioyaux
Et touz autres nobles entendemens
Ordinateurs de ſpecieux figmens.

"Buenos amigos, muertos y vivos, Grandes espíritus, zeusianos, apelianos, Decorando Francia, Alemania e Italia, Gesselin, Paoul, [...], Leonardo, Miguel Ángel, [...], Más preciados os tengo que joyas, Y cuantos otros nobles entendimientos Ordenadores de especiosos pigmentos."

Portada de la tercera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1521) mediante un proceso aleatorio: si el número de rayos es suficientemente elevado, el promedio de separación angular se estabiliza en torno al valor exacto que ostentaría en el caso determinista equivalente. Las ventajas de este segundo método son muchas, empezando por el que no es posible generar una distribución uniforme de rayos en una esfera (caso tridimensional); luego, el método probabilista permite evitar las situaciones triviales e implementar un cálculo de error; finalmente, resulta ya más fácil para nosotros razonar de esta forma.

¿Pero, cómo razonaba Euclides al respecto? Él no necesitaba formularse tales cuestiones, porque no disponía de una herramienta que le obligara a determinar cuántos fuesen los rayos visuales y cómo se distribuyeran. Para él, el problema se presentaba seguramente de una forma más global, como otra ocurrencia de la sempiterna dificultad griega en cuanto a la formación de lo continuo (en este caso, la imagen) a partir de lo discreto (los rayos).

En siete definiciones, admirables de precisión, Euclides propone un modelo de la mirada ("Supóngase que..., y que..., y que..., y que...): no una descripción, sino una *modelización*, que deberá ser sometida a la experiencia visual, para comprobar cómo resiste a la comparación. Pero falta un elemento esencial, el que aporta la primera proposición, verdadera piedra de toque del modelo. ¿Cómo un conjunto discreto de rayos visuales puede llegar a formar en el ojo una imagen aparentemente continua? Pues, simplemente, la imagen formada también es discreta, en contra de las apariencias. Si la percibimos continua, es porque el proceso de adquisición es tan rápido que no nos damos cuenta (gracias a lo que nosotros llamaríamos: la persistencia retiniana).

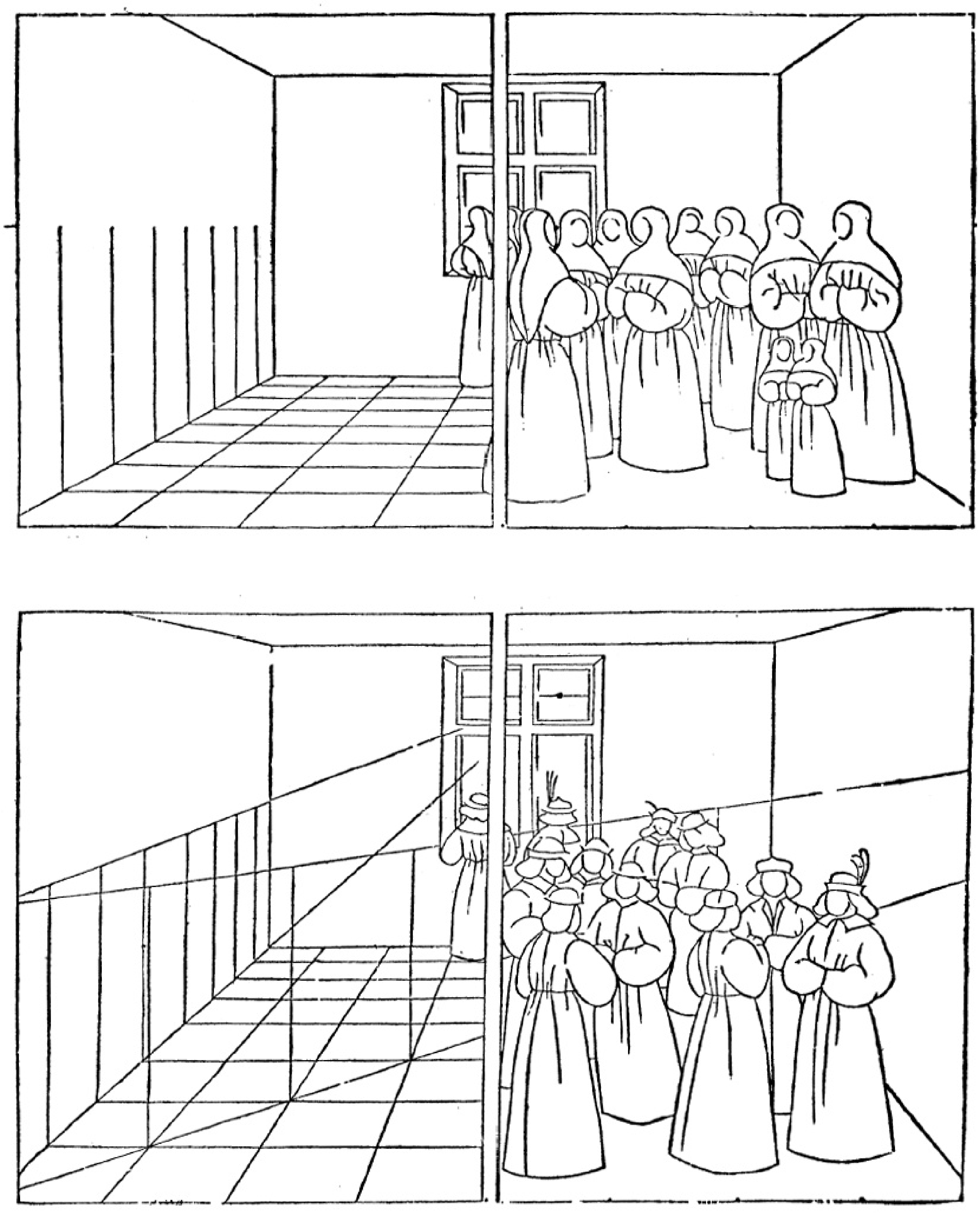
Ahora bien, en una pantalla actual, la imagen también es discreta, y doblemente: en el tiempo (frecuencia de la corriente alterna, a 50 Hz, visualmente abolida por la persistencia retiniana) y en el espacio (discretización en píxeles, visualmente abolida por la limitación del ojo en cuanto a su poder de separación).

Precisamente, la segunda proposición de Euclides, preparada por la séptima definición inaugural, habla del poder de separación del ojo. Visualmente, es un hecho evidente, el que las almenas de una torre, por ejemplo, a partir de cierta distancia, no se distinguen; más nos acercamos, mejor se interpretan, con mayor precisión. En los algoritmos de dibujo, podemos aumentar la precisión de los detalles al incrementar el número de rayos, pero eso sólo tiene sentido porque trabajamos sobre una imagen intermedia; en la realidad, el ojo sólo tiene la posibilidad de acercarse, físicamente, o mediante un artilugio óptico. Euclides, que no parece haber conocido las lentes, se queda con el argumento esencial: "los objetos que se ven bajo mayor número de ángulos aparecen con más precisión".

Llega entonces la tercera proposición, según la cual hay una cierta distancia a partir de la cual un objeto ya no se ve. En el dibujo que acompaña su demostración, entendemos ahora que los dos rayos visuales ΒΓ y ΒΔ son considerados contiguos, de modo que el segmento ΓΔ está a la distancia límite donde aún queda interceptado, en sus extremos, por ambos rayos. Si lo desplazamos hacia K, se encuentra totalmente en el intersticio entre ambos rayos: ya ningún rayo lo intercepta, luego no se ve.

En el "De anima", Aristóteles afirmaba que "Demócrito se equivoca cuando expresa la siguiente opinión: si el vacío se produjera en el espacio intermedio, veríamos con precisión hasta una hormiga situada en el cielo. De hecho, eso es imposible. Pues es mediante una pasión sufrida por el órgano que se produce la sensación. Ahora bien, esta pasión no puede imprimirse por el solo color objeto de la visión; queda, pues, que esté impresa por el medio: la existencia de un medio es luego necesaria. Pero el vacío llegando a producirse, no veríamos absolutamente nada"[1]. En el modelo euclidiano, la atmósfera no tiene más cabida que el color, y el estudio de la mirada se separa del de "lo que se ve". En la proposición 3, Euclides refuta la opinión de Demócrito sin necesitar el argumento aristotélico, que nosotros sabemos ser falso, pues la luz, a diferencia del sonido, puede propagarse en el vacío.

[1] "De l'âme", Aristote (p. 59), versión francesa de E. Barbotin, Collection Tel, Gallimard, 1989.

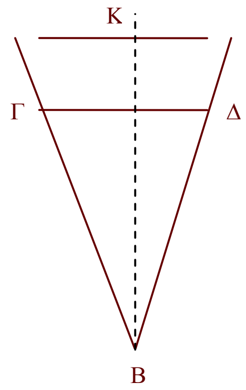


De cómo evaluar las alturas escorzadas de figuras humanas...

Ilustración de la tercera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1521).

Como en la proposición anterior, Euclides afirma aquí la limitación del poder de separación angular del ojo, pero llegando al caso límite en que ya no se ve el objeto. Después de la proposición 1, tenemos aquí otro caso en que Euclides se muestra capaz de pasar al límite, gracias a su forma de modelización. Es importante resaltar este hecho, pues los primeros razonamientos productivos realmente propios de una teoría de los límites suelen atribuirse al siciliano Arquímedes. Un siglo antes, sin embargo, Euclides se mostraba ya capaz de intuiciones muy finas al respecto, y las aplicaba no a la mecánica, sino a la percepción del espacio...

Pero, ¿cómo lo hacía?



Para nosotros, el caso de la proposición 3 ilustra muy bien el peligro del método determinista en el trazado de rayo. En efecto, si la configuración planteada es tal que uno de los rayos se halla perpendicular al segmento ΓΔ, entonces, por más que se aleje luego el segmento paralelamente a sí mismo, este rayo siempre lo interceptará, y luego, según la séptima definición euclidiana, el segmento siempre se verá. Desde luego, Euclides no considera semejantes casos, porque no piensa así.

Para seguir, resulta más conveniente invertir el planteo, y considerar B como un foco de luz, BΓ y BΔ como rayos luminosos, y ΓΔ como un *receptor*, una diana donde se cuentan los rayos que la atinan: eso no cambia nada al problema, y me facilita su descripción.

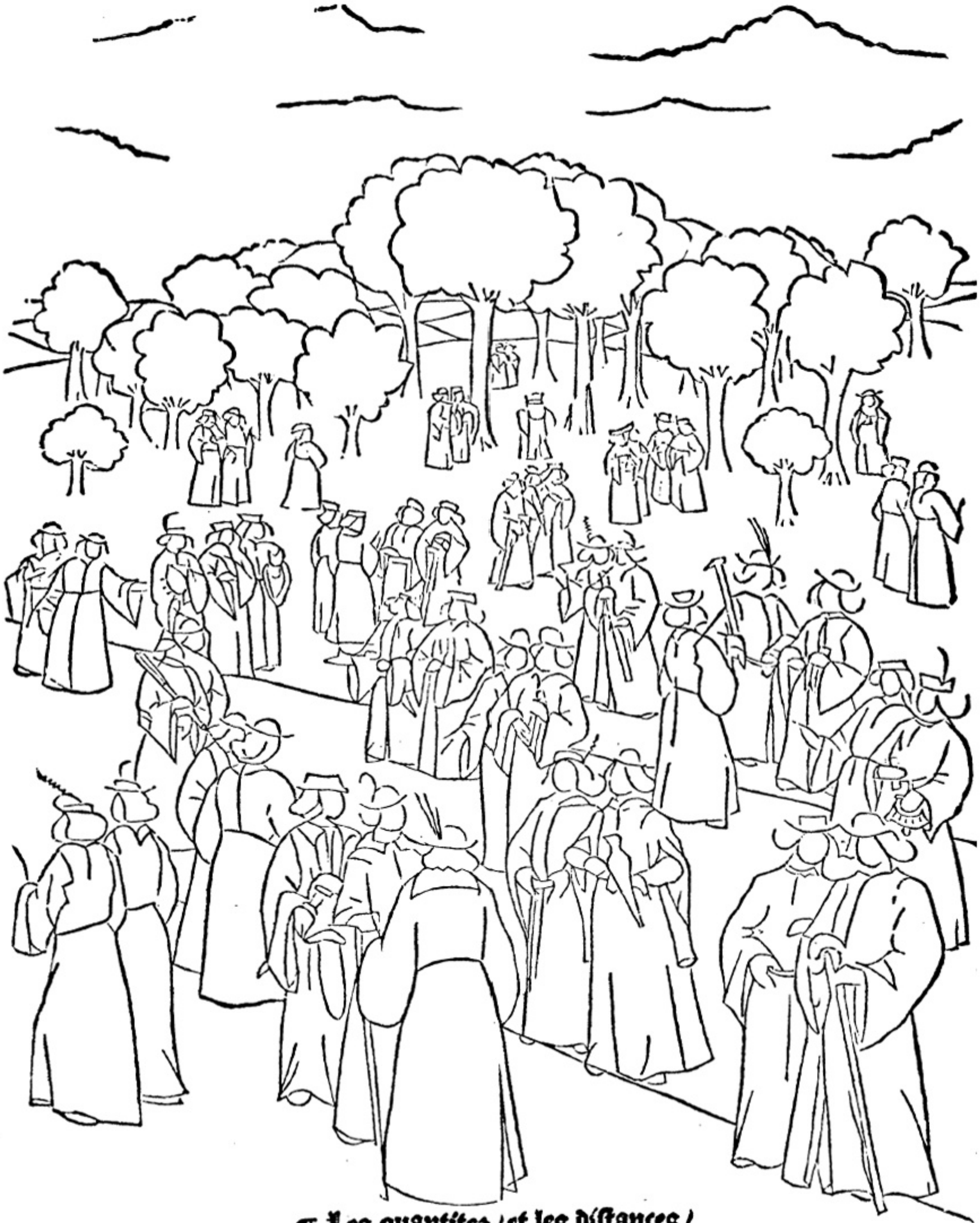
Razonemos entonces de manera probabilista, a partir de una cantidad determinada N de rayos emitidos desde la fuente, cada uno con una dirección aleatoria; podemos entonces contar el número n de rayos que interceptan el receptor. La razón n/N nos da luego, si razonamos a tres dimensiones, una aproximación de la *superficie aparente* del objeto, es decir: del ángulo sólido cuyo vértice es la fuente y que contiene el objeto. Más el objeto se aleja, menos es probable que uno de los N rayos impacte en él, hasta que se vuelva altamente improbable que tal ocurrencia se produzca: entonces, el objeto *ya no se ilumina*. Podemos aumentar el número N de rayos trazados, y entonces volveremos a descubrir el objeto, con una razón n/N cada vez más pequeña, a medida que vaya huyendo, menguando, como la hormiga de Demócrito perdida en el cielo.

Tal razonamiento es, en mi opinión, el que más se acerca a lo que leemos en Euclides, aunque, desde luego, él no pensara en estos términos: ni fijaba las direcciones de los rayos, ni las jugaba con dados.

En los programas de renderización, los rayos visuales son trazados de manera determinista, fijada por la imagen: un rayo para cada píxel; luego, el número de rayos, su densidad, determina la precisión de la imagen, su resolución. El poder de separación de la pantalla (limitado por las dimensiones de los píxeles físicos), y luego de la impresora, confunde el razonamiento, nos hace suponer que la resolución de la mirada es de misma índole. No tiene porqué ser así: la mirada tiene otros recursos, su propio movimiento, distintas formas de imperfecciones y de compensaciones, sin olvidar la importancia de la experiencia visual: discernimos mejor lo que mejor entendemos; lo abstruso nos cansa y nos pierde, mientras que lo que nos parece coherente, lo interpretamos, sin que sea posible distinguir entonces lo que realmente se ve de lo que la mente reconstituye.

¿Para qué buscar un valor preciso, claramente inexistente, para el poder de separación angular del ojo? Tal prurito de raigambre cientificista, que nos haría sentirnos más seguros si halláramos en alguna tabla un valor experimental determinado - un minuto o un segundo de arco, por ejemplo, oriundo de no se qué experimento de laboratorio -, a pesar de que dicho valor, forzosamente estadístico, no encontrase luego la menor aplicación concreta explotable, Euclides no lo sufría.

Él modelizaba para razonar, más que para calcular. Si bien su modelo le servía para resolver ciertos problemas de medición, le importaba seguramente más validarlo en su desarrollo, comprobar sus consecuencias en cuanto a las grandes cuestiones de su tiempo. Así, la



¶ Les quantitez, et les distances,
Ont concordables differences.

"Las cantidades y las distancias tienen concordables diferencias"

Ilustración de la tercera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1521).

proposición 3 permitiría afirmar que en el caso de un espacio vacío e infinito, poblado por un sinfín de astros, el ojo, sin embargo, no vería las estrellas más lejanas, ya que, por grande que sea un objeto, existe siempre una distancia a partir de la cual no se ve. Sin embargo, al contrario de los pitagóricos, de Platón o de Aristóteles, Euclides nunca entra en la polémica: se limita a desarrollar su modelo geométricamente, sin confundirlo nunca con una supuesta realidad tangible. En este sentido, ya ha integrado el razonamiento científico que, mucho más tarde, hará suyo un Emmanuel Kant: se aparta de los paralogismos reacios a la experiencia (el mundo ¿creado o increado?, ¿finito o infinito?, ...), y se interroga solamente sobre lo que *parece* (en griego: *fainomai*, de donde, en castellano, *fenómeno*).

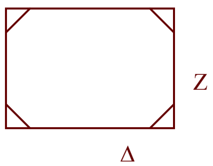
En las siguientes proposiciones (4 a 7), Euclides se interroga sobre la mengua de los objetos fenomenales con la distancia. Entre otros, establece que las paralelas parecen convergentes en la mirada (proposición 6). Por lo tanto, su modelo transforma el espacio geométrico observado en un espacio visual distinto, con otras propiedades, relativo y continuamente deformado, según los desplazamientos del ojo. Para describirlo, haría falta poder aplicarle una teoría de las proporciones. En este punto, es donde se produce el tremendo fracaso de la proposición 8: eso no es posible, porque la mengua de los objetos no es proporcional a su distancia al ojo.

Pero Euclides no se desespera, y, para seguir defendiendo y validando su modelo, establece, inmediatamente después, la admirable proposición 9, cuya sutil demostración estamos ahora preparados para entender.

"Sea el rectángulo ΒΓ visto a distancia que se encuentra elevado". Entiendo allí que el ojo se encuentra situado debajo (o arriba) del rectángulo, a igual distancia de los cuatro vértices: eso explica que lo que se muestra para uno de los vértices se pueda luego, al final de la demostración, aplicar, de forma semejante, a los tres otros. El rectángulo se ve, por lo tanto, frontalmente, a gran distancia.

Ahora bien, podríamos entender la demostración que sigue de esta manera: el punto Γ, que se encuentra algo más alejado del ojo que los puntos Δ y Ζ, dejará de verse, según la proposición 3, un poco antes que ellos, mientras vayamos alejando el objeto. Sin embargo, más se aleja el objeto, y más insignificante se hace la diferencia de tamaño entre los rayos concernidos: tal razonamiento sólo tendría sentido si pretendiéramos que existe una distancia muy precisa a partir de la cual el ojo no percibe, cosa que Euclides, que sólo razona con los ángulos visuales, y sin introducir nunca ningún valor absoluto de medida, se guardó muy bien de afirmar...

Para explicar mejor el sentido de la construcción euclidiana, me veo obligado a utilizar de nuevo mi propio modelo, de una fuente que ilumina con rayos de dirección aleatoria un receptor, ahora con forma rectangular y en posición frontal. Eso me permite razonar sobre las superficies (como Euclides lo hizo en la proposición anterior), y no sobre el contorno, como Euclides parece hacerlo aquí (pero quizás sea sólo una apariencia...).



Si la distancia a la fuente es muy grande y el número de rayos reducido, lo más probable es que el receptor no reciba impacto alguno; luego, no se ve.

Si lo acercamos a la fuente, o si aumentamos el número total de rayos, algunos impactarán en el interior del receptor, y empezaremos a tener una aproximación de su superficie aparente, con la relación n/N. Ahora bien, es muy improbable que estos rayos impacten precisamente en uno de sus lados, y aún más improbable que impacten precisamente en uno de sus vértices. Eso significa que, aunque incrementemos continuamente el número de rayos, hará falta mucho tiempo de cálculo antes de que la superficie evaluada se distinga de la de un receptor óvalo con dimensiones equivalentes, y luego de un receptor de tipo octogonal (o mejor dicho: un rectángulo con los vértices redondeados).

La portada de este manuscrito ilustrado de la “Óptica” euclidiana (arriba) es doblemente notable. En primer lugar, una bella vista escorzada en *perspectiva artificial* sirve para introducir a la obra inaugural de la *perspectiva natural*. En segundo lugar, este libro, que perteneció a la biblioteca de Urbino, bien pudo haber sido el que manejó el mismísimo Piero della Francesca... El cuadro de abajo, atribuido por Vasari a Paolo Ucello muestra a cinco de los inventores de la perspectiva italiana.

Portada de la “Óptica”, Euclides, manuscrito del siglo XV; Brunelleschi, Ucello, Donatello, Giotto y Tucci Manetti.

Ahora, si algo sabe Euclides, es que las superficies, las líneas y los puntos pertenecen a diferentes órdenes de dimensión. Aplicando su proposición 3, entiende luego que los vértice son los primeros que se pierden en los intersticios entre rayos divergentes, luego los lados rectos, luego la forma entera. Si nos vamos alejando del rectángulo, este se verá, en un primer momento, recortado en sus vértices (como en la figura), luego totalmente redondeado, antes de desaparecer completamente a la vista. *Quod Erat Demonstrandum*...

Visualmente, el modelo se verifica, matizado por el hecho de que el ojo interpreta las rectas y los ángulos rectos, sus esquemas primarios, aunque no estén del todo realizados: vemos las aristas de los edificios como rectas, a pesar de que tales líneas no tengan realidad material, y sólo con la distancia estas formas se redondean, antes de desvanecerse. La tendencia en curvarse con la distancia, sin embargo, es propia solamente de los ángulos rectos u obtusos: una torre con base triangular, por ejemplo, no se verá nunca redonda, porque sus ángulos agudos siempre aparecerán muy marcados, hasta que las mismas paredes que los definen se desvanezcan enteramente. De ahí que Euclides no elige al azar una forma rectangular: es la más simple de las que se prestan a la propiedad descrita.

* * *

- *La mirada renacentista* -

En el Renacimiento, la "Óptica" de Euclides fue muy leída, apreciada y comentada, acompañando desde sus inicios el nuevo desarrollo perspectivo, como lo recuerda Hubert Damisch, en "El origen de la perspectiva":

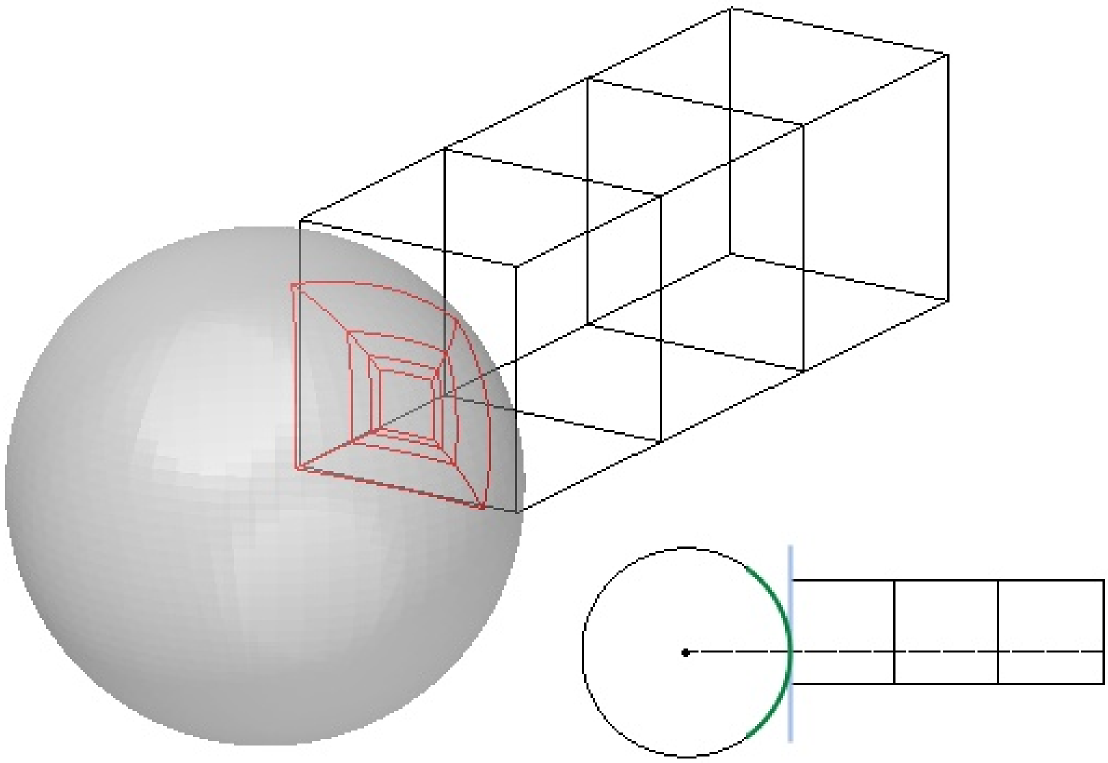
"Todo lleva a atribuir la *Vita di Filippo Brunelleschi* al matemático Antonio di Tucci Manetti, amigo de Ucello con el cual, si creemos a Vasari, gustaba de entretenerse con las cosas de Euclides, y que por esta razón figuraría en una pequeña tabla conservada en el Museo del Louvre – que Vasari atribuye al propio Ucello – al lado de Giotto, Donatello, Brunelleschi y Ucello, en el lugar – puede pensarse – que Alberti hubiera querido se le asignara, como "teórico" entre los artífices del Renacimiento florentino. Esta "Vida", la primera obra maestra del género, a pesar de sus precedentes, que al parecer fue escrita poco después de 1475, nos proporciona una descripción relativamente detallada de las experiencias llevadas a cabo por Brunelleschi en materia de perspectiva."

Hubert Damisch[1]

Sin embargo, desde los primeros experimentos de Brunelleschi, los nuevos perspectivistas tuvieron muy claro que estaban haciendo algo bastante distinto de lo que proponía el geómetra alejandrino, y el mismo Antonio di Tucci Manetti lo explica - con una prudencia que no esconde el entusiasmo - en su "Vida de Filippo Brunelleschi":

"No se sabe si los pintores antiguos, los de hace varios cientos de años, en la época de los grandes escultores, de los que se cree que fueron buenos maestros, la conocían [la perspectiva] y la practicaban con razón (*se lo sapevano e lo feciono con ragione*). Pero si la practicaban según la regla (*se pure lo feciono con regola*) que no sin motivo he llamado ciencia un poco más arriba (*che sanza cagione non dico io scienza poco di sopra*), como el propio [Brunelleschi] lo hizo después, el que habría podido enseñársela había muerto hace cientos de años. Y esta regla no está escrita en ninguna parte: y si lo está, no se la comprende (*e iscritto non si truova, e se si truova, non è inteso*). Pero su habilidad y su

[1] "El origen de la perspectiva", Hubert Damisch (p. 70), 1987, versión castellana de Federico Zaragoza Alberich, Alianza Editorial, Madrid, 1997.



Proyección del pórtico, sobre un cuadro plano (en azul) y un cuadro esférico (en verde).

Planteamiento gráfico del caso (el autor y Luc Masset).

sutileza, o la encontró, o la inventó (*ma la sua industria e sottigliezza, o ella la ritrovo, o ella ne fù l'inventrice*).

Antonio di Tucci Manetti[1]

De allí la distinción que se estableció directamente entre *perspectiva naturalis* o *communis* (la óptica euclidiana y medieval) y *perspectiva artificialis*, basada en la *costruzione legittima* brunelleschiana (el cuadro de los pintores).

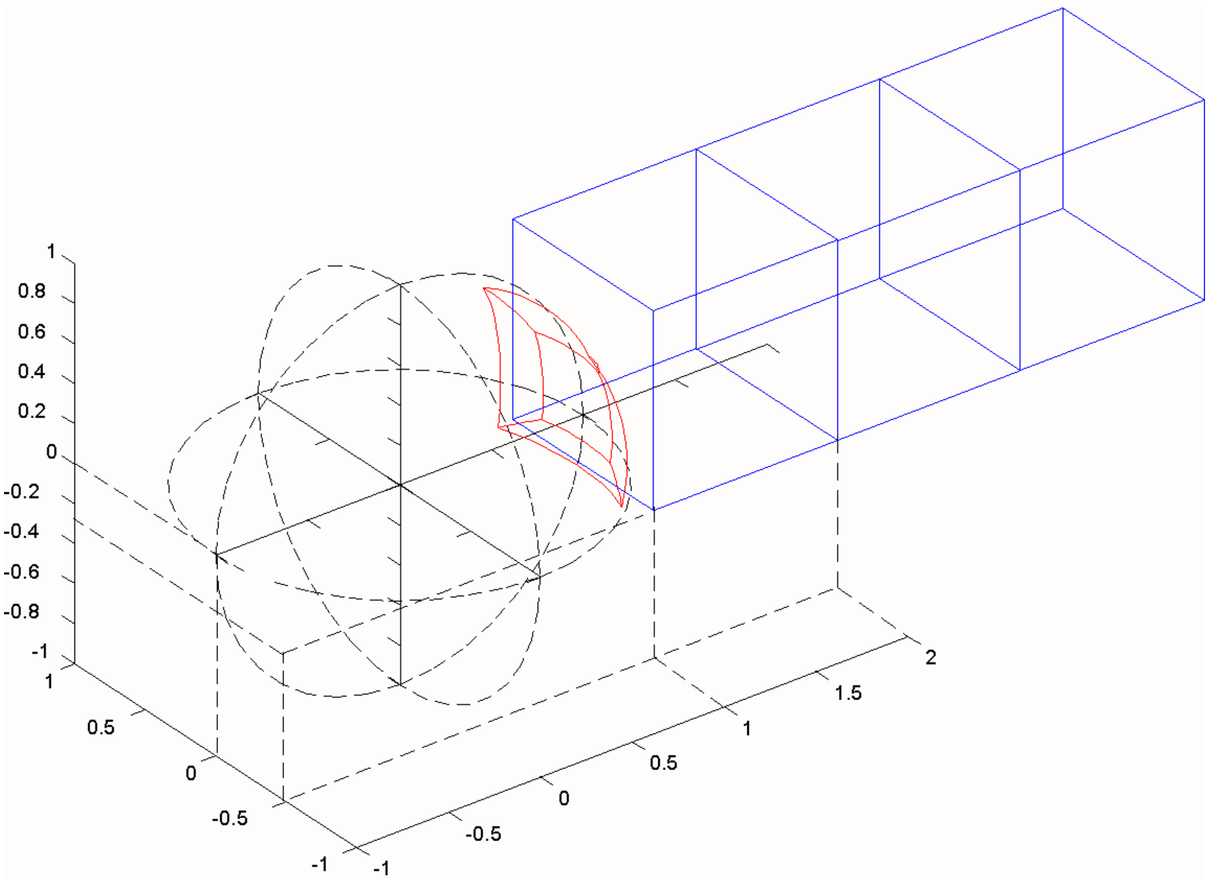
Tras los descubridores florentinos, destaca la obra del francés Jean Pélerin (c. 1435-1524), apodado *Viator*, cuyo *De Artificiali Perspectiva* (1505, 1509 y 1521) fue el primer libro impreso dedicado a la perspectiva[2].

Allí, el canónigo afirma que, con la nueva construcción, "les quantités et les distances ont concordables différences"[3], lo cual contradice directamente la octava proposición euclidiana.

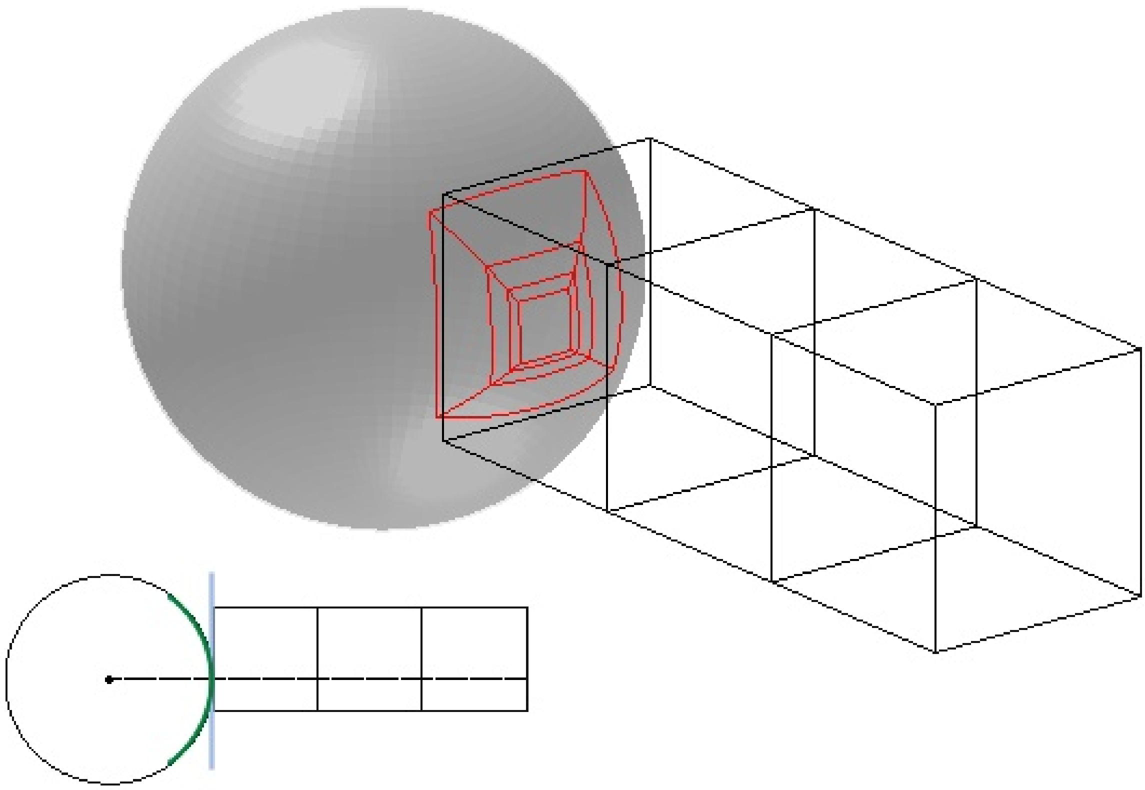
¿Qué ha ocurrido?

Euclides sólo consideraba los ángulos visuales, y, cómo hemos dichos, estos se pueden medir como distancias en una proyección sobre la esfera. En cambio, los pintores del Renacimiento proyectan, y miden, sobre el cuadro plano de sus lienzos.

Imaginemos ahora el siguiente dispositivo, representado en la figura: un corredor formado por cuatro pórticos cuadrados regularmente espaciados, que forman en conjunto tres células cúbicas adyacentes: cada pórtico tiene un metro de altura, un metro de ancho, y está a un metro del pórtico siguiente. Miremos entonces el corredor frontalmente, con el ojo situado a 25 centímetros de altura, y a un metro de distancia ante el primer pórtico.



[1] Citado en "El origen de la perspectiva", Hubert Damisch (p. 138).
[2] Puede adquirirse una copia de la edición de 1521 en la BNF (Bibliothèque nationale de France, RES-V-169).
[3] Citado en: "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky (p. 19).



Proyección del pórtico, sobre un cuadro plano (en azul) y un cuadro esférico (en verde).

Planteamiento gráfico del caso (el autor y Luc Masset).

Para medir como Euclides, proyectamos sobre una esfera centrada en el ojo y de radio unitario (el radio puede ser elegido cualquiera, pues sólo introduce un factor de escala, y nos interesamos aquí en las proporciones). En la figura anterior, hemos representado, en axonometría, el cuadro esférico (figurado, de forma armilar, con líneas punteadas) y la proyección de los dos primeros pórticos (en rojo).

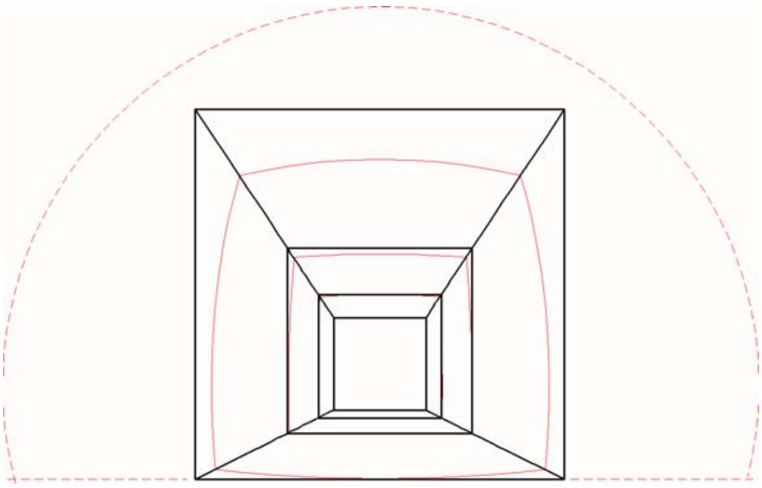
Luego, para proceder como los pintores, grapamos un papel de calco de un metro cuadrado sobre el primer pórtico, el cual se proyecta luego centralmente sobre sí mismo, en verdadera magnitud. Sobre el cuadro plano del calco, dibujamos a continuación los tres otros pórticos, tal y como los vemos transparentarse, sin mover el ojo de su sitio.

Comprobamos entonces que, en el dibujo, el primer pórtico mide un metro de lado, el segundo 50 centímetros, el tercero 33.3 centímetros y el cuarto 25 centímetros. O sea que, si las distancias al ojo de los pórticos reales, medidas sobre el eje de profundidad, estaban en progresión aritmética (1 m, 2 m, 3 m y 4 m), sus tamaños en el dibujo se escorzan en progresión armónica (1/1 m, 1/2 m, 1/3 m, 1/4 m).

Esta notable propiedad, es la que los primeros perspectivistas renacentistas descubrieron enseguida, y que Jean Pélerin expresa en una fórmula lapidaria, cuando dice que "cantidades y distancias tienen concordables diferencias".

Ahora, para poder comparar esta forma de proyección con la que corresponde a la "Óptica euclidiana", volvemos a proyectar la perspectiva esférica, en rojo, sobre el plano del calco, mediante una proyección ortogonal.

La figura siguiente nos muestra una imagen de este calco, reducida a la escala conveniente.



Comprobamos que los pórticos rojos sólo se solapan con los negros a partir de cierta distancia (desde el tercer pórtico en la figura). Eso significa que, a partir de entonces, las proporciones entre ángulos visuales (Euclides) concuerdan con las proporciones medidas sobre el cuadro plano (Renacimiento).

En cambio, el segundo pórtico, y sobre todo el primero, se ven muy deformados, no sólo por su curvatura, sino en sus proporciones relativas. Eso manifiesta la octava proposición de Euclides: "las magnitudes iguales y paralelas situadas a distancias distintas del ojo no se ven proporcionalmente a las distancias". Aquí, los segmentos iguales y paralelos estudiados por Euclides corresponderían a las rectas uniendo los puntos medios de la base y del dintel de cada pórtico. Estas rectas son, a corta distancia, demasiado pequeñas para que se establezca una proporción entre distancias y tamaños reales, como en el caso de la proyección sobre el cuadro plano.

De paso, observamos que la proyección sobre la esfera nos permite considerar un ángulo de obertura de 180 grados (el círculo rojo punteado de la figura), mientras que la proyección sobre el plano se deforma tremendamente a cortas distancias, según las características de la progresión armónica, que es más suave que su hermana geométrica en dirección del polo principal (aquí, el punto de fuga, hacia el cual podríamos añadir un sinfín de pórticos) y mucho más brusca hacia el segundo polo (el pórtico anterior, ubicado en el plano desvanescente, sería de tamaño infinito). La perspectiva central sobre el plano precisa, por lo tanto, una limitación drástica en cuanto al ángulo de obertura, el cual es de 45 grados en la figura, pudiendo llegar a 60 grados según el consejo de Piero de la Francesca, o incluso a 90 grados, pero no mucho más...

En estos dos bellos manuscritos, de finales del siglo XV y principios del XVI, la música entra en una relación visual con la perspectiva. Proporciones interválicas *vs* proporciones de distancias.

"Missa Virgo parens Christi", Jacques Barbireau (copiada en este manuscrito en torno a 1520, con otras misas); "Cancionero de Jean de Montchenu", hacia 1475.

Con su octava proposición, Euclides encontró un serio escollo, donde el navío de la geometría sensible quedó encallado durante diez-y-siete siglos, porque no se podía establecer en el espacio visual una teoría general de la proporción en concordancia con la que impera en el mundo físico, particularmente en las construcciones de la arquitectura. No se podía, considerando solamente los ángulos de vista. Hasta que llegaron, finalmente, unos pintores formados en los oficios prácticos y manuales (Brunelleschi y Alberti eran arquitectos, Donatello escultor, Piero della Francesca y Paolo Ucello pintores y Leonardo da Vinci, un poco de todo, ingeniero), todos ellos dibujantes, que descubrieron en el cuadro plano una solución inesperada, en la cual sus mentes musicales supieron vislumbrar una promesa grandiosa, donde otros tiempos, otras culturas, no hubiesen visto, probablemente, más que una propiedad geométrica curiosa.

Leonardo, en particular, muy aficionado a la música, como lo muestran sus escritos, consideró con especial entusiasmo el mismo caso que acabamos de dar en ejemplo, porque la serie 1:1, 1:2, 1:3, 1:4,... del escorzo pintado no sólo *concuerda*, en el espacio físico, con la serie aritmética 1, 2, 3, 4,... mil veces plasmada en la arquitectura por solerías o columnatas, sino que manifiesta las *concordancias* propiamente dichas del unísono, de la octava, de la quinta y de la doble octava: el viejo sueño pitagórico de una concordancia universal parecía finalmente al alcance.

Cuando Jacques Androuet du Cerceau, en sus "Lecciones de perspectiva positiva" (1576)[1], ordena sistemáticamente sus vistas de arquitectura según posiciones discretas particulares del punto de vista (el ojo en posición alta, media o baja; el objeto visto de frente, de lado, en ángulo recto o ladeado), siguiendo el ejemplo de Jean Pélerin (que también hablaba de "concordancia"), no hace más ni menos que proponer para la perspectiva una estructura fuera-del-tiempo parecida al modo de ordenar los intervalos en la escala musical, según proporciones discretas.

El sueño de hacer del cuadro un microcosmos, donde se manifiesten las proporciones y el sistema propio a un orden ideal sólo presenciable mediante la pintura, ha recorrido luego, y en gran parte estructurado, la pintura europea, desde Nicolas Poussin hasta Paul Klee y los pintores abstractos.

Sin embargo, en este anhelo, se había sacrificado por completo un carácter fundamental de la óptica euclidiana, y también de la música: el tiempo. Los primeros perspectivistas no disponían de herramientas eficaces para animar sus vistas, y, cuando tales herramientas aparecieron, en los albores del siglo XX, hacía tiempo ya que la perspectiva central había perdido su estatuto artístico, para reducirse, ella misma, a una simple herramienta de visualización: hoy, las maravillosas posibilidades de la cámara cinematográfica ya sólo interesan a los profesionales, y el público recibe sus imágenes como si se tratara del más utilitario y natural de los recursos...

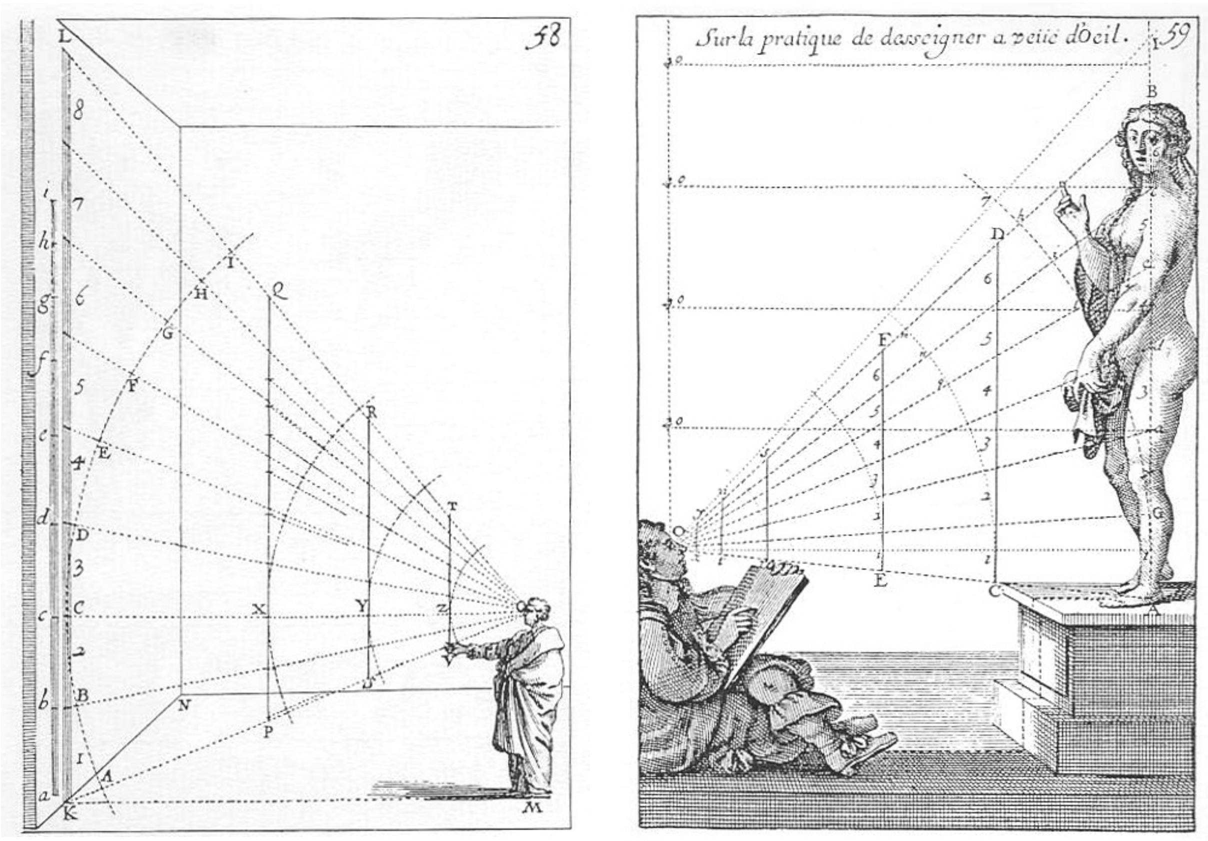
* * *

- Modelizaciones de la mirada -

Al principio del presente texto, hemos detallado largamente la "Óptica" de Euclides, como una *modelización* de la mirada, realizada conscientemente y con un notable rigor científico por el genial alejandrino. Sin embargo, la lectura de la obra euclidiana se ve dificultada por el hecho de que su autor no ha sentido nunca la necesidad de precisar cómo se generan los rayos visuales, de modo que sus demostraciones, donde suele considerar rayos particulares (en general los rayos límites tangentes al objeto considerado) sin justificarse más que con esquemas gráficos elementales, quedan, para nuestro criterio, demasiado elípticas, a veces algo oscuras, y siempre muy intuitivas, aunque notablemente acertadas.

---

1 "Leçons de perspective positive", Jacques Androuet Du Cerceau (Paris, 1576), École Nationale Supérieure Des Beaux-Arts, ejemplar n°24858.



En ambos dibujos, el importante perspectivista Abraham Bosse, amigo de Nicolas Poussin y divulgator de la obra de Gérard Desargues, muestra un perfecto conocimiento de la obra euclidiana, y de la diferencia entre un cuadro esférico y un cuadro plano. Diferencia menor, ya que la misma información se imprime sobre ambos cuadros, de modo que “no es necesario dibujar ni pintar como el ojo ve” (izquierda). Para dibujar “a vista de ojo” (derecha), la estatua se divide verticalmente en seis partes, pero no según sus proporciones, sino como mera ayuda al dibujo.

Dos ilustraciones de Abraham Bosse (1665 y 1659).

Sin embargo, no sería justo, en mi opinión, tachar de tosco o de primitivo un modelo que muestra a su vez tanto rigor metódico, y que anticipa, con más de dos milenios, los razonamientos algorítmicos del siglo XX. Si algún modelo óptico mereciera ser llamado primitivo, sería más bien el que elaboraron Monge y Poncelet, en el siglo XIX, basándose en la vieja exigencia platónica de atemporalidad, que ellos plantearon, como el ateniense, desde un anhelo de trascendencia, de extracción fuera del mundo sensible...

Para aclarar las oscuridades del texto euclidiano, hemos desarrollado, en paralelo a su lectura, otros razonamientos, propios del modelo que llamamos *probabilista*, porque se basa en las integrales de Monte-Carlo. Oponemos éste a un modelo de trazado de rayo más conocido, por ser utilizado en los algoritmos de renderización, y que llamamos *determinista*, porque la presencia de un cuadro de proyección (la pantalla) determina la dirección y el número de los rayos visuales, en función de la resolución deseada para la imagen.

Esta manera de modelizar la mirada mediante la producción de imágenes remonta al Renacimiento, cuyo modelo *pictórico* ha encontrado, mucho más tarde, una aproximación técnica en la fotografía. El modelo determinista, en cambio, es bastante posterior a su aparente realización técnica, la animación cinematográfica, cuyos procedimientos y tecnicismos han impregnado los algoritmos de renderización, de modo que los programas resultantes nos parecen ahora reducirse a un simple subproducto del "séptimo arte", mientras que la fotografía, tan evidente deudora de la pintura, ha podido ser considerada más justamente como una mera derivación de esta.

Sin embargo, la gran diferencia entre los modelos pictórico y determinista es que el primero produce imágenes fijas y el segundo imágenes animadas. En cambio, lo que comparten esencialmente, entre sí y con el modelo *platónico* de la geometría proyectiva, es, simplemente, que producen imágenes. Y eso no es poco. Cuando hay una imagen, estamos incitados a trabajar directamente sobre ella, buscando y aplicando lo que podríamos llamar las *propiedades geométricas complejas* de la escena, y su *transposición* en la imagen. Todos los dibujantes de perspectivas conocen la regla de las diagonales, que expresa un invariante topológico de la perspectiva central sobre el plano, y la regla de la cuarta proporcional, que expresa su invariante anarmónico. Por otra parte, para dibujar en perspectiva una figura compleja - por ejemplo: un ser humano -, se aconseja tradicionalmente encerrar esta figura en cajas paralelepipédicas, y luego proyectar estas cajas, las cuales indicarán las deformaciones sufridas por las distintas partes de la figura en perspectiva. Todas estas recetas de dibujo consisten, luego, en transponer en el cuadro ciertas propiedades geométricas de los objetos por proyectar (topología, proporciones, envolvente), como ayudantes al dibujo de la imagen.

Entre tales propiedades geométricas, incluiremos sin dudar las que estudió en precursor Leonardo de Vinci: iluminación, sombras y color (perspectiva aérea). Incluir el color entre las propiedades geométricas de la escena puede sorprender, pero, tras el gran impulso teórico propugnado por Isaac Newton, eso ha sido una característica fundamental de la pintura europea, particularmente sensible en artistas como Claude Monet, Paul Cézanne, Frantisek Kupka, los esposos Delaunay,...

Los programas de renderización actuales usan y abusan de las propiedades geométricas complejas, tanto para acelerar el cálculo (conviene reducir el trazado de rayos al mínimo), como para mejorar las imágenes resultantes, buscando lo que suele interpretarse como un grado superior de "realismo": cajas envolventes, mallas, mapas de sombras, radiosidad,...

La mayoría de las reglas simplificadas basadas en tales propiedades geométricas habían sido desarrolladas ya en el siglo XIX, por la geometría proyectiva, en busca de lo que los franceses llamaban el *rendu*[1] (la "renderización manual"), mediante reglas terriblemente complejas y particulares, pero que podían aplicarse con gran efectividad a la iluminación y al sombreado de la esfera, del cono, del cilindro o del paralelepípedo rectángulo, o, con mayor dificultad aún, de

[1] Ver, al respecto: "Ombres et Lumières, *un manuel de tracé et de rendu qui considère1'architecture comme une machine optique*", Jean-Paul Jungmann, les éditions de la Villette, 1995.

¿Se pueden dibujar las nubes?

Las nubes de Giulio Romano, como las del Greco, son masas marmóreas; las de Antoni Tàpies son figuradas por líneas que no existen y, sin embargo, resultan visualmente tan acertadas como las renacentistas y barrocas, incluyendo las de los cielos fotográficos que pintaron los holandeses...

Composición de las nubes de Giulio Romano con las de Antoni Tàpies (el autor y Gori Moya).

una escena compuesta, donde se combinaban sutilmente sombras propias y arrojadas, zonas de penumbra, horizontes borrosos y azulados, colores complementarios, contraste cálido-frío,...

Ahora bien, si esta posibilidad de trabajar con tales propiedades geométricas constituye la principal ventaja de los métodos con cuadro, entendemos que el cine, como la fotografía, se han de considerar como estados secundarios de los modelos pictórico y determinista, que encuentran su mayor posibilidad de desarrollo en la pintura y en la renderización.

El modelo pictórico constituye una estructura fuera-del-tiempo, inequivocadamente: ni las escenas figurativas que presentan juntamente episodios sucesivos, por ejemplo entre los primitivos sienenses, ni las composiciones cubistas, ni siquiera las sutiles combinaciones de fotografías montadas por David Hockney nos pueden hacer dudar al respecto: sólo son brillantes - pero limitadas -ampliaciones del carácter suspendido de la imagen fija, como ya lo estableció muy delicadamente Gotthold Ephraim Lessing (1729-1781), en "Laocoonte"[1], obra capital e inaugural de la estética moderna, aunque no muy apreciada por los pintores y fotógrafos del siglo XX.

Los modelos de trazado de rayos, en cambio, nos permiten construir la mirada como una estructura dentro-del-tiempo, donde los esquemas pictóricos pueden trabajarse en relación a un desarrollo temporal, y los algoritmos de renderización están cerca ya de ofrecernos al respecto una libertad comparable a la que la informática propuso a la música, en el último tercio del siglo XX: simplemente, el trabajo de la imagen ha resultado bastante más complicado, para el ordenador, que el trabajo con el sonido, particularmente en cuanto al color, cuyo manejo dista mucho, todavía, de la calidad tímbrica, espacial e interactiva alcanzada por los sintetizadores de sonido.

En cuanto al modelo euclidiano, resulta desesperadamente, magníficamente, puramente temporal: el rastreo de la mirada, en Euclides, sólo aprehende los objetos geométricos más simples: no hay la menor voluntad de componer la imagen, de construir la escena, de reglamentar la posición del ojo. Pero tal limitación tiene su pendiente positivo: en la "Óptica", todos los procedimientos son claros, sus resultados límpidos, sus conclusiones transparentes. Y esta limpidez, característica de un modelo sin cuadro, es la que acerca aquel antiguo modelo al proceder probabilista, del cual hablaremos ahora.

Las imágenes renderizadas no constituyen la única aplicación del trazado de rayos. En particular, este método tiene ya una larga historia con la teoría geométrica de la acústica. Recién, se ha empezado a trabajar con la idea de "renderización acústica" (en inglés: *auralization*), es decir: proponer a la escucha una "imagen acústica" de cualquier sala estudiada, para que se pueda oír directamente cómo suena. Con ello, en mi opinión, la acústica corre ahora el mismo riesgo que la óptica: reducir el trabajo sobre la percepción a un simple manejo de la imagen, pensar solamente a partir de la imagen. Eso es lo que ya podemos reprochar a los programas de renderización: el haber sacrificado en pro de la imagen toda la parte de cálculo energético que permiten sus algoritmos. El resultado, es que trabajamos ahora con estas herramientas modificando las imágenes, cambiando intuitivamente los valores de parámetros complejos, hasta obtener una apariencia visual satisfactoria, pero sin tener la menor idea de cómo el programa calcula estas imágenes. Tal actitud puede justificarse cuando el espacio virtual que estamos definiendo nos interesa sólo por sí mismo, como, por ejemplo, en el caso del cine de animación (donde podemos imaginar que, próximamente, ya no se simularán solamente los espacios y su iluminación, sino también su acústica, para crear películas cada vez más "realistas"). En cambio, para la arquitectura, que necesita tales modelos para simular un mundo físico donde luego se construirán *realmente* - y se validarán - los diseños proyectados, esta actitud resulta, por lo menos, contraproducente...

---

[1] "Laocoonte", Gotthold Ephraim Lessing (Berlín, 1766), versión castellana de Eustaquio Barjau, Editorial Tecnos, Madrid, 1990.

¿Se puede dibujar el tiempo?

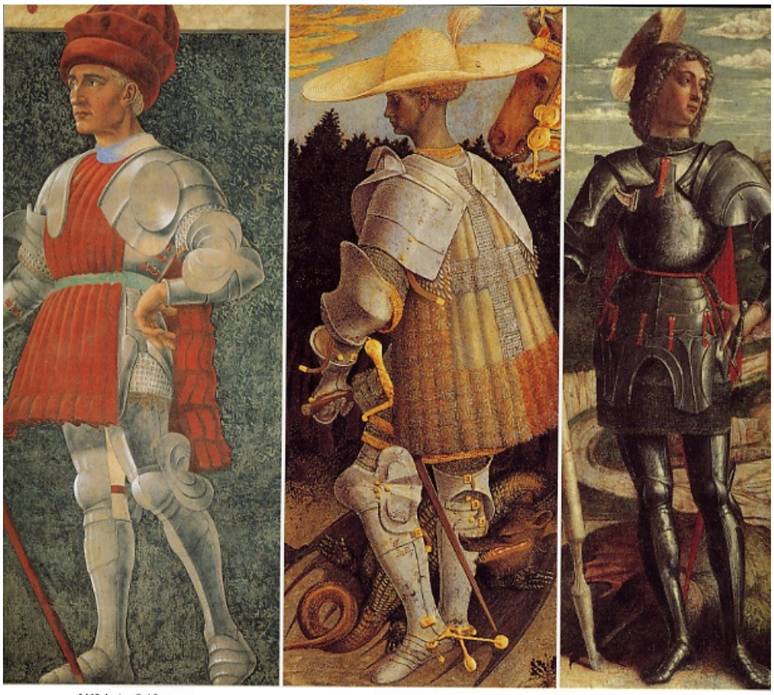
En esta composición de David Hockney - quizás la más bella -, se han capturado dos o tres segundos de la vida de un fumador. Pero, la mano que sacude la cerilla, ¿la está encendiendo o apagando? ¿En qué orden interpretar esta serie? Aquí, el tiempo libre de la mirada gana en quedar indeterminado: deja jugar la fantasía. No es, desde luego, el tiempo de la música...

“Billy Wilder encendiendo su puro, dic. 1982”, composición fotográfica de David Hockney.

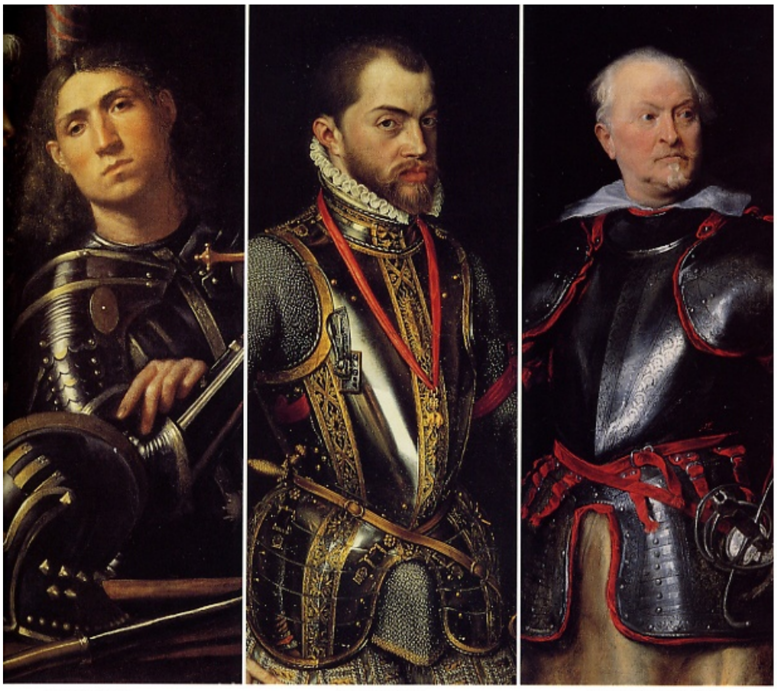
El modelo probabilista incita a una actitud totalmente distinta. La características energéticas y geométricas de las fuentes (de luz o de sonido) son simuladas por la generación, mediante un proceso aleatorio, de numerosos rayos, que recorren el espacio virtual, sufren la reflexión, la refracción o incluso la difusión (mediante la aplicación de una nueva ley probabilista), antes de alcanzar, eventualmente, un *receptor*, cuyas dimensiones determinan la precisión del trazado (no puede ser un punto, desde luego), junto con el cálculo de error propio del método empleado. Aumentando el tiempo de cálculo, se puede ser tan preciso como se quiera, y la precisión del cálculo se puede evaluar. En el receptor, no se forma una imagen, sino que se calculan determinadas magnitudes energéticas (luminancia, nivel sonoro,...) o geométricas (diagrama polar, espacialidad,...), que permiten evaluar el campo de energía diseñado y estudiar las consecuencias de cada modificación que se le quiera aportar. El defecto del modelo es su lentitud (porque no se utilizan "trucos"), y su calidad la total transparencia de los resultados (por la misma razón), calidad que comparte con la intuición euclidiana, añadiéndole el factor cuantitativo sin restarle nada de su simplicidad propiamente *geométrica*.

Queda por discutir la noción de "realismo", que los conceptores y utilizadores de los modelos con cuadro han pretendido a menudo apropiarse, como finalidad para sus producciones. Aún si concediéramos llamar "real" el mundo "físico" que nos envuelve, resultaría inapropiado aplicar el mismo calificativo a su percepción por parte del ojo, la que llamamos "el espacio visual". Éste no ostenta más grado de realismo que el espacio auditivo: el ojo, como el oído, no es más que una modelización que la mente humana opera de su entorno, mediante sofisticadas herramientas, el estudio de las cuales interesa esencialmente la medicina, cuyas investigaciones al respecto no han de tener más incidencia sobre el estudio de la mirada de la que tendría, para la comprensión de la pintura, una descripción química de los pigmentos, o, para la comprensión de los algoritmos de renderización, una descripción electrónica del funcionamiento de los ordenadores.

El modelo *propio*, el ojo, es un modelo evolutivo, adaptativo, interpretativo y de aprendizaje. Es fruto, primero, de la larga historia de nuestra especie, de sus antepasados terrestres y marinos. Ha conservado de sus más antiguos dueños, como característica curiosa, la extrema limitación de su ventana frecuencial, ya que sólo es sensible a lo que llamamos la *luz*, es decir: aquella parte de las ondas electromagnéticas que logra traspasar, hasta cierta profundidad, la superficie de los mares. Entre los mamíferos, el ojo de nuestros antepasados arborícolas se ha especializado, gracias a la distinción que se operó en su retina entre tres tipos de receptores del color (los *conos*), quizás para distinguir mejor las frutas maduras entre la verdura dominante en los bosques donde trabajaba. Inventó entonces los rojos y los azules, y el maravilloso arco iris, que no era, empero, como el nuestro, figura de orden, sino, solamente, derrame versicolor de la profusión celeste. En *Homo Erectus*, otorgó al ángulo recto privilegio real sobre las demás inclinaciones, por separar de la universal gravedad una nueva mirada, erguida, clavada en el horizonte (el oído, por su parte, no reconoció nunca al de los noventa grados el menor privilegio). La especialización del cerebro en dos hemisferios, y la consiguiente pérdida de simetría, trajo entonces al ojo la izquierda y la derecha, distinción mucho menos pronunciada, sin embargo, que la de arriba, abajo, delante y detrás. Tras emprender su largo camino, llegado a las planicies semidesérticas, entre sus esquemas elementales, hubo de materializarse la línea del horizonte, recta finísima de donde solían surgir los peligros y las oportunidades, la cual cobró especial esplendor, de pronto, al aparecer deslindando los dos profundos azules del cielo y del infranqueable gran lago salado, visiblemente ilimitado, *infinito*. Por estos tiempos, acaso, empezó a asociar indistintamente el azul al frío y a la lejanía, el naranja al calor y a la proximidad, cediendo a las falsas evidencias del contraste cálido-frío. Las obras gráficas más antiguas que nos dejó la mano que él guiaba llevan ya el signo de un gran desarrollo, como en los tableros coloreados de Lascaux, donde el ojo muestra claramente su gusto por la geometría, estando casi listo ya para dejar advenir estas formas ideales que los griegos llamaban "huellas humanas": el círculo, los



1448 Andrea Del Castagno **h. 1450** Pisanello **h. 1467** Andrea Mantegna



h. 1501 Giorgione **1557** Antonio Mor **1625–1627** Anthony van Dyck

¿Se puede dibujar la realidad?

En un importante ensayo, David Hockney se ha interrogado sobre la utilización de instrumentos de óptica en la pintura renacentista, desde la época de los hermanos van Eyck. En las imágenes aquí presentadas, el uso por parte de los pintores de un espejo cóncavo o de una lente que proyectara la escena sobre el cuadro explicaría la diferencia de calidad, en cuanto al "rendu réaliste", entre las armaduras pintadas en el siglo XV (arriba) y las del siglo XVI (abajo), época en que el uso de la "cámara clara" se habría ya generalizado entre los pintores...

Seis representaciones de armaduras, página extraída de "El conocimiento secreto", David Hockney.

triángulos y otros cuadriláteros... Y es que ya era evidente que el ojo *es* un modelo geométrico: ¿qué otro pudiera darse sin él, si él fue quien inventó la geometría?

El modelo propio es una estructura dentro-del-tiempo, complicada por su facultad de adaptación. Así, el blanco, diapasón de los colores, cambia según la iluminación general, y no se puede concebir, a ejemplo del oído, ni el "ojo absoluto", ni aquel artilugio portátil que diera el "la" de los pintores.

El ojo trabaja sin cuadro, como Euclides.

Sabe discernir en los objetos de su atención las propiedades geométricas más complejas, y aprender de ellas para enriquecer su experiencia, formándose una "biblioteca" de situaciones y de interpretaciones que ninguna teoría podría abarcar, ni el algoritmo más sofisticado emular, porque el ojo, aprendiendo de ellos, progresaría de nuevo, y los dejaría atrás.

Modelo de los modelos, y sin embargo solamente modelo, es el primero y el último de los seis que hemos discutido aquí, y cuyas principales propiedades resumimos a continuación.

Comparamos los siguientes seis modelos de la mirada: el ojo (*modelo propio*), la geometría proyectiva del siglo XIX (*modelo platónico*), el pensamiento desarrollado por Euclides en su "Óptica" (*modelo euclidiano*), los resultados del Renacimiento italiano (*modelo pictórico*), el trazado de rayos aplicado a la renderización (*modelo determinista*) y a los campos energéticos (*modelo probabilista*).

Para cada uno, nos preguntamos cuál es su relación al tiempo (*fuera-del-tiempo*, *temporal* o *dentro-del-tiempo*), si trabaja con un *cuadro*, si se apoya en las *propiedades geométricas complejas* de la escena (y en su eventual transposición al cuadro), y, finalmente, si el modelo es *límpido*, es decir: si sus resultados pueden interpretarse claramente, habiéndose conseguido sin la menor intervención de propiedades misteriosas o de oscuridades algorítmicas.

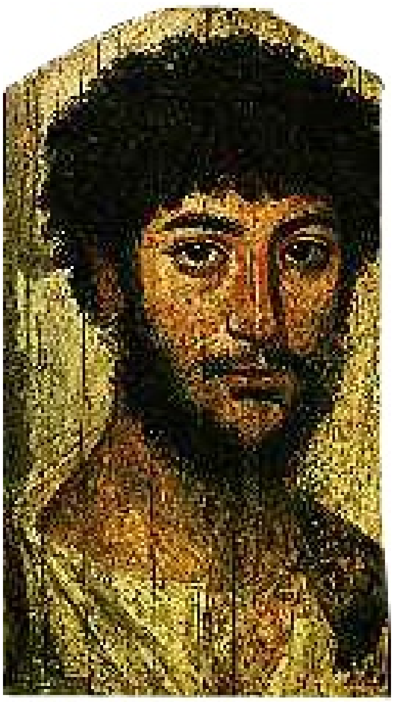
Modelo	fuera-del-tiempo	temporal	dentro-del-tiempo	Cuadro	Propiedades geométricas complejas	Limpidez
propio			x		x	
platónico	x			x	x	
euclidiano		x				x
pictórico	x			x	x	
determinista			x	x	x	
probabilista			x			x

Desde luego, podríamos formular más modelos de los que aquí aparecen, por ejemplo: los de la visión en cortes, en desarrollo o en axonometría... Por otra parte, quizás pueda parecer algo provocador el haber considerado el ojo como un simple modelo geométrico, como si fuera un invento humano. Pero es así: el ojo humano es, esencialmente, un invento nuestro, que dista más del ojo animal que de cualquier otro modelo que construimos a su ejemplo. El lingüista Émile Benveniste solía recordar que el hombre no nace en la natura, sino en la cultura. Nuestra cultura ancestral ha desarrollado nuestra manera de ver el mundo, y la cultura de nuestra sociedad ha desarrollado nuestra mirada sobre el mundo, y cada uno de nosotros, con sus estudios, sus experiencias y sus entusiasmos, desarrolla y enriquece continuamente su ojo, su mirada, su propio modelo del espacio visual.

Seguramente, muchos especialistas se habrán forjado una opinión distinta sobre esta cuestión. Pero el que desee, como lo hacemos aquí, razonar juntamente sobre la percepción y la expresión, sobre la *curiosidad* y la *imitación*, como decía Aristóteles, se convencerá fácilmente de que el ojo y el oído son, simplemente, las dos obras maestras de la inventividad humana.

* * *





Hay un extraño parecido entre los retratos que Ingres realizó con la ayuda de la cámara clara (arriba) y los antiguos retratos de Fayoum (abajo). Quizás porque los modelos de Ingres sólo se prestaban aquí a un experimento; en cuanto a los griegos de Fayoum, llevaban su retrato en la tumba: en ambos casos, ni los pintores ni los retratados pensarían que tales obras se llegaran a exponer en público...

Tres retratos de Ingres; tres retratos de Fayoum (~ I^{er} siglo AC hasta III^{er} siglo DC).

Resulta imposible dejar de preguntarse porqué Euclides - o algún otro pensador del gremio alejandrino - no pensó - o no quiso pensar - la perspectiva sobre el plano, cuando sabemos, por múltiples testimonios, que los griegos apreciaban la pintura y que contaron entre ellos grandes pintores y excelsos arquitectos.

Se me ocurren tres explicaciones: la falta de emulación, la falta de interés, o el rechazo de la mirada inmóvil.

En primer lugar, el Renacimiento italiano fue precedido por cuatro siglos de un formidable desarrollo musical, sin ejemplo en la historia humana, que había hecho del arte auditivo una extraordinaria forma expresiva, que las demás artes quisieron emular, lo cual dio un sentido muy particular al descubrimiento brunelleschiano. De ello dan fe, entre muchos otros, los escritos de Leonardo da Vinci.

Para que algo parecido hubiese podido producirse en tiempos de Euclides, hubiera hecho falta un formidable despertar pitagórico, muy improbable, ya que la secta se encontraba entonces en completa decadencia, y sus ideas estaban totalmente esclerosadas: siglos después, el "Manual de Armónica" de Nicómaco de Gerasa[1] no marca ningún progreso en cuanto a la teoría musical, comparado con lo que conocemos de la obra de Aristóxenes de Tarento. Por otra parte, en la práctica, por lo que sabemos, la música griega nunca alcanzó el grado de desarrollo que experimentó la polifonía de los siglos XIV y XV.

A pesar del notable esfuerzo de Euclides por acercarse al mundo terrenal, sentimos que su "Óptica" sigue tributaria de la pasión de su época por la astronomía. En la observación del cielo aparente, no hay ningún cuadro de proyección evidente o, lo que es lo mismo, se impone un cuadro esférico, de radio cualquiera, que los antiguos creían discernir, y que llamaban la "bóveda celeste". En él, sólo pueden medirse directamente los ángulos visuales, como en la óptica euclidiana.

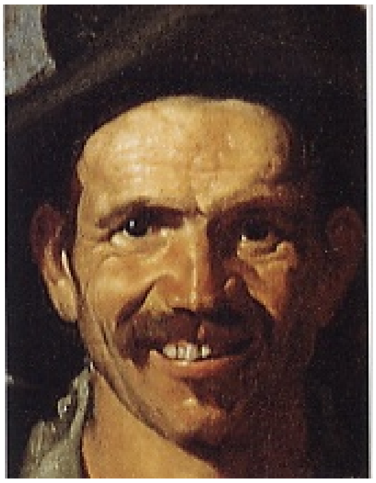
Este vínculo implícito (Euclides nunca habla del cielo en esta obra) es, paradójicamente, el que nos ha permitido conservar la "Óptica", la cual circulaba aún, a finales de la época helenística, junto con la "Catóptrica" atribuida al mismo autor, como mera introducción pedagógica a la obra astronómica de Claudio Tolomeo, considerada más difícil y más avanzada.

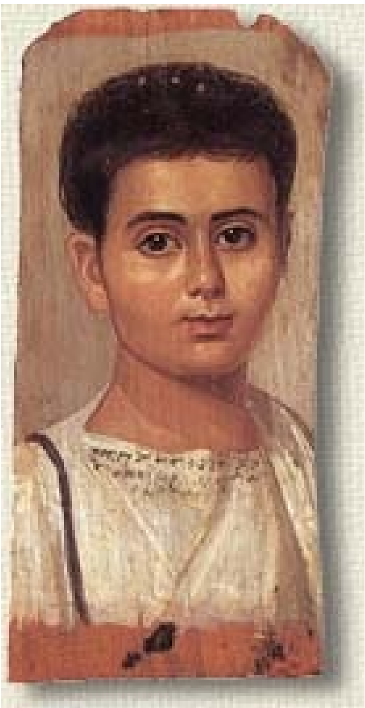
Si seguimos esta pista, podemos intuir que lo que más hubiese entusiasmado Euclides - o por lo menos sus lectores - hubiera sido poder dibujar el cielo respectando las distancias aparentes entre las estrellas. Este problema se planteó igualmente para la cartografía terrestre, una vez que los sabios alejandrinos, tras haber comprobado la esfericidad del globo, llegaron a medir muy exactamente su diámetro y quisieron realizar su mapa.

Siempre en Alejandría, Hiparco descubrió luego la proyección estereográfica, que es *conforme* (es decir que respeta localmente los ángulos). Era un adelante notable, pero insuficiente.
Decimos que una proyección de la esfera sobre el plano puede ser *conforme*, *equivalente* o *equidistante*, según respete los ángulos, las superficies (como la proyección de Lambert) o las distancias.

Ahora, sabemos que la equidistancia es imposible de realizar completamente, aunque sí se puede obtener, pero solamente a partir de un punto. Los griegos no descubrieron esta forma de proyección, más compleja ya que no lineal, que se atribuye a Guillaume Postel. En los mapas celestes, se utiliza con la estrella polar como centro, a partir de la cual podemos luego medir directamente las distancias aparentes de las demás estrellas. En los mapas terrestres, suele usarse también en su versión cenital, con uno de los polos como centro. La ONU eligió esta proyección para su símbolo, y es como un guiño involuntario que las naciones unidas mandan, a través de los

[1] "Manuel d'Harmonique", Nicomaque de Gérase, versión francesa de Charles Émile Ruelle, annuaire de l'Association pour l'encouragement des Études grecques en France, Baur, Paris, 1881.





Aquí, la diferencia se hace notable: los retratados de los cuadros de arriba (o sus pintores) se dirigen a nosotros, quieren dejar constancia de lo que fueron: posan para un público, que los ha de recordar, mientras que los de abajo, si posan, lo hacen sólo ante la muerte, y un profundo anhelo, no de posteridad, sino de eternidad...

Tres retratos del siglo XVII; tres retratos de Fayoum (~ I^{er} siglo AC hasta III^{er} siglo DC).

siglos, a la ciudad donde todo empezó, Alejandría, y a su sueño perseverante de ordenar el universo mediante la geometría.

Desde luego, tales investigaciones poco podían aprovecharse de los esfuerzos perceptivos de Euclides, y la "Óptica" quizás hubiera quedado totalmente marginada, de no ser por el inmenso respeto que se debía a su autor...

Existe finalmente una tercera razón para explicar el aparente desinterés de Euclides por la pintura, quizás la más convincente, porque sale de sus mismos escritos. Hemos visto que, en la "Óptica", todo es movimiento. La pintura, en cambio, suspende el tiempo. Es posible, simplemente, que, para el alejandrino, las imágenes no fueran muy buenas representaciones del espacio visual, que faltara al modelo pictórico algo imprescindible: aquel rastreo donde se revela la esencia de la mirada...

Una anécdota antigua cuenta que Apeles había pintado un árbol tan real, que un ave intentó posarse un sus ramas. Pero era sólo un árbol, algo inanimado.

"Si el ojo fuera un animal completo, la vista sería su alma: eso es en efecto la sustancia del ojo, sustancia en sentido de forma. En cuanto al ojo, es la materia de la vista y, desapareciendo esta, ya no es un ojo, sino por homonimía, como un ojo de piedra o dibujado."

Aristóteles[1]

Si seguimos bien el filósofo, los pintores no pueden dibujar la forma del ojo, que es la mirada. El ojo pintado es un ojo muerto...

¡Cuán ajeno se muestra tal pensamiento a la opinión renacentista! ¡Cuánto camino recorrido por la Europa cristiana, para que los mismos reyes pidiesen se representara su persona en vividos retratos pintados que manifestasen sus reales virtudes a través de una mirada estudiada!

En el oasis de Fayoum, en la misma tierra donde vivió Euclides, se encontraron centenares de sepulcros perteneciendo a la época romana, que revelaron los más bellos retratos que conocemos de la antigüedad. Pintados en vivos colores, sus modelos, de rasgos bien definidos, nos dirigen miradas penetrantes, para nosotros llenas de una vida intensa suspendida hace casi dos mil años.

Sin embargo, para sus contemporáneos, estos ojos, abiertos de par en par y fijados para la eternidad en una dirección inmutable, desde la placa de sicómoro donde fueron pintados, nunca habían mirado, ya que, con el primer trazo del pincel que los inmovilizó para siempre, pertenecían, no al arte inmortal, sino a los muertos.

[1] "De l'âme", Aristote (p. 41), versión francesa de E. Barbotin, Collection Tel, Gallimard, 1989.

Origen de las ilustraciones

p.106 iz. hasta p.112: Serie de 29 platos pequeños. Corrida. Diám.: ~ 17 cm. Realizados por Pablo Picasso del 11 al 17 de abril de 1953 (Musée d'art moderne, Céret), *in* "Cerámica de Picasso", Georges Ramié, Ediciones Polígrafa, Barcelona,1974.

p.113 iz.: - Portada de la primera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1505), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

p.114 iz.:hasta p.116: Ilustraciones de la tercera edición del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin (1521) , *in* "De Artifi[cia]li P[er]spec[ti]va Viator Ter[ti]o", Pélerin, Jean dit Viator (ca 1435-1524), editado en Toul por Pierre Jacobi (tercera edición, 1521), BnF, RES-V-169.

p.117 iz.: - Poratda de la "Óptica", Euclides, en un manuscrito del siglo XV, *in* Urb. lat. 1329 fol. 1 recto (Biblioteca vaticana).
- Cuadro atribuido a Paolo Ucello

p.118 iz.: - "Cuadros plano y esférico", dibujo propio, realización gráfica: Luc Masset.

p.119 iz.: - "Cuadros plano y esférico", dibujo propio, realización gráfica: Luc Masset.

p.120 iz.: - "Missa Virgo parens Christi", Jacques Barbireau (ca.1420-1491), manuscrito de principios del siglo XVI, copiado en Bruselas o Malines para el papa León X (1513-1521) *in* Biblioteca de la Capilla Sixtina, *Capp. Sist. 160 fols. 2 verso-3 recto.*
- "Enamorados", Rothschild 2973, fol. 3v, BnF, *ex* "Cancionero de Jean de Montchenu", hacia 1475, Savoya.

p.121 iz.: - Ilustración de "Traités de pratiques géométrales et perspectives enseignées dans l'Académie royales de la peinture et sculpture", Abraham Bosse (Paris, 1665), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.
- Ilustración de "Représentations géométrales de plusieurs parties de bastiments faites par les reigles de l'architecture antique", Abraham Bosse (1659), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

p.122 iz.: - Fresco de Giuliano Romano, *in* "El arte en la Italia del Renacimiento", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 1994,
+ "Núvol i Cadira", Antoni Tàpies, *in* Fundació Antoni Tàpies; composición gráfica: Benoit Beckers y Gori Moya.

p.123 iz.: - "Billy Wilder encendiendo su puro, dic. 1982", David Hockney, *in* "David Hockney: Retratos", Marco Livingstone, Editorial Cartago, Palma de Mallorca, 2003.

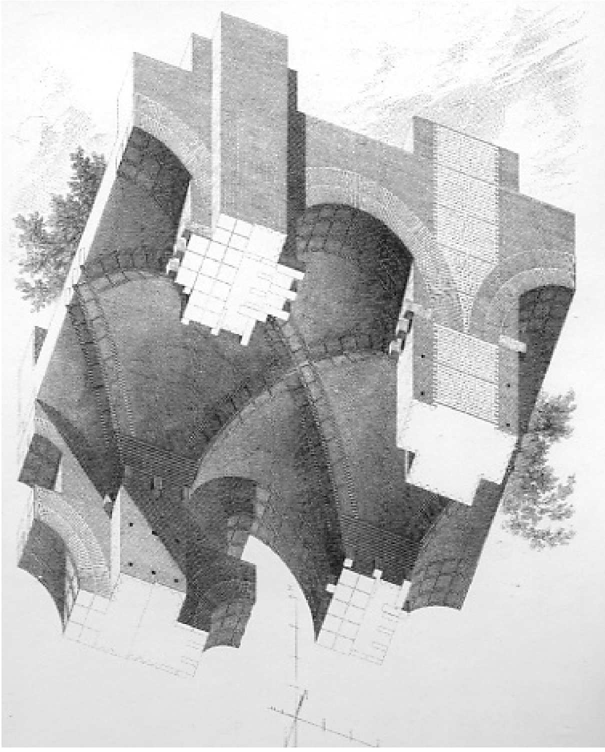
p.124 iz.: - Seis retratos pintados, *in* "El conocimiento secreto", David Hockney, Ed. Destino, Barcelona, 2001.

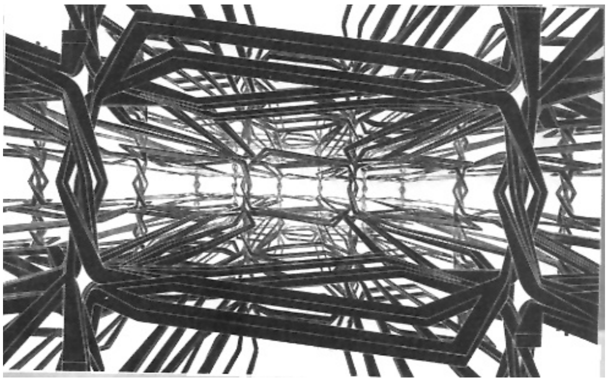
p.125 iz.: - Tres retratos de Ingres, *in* "El conocimiento secreto", David Hockney, Ed. Destino, Barcelona, 2001.
- Tres retratos de Fayoum, *in* http://portraits.fayoum.free.fr.

p.126 iz.: - Tres retratos del siglo XVII, *in* "El conocimiento secreto", David Hockney, Ed. Destino, Barcelona, 2001.
- Tres retratos de Fayoum, *in* http://portraits.fayoum.free.fr.

- 15 -

La perspectiva





Dos usos peculiares de la proyección, para mostrar estructuras. Mientras que A. Choisy revela una estructura gracias a una axonometría "desde abajo", K. Wachsmann utiliza una perspectiva central y atmosférica, realzada por una vaga iluminación...

Axonometría de A. Choisy (1873); "Vinegrape", K. Wachsmann (1995).

15. La perspectiva

Desarrollaremos ahora el modelo pictórico, a la manera de los dibujantes[1], e indagaremos la relación entre la proyección y la perspectiva, entre la geometría y la percepción, cuestionando la intuición aristotélica y euclidiana respecto al fundamento temporal de la mirada.

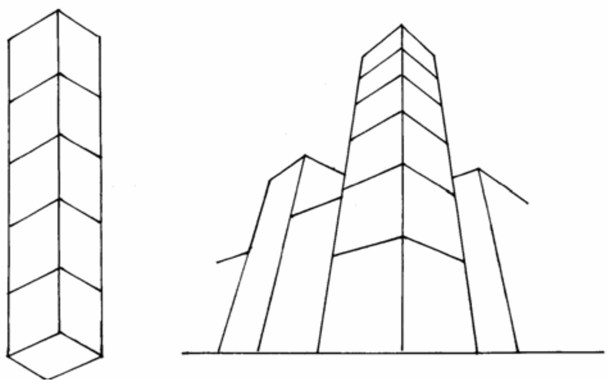
- El efecto perspectivo -

Decimos de una figura plana que presenta un efecto de *perspectiva* cuando evoca, ante la mirada, una tercera dimensión. Esta ilusión se produce porque el ojo percibe en aquella figura unas características geométricas análogas a las que determinan su percepción tridimensional del espacio sensible, como la *profundidad*, el *alejamiento*, la *iluminación* o el *sombreado*; tales nociones se constituyen en cada individuo por un ejercicio continuado y variado del sentido de la vista, que forma la *experiencia visual*; resulta notable que, en nuestra cultura, donde las imágenes son omnipresentes, la experiencia visual debe tanto a la ilusión perspectiva como a la percepción directa del mundo visible.

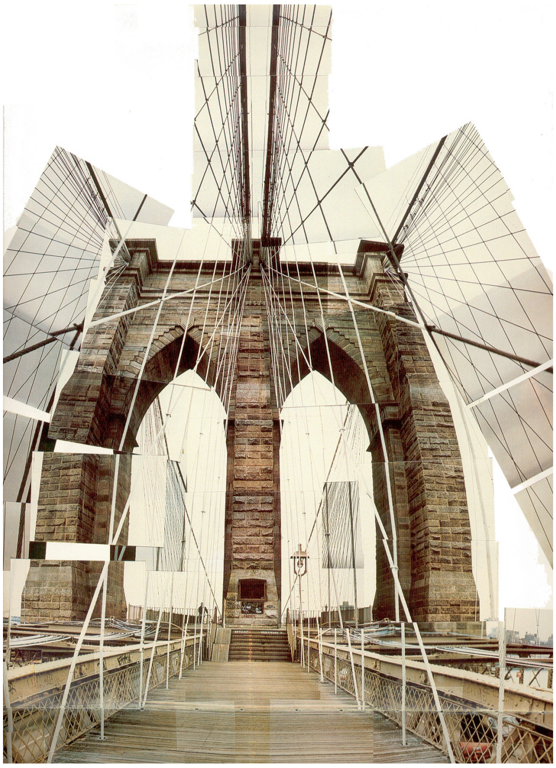
Luego, toda perspectiva representa, por definición, cierto aspecto de la experiencia visual, y tal aspecto se expresa en términos geométricos. Así, sólo es por la disposición geométrica de sus gradaciones que los colores sugieren, en el dibujo, el efecto perspectivo de iluminación o de sombreado. En este caso, la observación de las leyes físicas es secundaria: si bien facilita la correspondencia con la experiencia visual, podemos sin embargo crear perspectiva con un sol verde, o con escalas de grises que jamás hallaremos en la realidad.

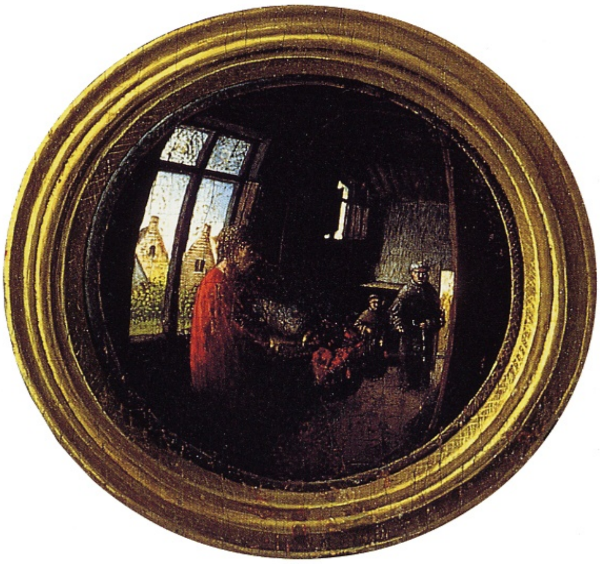
La naturaleza puramente geométrica de esta ilusión implica, luego, que toda perspectiva puede describirse en términos de proyección. A la inversa, toda imagen definida por una proyección, exceptuando los casos degenerados, produce un efecto de perspectiva, aunque su clara percepción por parte del ojo precise a menudo un aprendizaje, una modificación de la experiencia visual propia, que permita establecer nuevas correspondencias. Tal esfuerzo de adaptación siempre es instructivo: permite relativizar el pretendido realismo de las formas más corrientes - como la perspectiva central -, enriquecer la experiencia visual personal - y luego el espíritu crítico - y, finalmente, representarse con mayor claridad unos problemas geométricos que encuentran a menudo en la proyección particular que mejor corresponde a su naturaleza una expresión muy simplificada.

En efecto, si bien todas las representaciones perspectivas son "verdaderas", cada una hereda de la proyección que la engendra unas propiedades particulares, que la hacen más o menos útil para determinada tarea. Así, la conservación del paralelismo hace de la axonometría un soporte ideal para la *notación*, la transmisión de información sobre los volúmenes, sus relaciones y conexiones. En cambio, el refuerzo de la ilusión espacial en la perspectiva central, gracias al escorzo y a su efecto de alejamiento, incita a la *representación*, a la manifestación de las proporciones y del espacio tal y como se perciben en el mundo sensible. En la figura, la isometría (izquierda), muestra bien la constitución de la torre y sus volúmenes, pero, enfrentada a la perspectiva central (derecha), parece flotar en un espacio irreal. Si miramos tal figura con un ojo distraído, veremos la torre isométrica ponerse en movimiento, y caer hacia atrás.



[1] Todos los dibujos que ilustran esta sección son de Gustavo Contepomi, arquitecto y profesor de dibujo.

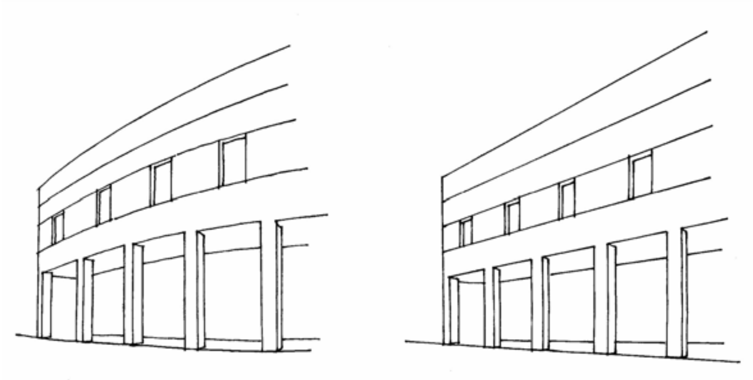




La perspectiva curvilínea nace del movimiento de la mirada (Puente de D. Hockney, arriba) o del uso de un cuadro esférico (espejos convexos de R. Campin y J. Van Eyck, abajo).

Composición fotográfica de David Hockney; espejos convexos de Robert Campin (1438) y Jan van Eyck (1434).

Las perspectivas central y axonométrica comparten, sin embargo, una propiedad fundamental: preservan las alineaciones. En la figura, la perspectiva curvilínea (izquierda), comparada con la central (derecha), parece primero más dinámica. Eso viene de que sólo se vería así en un rápido girar de la mirada, para captar enteramente un edificio muy extenso. Al comprobar que eso no es el caso aquí, ya que la misma información cabe sobre una perspectiva plana, nos empieza a molestar la pérdida de alineación en la representación curvilínea: ¿será solamente un juego del dibujante, o se tratará de un edificio realmente curvo?



De hecho, la proyección central sobre el plano resulta eminentemente visual, porque es la única que mantiene las alineaciones y que, al mismo tiempo, sugiere el infinito como lo hace la mirada. Así, en su definición orientada, se ha podido concebir el centro de proyección como un *ojo* ante el cual todas las paralelas se reúnen en un mismo punto que figura el infinito.

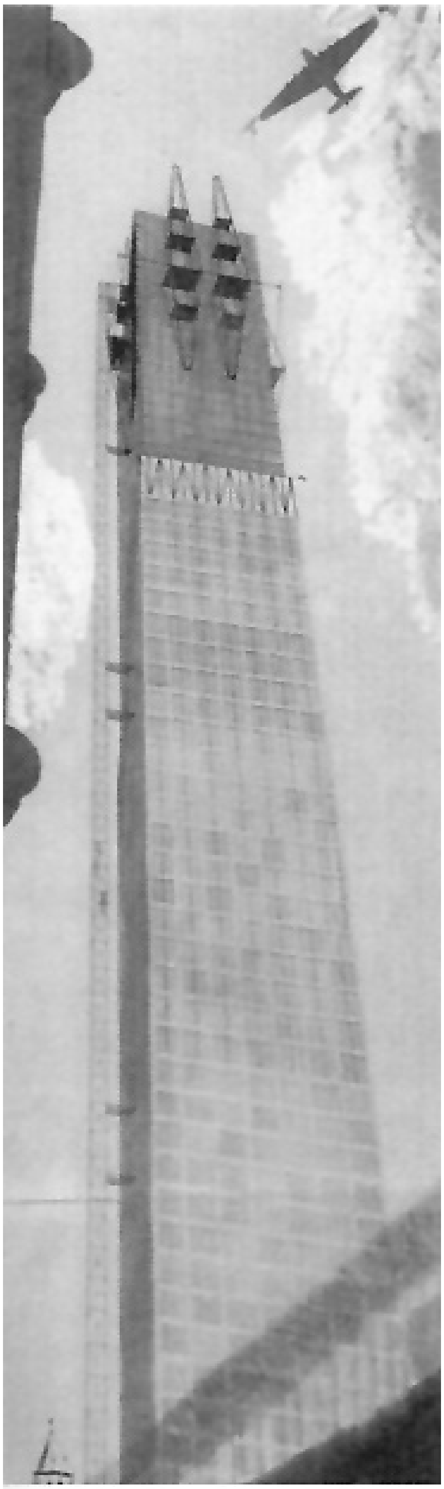
En la versión no-orientada, donde el espacio situado detrás del plano desvanecente se considera también, observamos que las paralelas divergen hacia atrás, de modo que las dos "extremidades" de una recta se reúnen, al infinito, en el mismo punto de fuga. En el siglo XIX, estas particularidades del cuadro plano engendraron una "geometría proyectiva", teoría original y fecunda basada en el estudio del "plano proyectivo real", que es un plano euclidiano aumentado de una "línea del infinito".

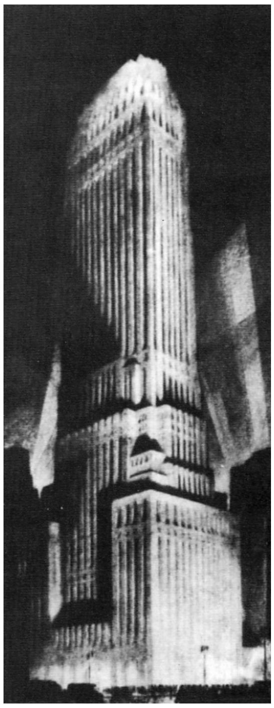
Aquí, donde interrogamos la relación entre las proyecciones geométricas y la percepción visual del espacio, aquella "línea del infinito" desenvuelve un papel muy singular, en relación con una noción fundamental de la experiencia visual: la verticalidad.

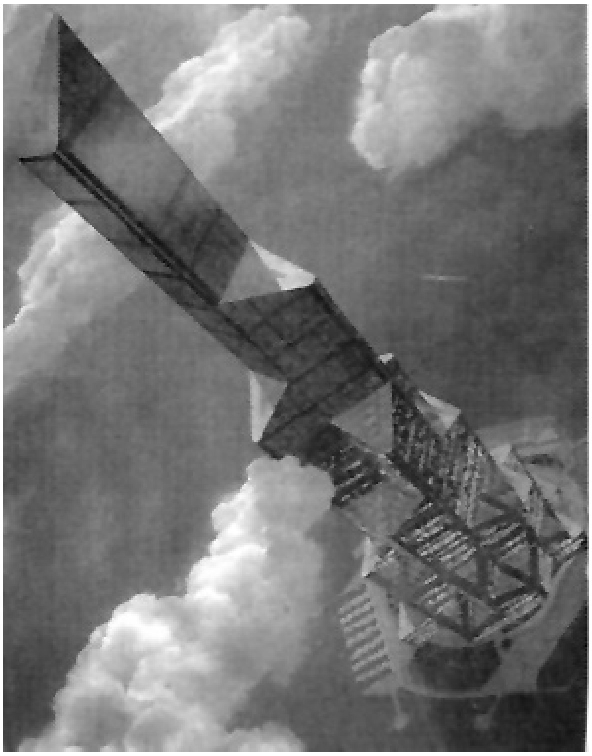
Se trata, en realidad, de un concepto físico, ya que la dirección vertical es, por definición, la de la fuerza de gravedad, de donde proviene nuestro sentido del equilibrio. El sentido de la vista participa del sentido del equilibrio, casi siempre de manera determinante, ya que el ojo busca sin cesar la verticalidad (o la horizontalidad) en el paisaje, y la encuentra, ora en el suelo, cuando éste se asimila al plano tangente a la tierra (sirve entonces de plano horizontal de referencia, lo que llamamos un "geometral"), ora en las líneas arquitectónicas o naturales de la escena visual (los muros, las baldosas, los árboles, el espejo de las aguas quietas,...), ora llevando la mirada a lo lejos, hacia el horizonte, pues, en la posición natural del cuerpo humano, la línea del infinito es una horizontal que se asimila, por ejemplo, a la línea de separación entre el cielo y el mar.

Esta referencia es la que perdemos en avión, donde la línea del infinito es paralela al suelo del aparato; cuando éste se inclina, aquella se distingue de la línea que separa el cielo de la tierra, y perdemos el equilibrio. El caso correspondiente, cuando el horizonte - en su definición usual - ya no es horizontal (en aeronáutica, se habla entonces de un "horizonte local"), es de hecho el más general, por lo menos para una teoría proyectiva, donde la noción de verticalidad es arbitraria, ya que exógena a la geometría.

Sin embargo, no es así cómo razona el dibujante, el cual, en busca de la mejor representación, parte de las situaciones más corrientes, donde la experiencia visual es, naturalmente, la más rica, y tiende a considerar el cuadro inclinado como una excepción, la vista en *picado* o en *contrapicado*, debida al hecho de que el observador baja o levanta la mirada, sea porque se encuentra en una posición particular (al pie o en la cima de una torre, por ejemplo), sea porque examina objetos más pequeños o más grandes que los objetos "normales" de la escena, cuyas líneas verticales son vistas frontalmente, sin efecto de alejamiento.







Aunque las verticales sólo fuguen ligeramente en el dibujo, el efecto de picado o contrapicado puede ser vertiginoso, habilmente reforzado por la iluminación (ar.dr.), las nubes (ab.dr.), o incluso (iz.) un avión y... un campanario, para dar la escala.

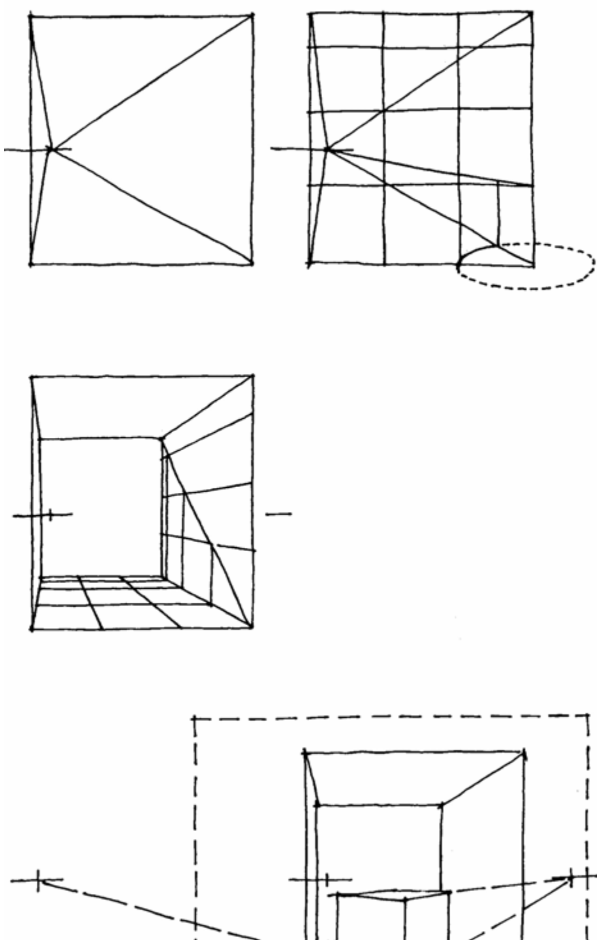
Tres rascacielos, vistos en picado o contrapicado.

Esta es la diferencia que quiero resaltar, al oponer el *caso general* de la proyección al *caso estándar* de la perspectiva. En el primero, representamos un objeto, un modelo geométrico extraído de la realidad o de la imaginación, que podemos hacer girar ante nosotros (como lo hacemos siempre en el espacio más abstracto de la axonometría ortogonal), mientras que, en el segundo, representamos una escena visual, real o imaginaria, donde la noción de verticalidad aparece de entrada, bien porque se introduce explícitamente, con la definición anterior de un plano horizontal de referencia, como en el método del *geometral*, bien porque está sugerida por las relaciones que se establecen entre los objetos constitutivos de la escena, según un principio de *verosimilitud* que constituye la esencia misma de la representación.

Así, sólo es por la sugestión de la verticalidad añadida al efecto perspectivo de la proyección que una vista en picado puede provocar una sensación de vértigo, que un sentimiento de agobio puede nacer de la inclinación del cuadro hacia arriba.

No obstante, el caso estándar, donde el cuadro está recto, constituye siempre el punto de partida del dibujo en perspectiva. El dibujante puede luego inclinar el cuadro, borrar los referentes verticales, conducir el espectador hacia situaciones siempre menos corrientes, siempre más abstractas, enriquecer su mirada con nuevas experiencias. De cualquier modo, una vez alcanzado cierto grado de abstracción, el ojo más ejercitado pierde la intuición del relieve, la ilusión perspectiva se desvanece, la hoja de papel vuelve a mostrarse irremediablemente plana. El dibujo de representación no puede ya sugerir el espacio: haría falta, más allá, recurrir a técnicas holográficas o estereoscópicas.

* * *

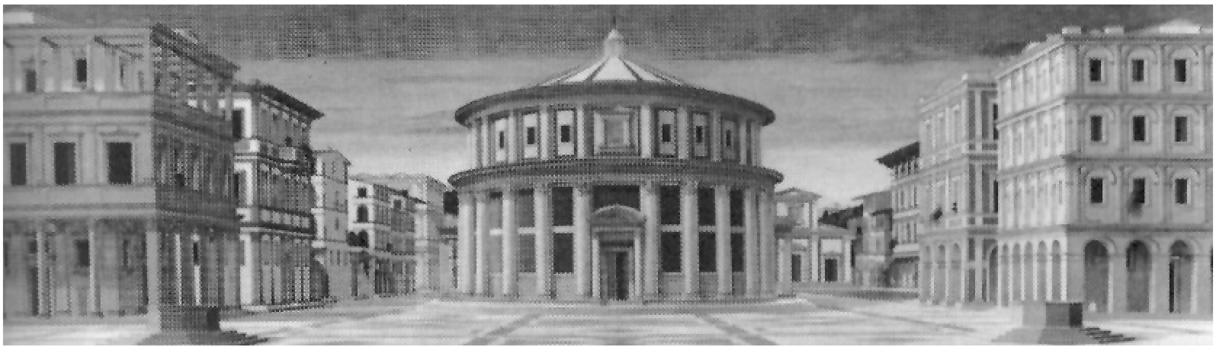


- El espacio perspectivo -

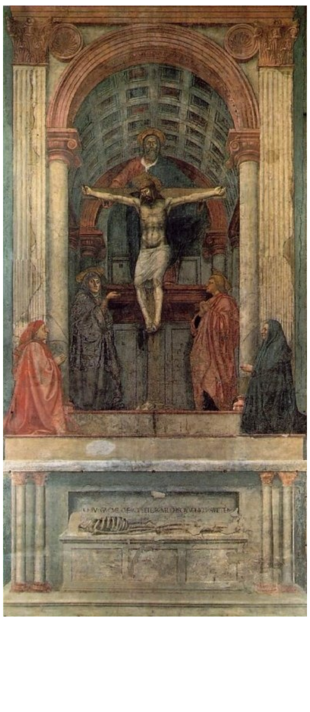
Para dibujar fácilmente una perspectiva verosímil, se aconseja empezar siempre por dibujar el espacio, antes que los objetos, mediante una caja en disposición frontal, que podrá servir luego, con su métrica, de substrato y de guía para cualquier representación más compleja que se desee conseguir.

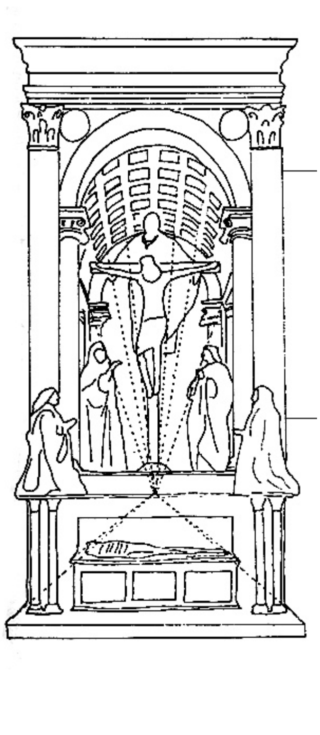
La disposición frontal permite, como en el caso de la perspectiva caballera, beneficiarse de un trazado en verdadera magnitud para la "fachada" de la caja, donde podemos fácilmente proponer una métrica verosímil y, de ahí, ubicar correctamente la línea del horizonte, a la altura del ojo. En ella, ubicaremos el punto de fuga, no en el centro, para evitar el exceso de simetría, que suele empobrecer el dibujo.

A continuación, lo más difícil consiste en determinar el escorzo: el principiante no se atreve, generalmente, a "chafar" suficientemente el tablero horizontal; se le aconseja dibujar primero un círculo escorzado, es decir: un elipse, que ayuda a imaginar con más seguridad el espacio perspectivo resultante. El elipse determina el escorzo del primer cuadrado, y los demás se deducen directamente,



Dos obras maestras de la perspectiva naciente. Con "la ciudad ideal" (arriba), creemos primero encontrarnos ante una plaza cuadrada, con una vista muy amplia; mirándolo mejor, es una plaza muy alargada, y un ángulo de vista inferior a los 60 grados que recomendaba Piero della Francesca, maestro del probable autor, Francesco Laurana. "La trinidad" (abajo) es un cuadro muy alto (más de seis metros) y, sin embargo, no se ha de mirar en contrapicado, sino con la mirada horizontal, fijando el pie de la cruz...





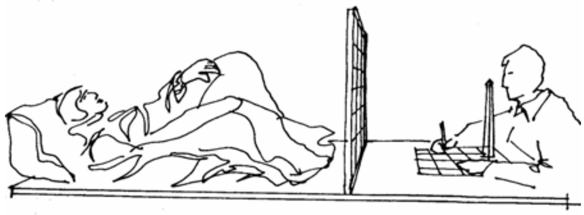
"La città ideale", ¿Laurana?; "La trinidad", Masaccio (hacia 1425).

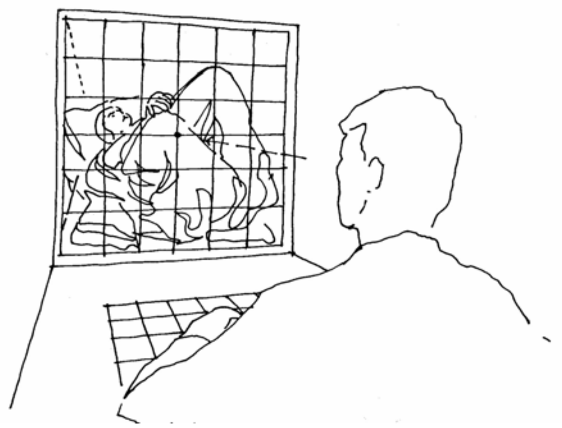
al trazar las diagonales, hasta la profundidad deseada.

Finalmente, si se dispone una segunda caja en posición oblicua dentro de la primera, conviene que uno de sus dos puntos de fuga esté fuera del marco del dibujo, para evitar que aparezca demasiado deformada.

Este método práctico de dibujo resulta, para nosotros, particularmente instructivo: resalta los cuatro esquemas visuales más importantes: la línea del horizonte (pauta principal de la escena), las proporciones (manifestadas en la cuadrícula escorzada), las rectas (trazadas o adivinadas, en el caso de las diagonales) y el círculo (escorzado en elipse).

Los primeros perspectivistas no hicieron otra cosa: trabajaban exclusivamente con un solo punto de fuga, que permite organizar enteramente el espacio perspectivo. Es el sentido del método de Alberti y de los aparatos de Durero. En la figura, vemos como el dispositivo propuesto por Durero permite, literalmente, hacer "encajar" los objetos más complejos en el espacio perspectivo anteriormente definido, de modo que la realización de los escorzos más atrevidos se reduce a un simple trabajo de paciencia.





Las primeras grandes realizaciones pictóricas magnifican el nuevo método, en su mayor pureza: siempre consideran el caso estándar (con el cuadro vertical, de modo que las verticales de la escena permanezcan verticales en el dibujo), con un solo punto de fuga (sin disposiciones oblicuas en la escena) escondido por algún objeto próximo (para evitar los escorzos excesivos), con un ángulo de obertura inferior a 60 grados (para evitar las deformaciones excesivas).

En algunos tratados, el punto de fuga único se representa como un ojo: simétrico al ojo del espectador, parece mirarlo desde detrás del espejo. En la Trinidad de Masaccio, este punto de fuga también está a la altura del espectador, sobre el horizonte, a pesar de que la escena se despliegue hacia arriba: no es una vista en contrapicado, las verticales se mantienen. En la Ciudad Ideal, unas fuentes octogonales manifiestan su redondez, dejándose percibir los elipses de los círculos circunscritos escorzados, como en la piedra doblemente oblicuada en la Melancolía de Durero.

* * *

- El horizonte perspectivo -

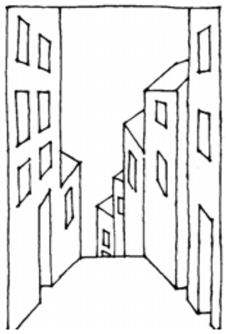
Los tratados y manuales de perspectiva mejor ilustrados presentan a menudo el mismo defecto que aquellos libros de fotografías con bellas imágenes de ciudades o paisajes: sus ilustraciones resultan agradables, pero las páginas se pasan rápidamente y, una vez cerrado el libro, sólo conservamos una impresión de vaga convicción.

Eso se debe a un comportamiento muy característico de nuestra experiencia visual, la cual suele contentarse con la interpretación más simple, siempre que garantice la coherencia de la percepción, sin siquiera preguntarse si tal interpretación corresponde o no a las condiciones más

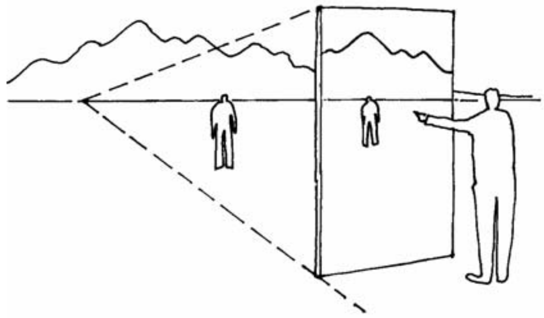
En este celebérrimo grabado, la Melancolía ostenta un compás, la rueda de molino, con su doble inclinación, está cuidadosamente escorzada, en elipse. Una piedra tallada presenta sus aristas sin direcciones principales, según lo que llamaremos las "condiciones generales" de la proyección.

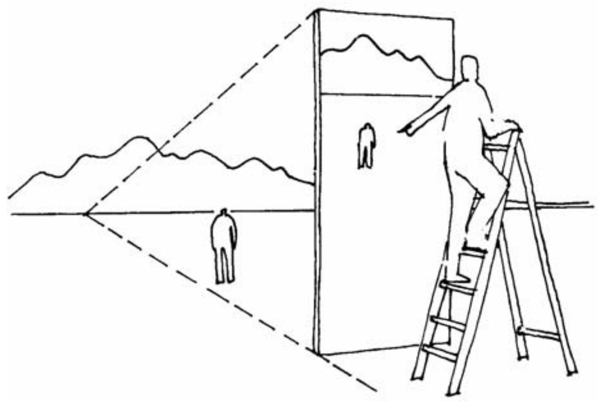
"La melancolía", Durero.

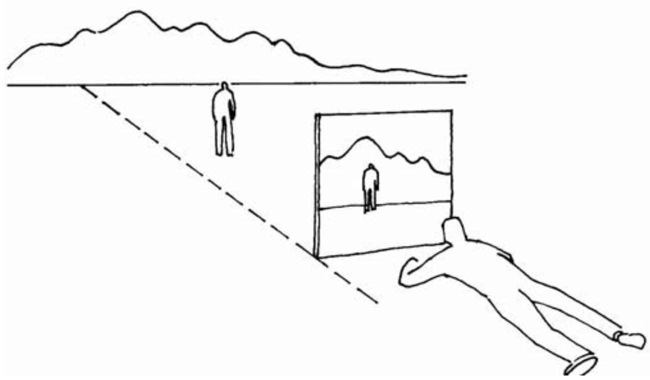
verosímiles de la escena representada. Por consiguiente, nuestra mirada ignora a menudo los trazos más originales o los eventuales errores del dibujo en perspectiva.



La vista representada en la figura sólo puede ser correcta en el caso de una densa niebla, o si se trata de un puerto donde el cielo se confunde perfectamente con el mar. En general, suponemos inconscientemente estas condiciones extraordinarias, lo cual nos impide observar que, en cualquier otro caso, el dibujo es incorrecto, porque le falta la línea del horizonte. Ahora bien, ésta sólo puede desaparecer si queda enmascarada por otros objetos (por montañas, por ejemplo), que deberían representarse. Para que los mismos edificios aquí presentes la tapen, haría falta que la mirada se halle muy inclinada, pero entonces, en la vista en picado resultante, las verticales deberían fugar en el dibujo...



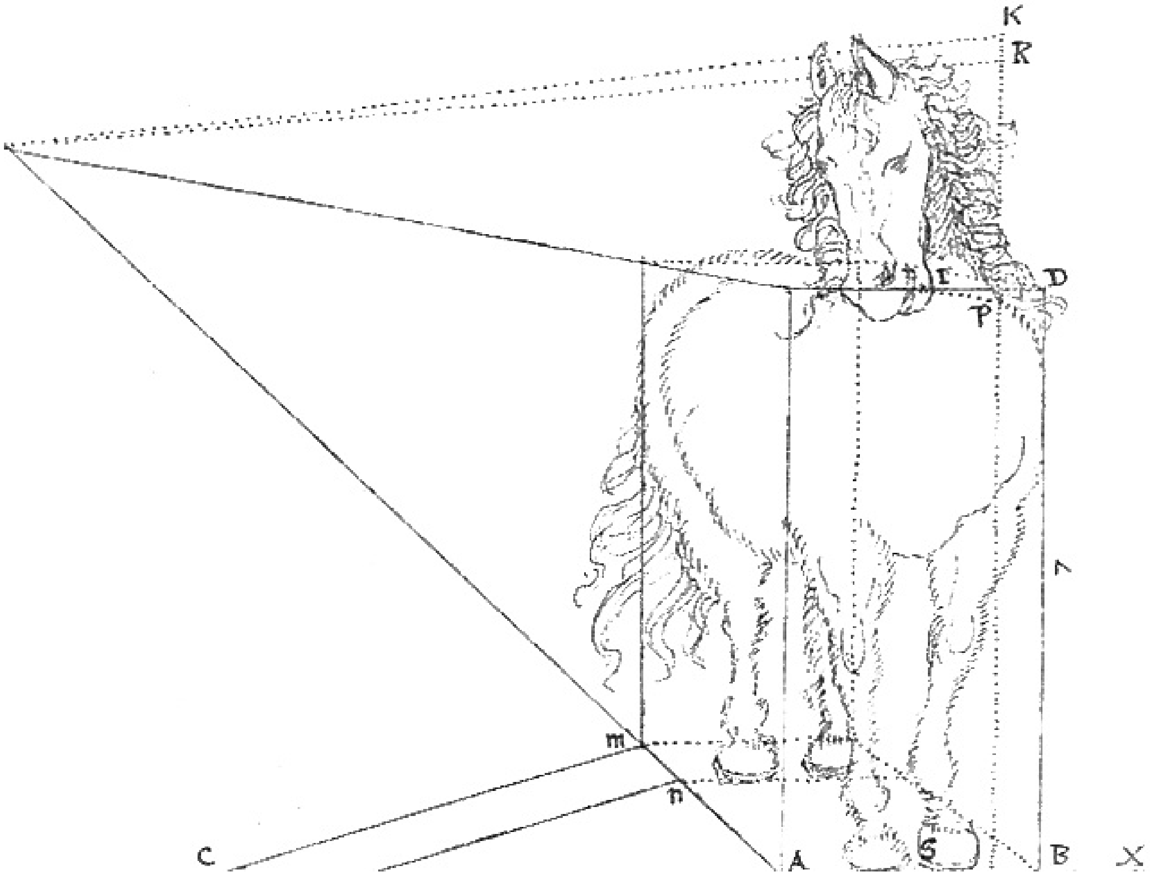




Las nociones de horizonte "secundario" o "accidental" que se encuentran a veces en los manuales son engañosas, y no corresponden a nada, ni en el aspecto geométrico, ni en el aspecto visual. En un dibujo en perspectiva, sólo hay una línea de horizonte: está definida por las condiciones estándar, y se ubica a la altura del ojo del dibujante. Es la línea de fuga de los planos horizontales. Sólo en las condiciones estándar, se identifica con la intersección del cuadro con el plano pasando por los ojos que le es perpendicular; en los demás casos, la línea así definida no tiene ningún sentido visual particular, y no debe ser confundida con el horizonte. Si el cuadro está inclinado, el horizonte ya no pasa por el centro perspectivo. Si el cuadro está girado, ya no se ve horizontal en el dibujo.

El plano de horizonte es, por definición, proyectante; separa la escena en dos partes: cualquier figura situada enteramente por encima/debajo de este plano aparece, en el dibujo, arriba/abajo de la línea de horizonte; cualquier figura que lo intercepta corta la línea de horizonte en el dibujo, cual sea su alejamiento. Todas las horizontales de la escena fugan, en el dibujo, hacia un punto del horizonte.

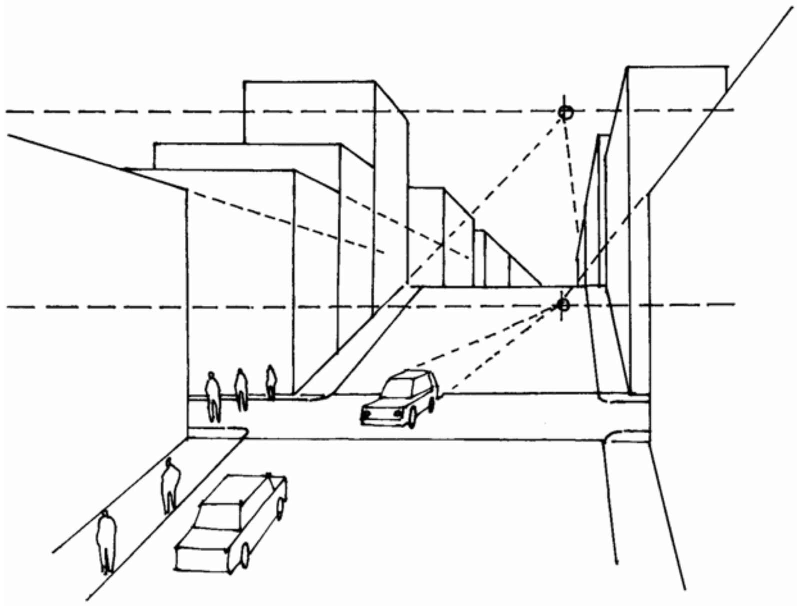
El horizonte es, por lo tanto, la referencia visual por excelencia, y desenvuelve en el dibujo un papel parecido al diapasón de las frecuencias musicales, al blanco de una escena coloreada.



“En muchos lugares avemos dicho que entre las demas ffiguras lineales la que en la prespectiva allana todas las difficultades es el quadrado ssin el qual no sse puede dar passo en la prespectiva porque mas conprehenssible que ninguna otra ffigura por su ffaçilidad y buena conpussicion y de aqui es que qualquiera ssuperffiçie o cuerpo se ffabrica dentro de un quadrado con mayor ssiguridad y çerteça que en otra ffigura lo qual en las otras no puede suceder como sse conoçera en el presente exemplo el qual es un cavallo mostrado en escorço por los pechos de manera que sse le ven dos lados el ffrontero y el que escorça.”

Texto y dibujo: Antonio de Torreblanca (“Los dos libros de geometría y perspectiva práctica”, 1616-1619, ms Real Academia de Bellas Artes de San Fernando fol. 83v). Nb: “cuadrado” se ha de entender aquí como “rectángulo”.

En el dibujo como en la realidad, el ojo percibe muy bien la fuga de las paralelas, en la cual se funda su sensación del alejamiento. Sin embargo, el punto de fuga, él, no es parte de la experiencia visual común. Prueba de ello es que hábiles pintores como los mal llamados "primitivos" toscanos, activos antes del descubrimiento de la "construcción legítima" hacían fugar las líneas, pero sin precisión, sin que se reuniesen exactamente en un punto. En cuanto a las líneas de fuga de los planos paralelos, resultan aún menos perceptibles. El horizonte es, en mi opinión, la única línea de fuga que pertenece verdaderamente a la experiencia visual común.



En la figura, las dimensiones de los personajes ubicados en la parte ascendente de la calle están determinadas por su distancia a la línea de fuga del plano inclinado, mientras que las de los peatones situados en el rellano están en relación con el horizonte.

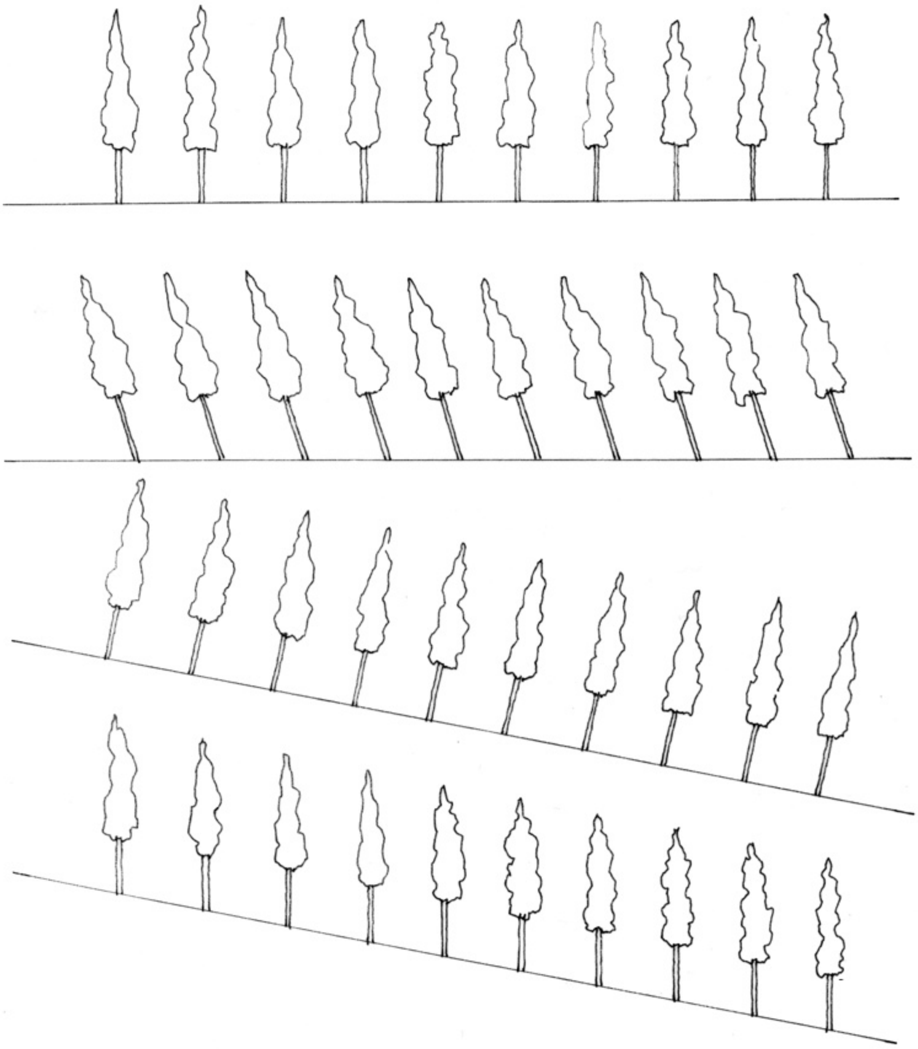
El ojo comprueba que todos los objetos de la escena fugan correctamente, y su constante búsqueda de la horizontalidad le hace percibir la altura del horizonte, aunque su línea no se manifieste en la escena. Pero el papel visual de la otra línea de fuga dista mucho de ser tan relevante. Para el dibujante, es cierto, tiene la misma función constructiva que la línea de horizonte, razón por la cual se la suele llamar "horizonte secundario". ¿Y qué nombre deberá llevar entonces cuando deje de ser horizontal, porque el plano a que se refiere presente una doble inclinación? Lo cierto es que muchos manuales de perspectiva presentan errores en la fuga de objetos o personajes ubicados, por ejemplo, sobre un techo inclinado visto en posición oblicua, porque la sola experiencia visual no lleva el dibujante a la solución acertada...

* * *

- La coherencia perspectiva -

La práctica perspectiva, basada en la percepción visual, se separa de la teoría proyectiva, basada en el pensamiento geométrico puro, por la introducción de una dirección privilegiada - la vertical - y de un cuadro con dimensiones reducidas - limitado por un marco -, que nos conduce directamente a la situación habitual del dibujo en perspectiva: una representación sobre un soporte plano rectangular, donde las relaciones arriba/abajo e izquierda/derecha implicadas por el mismo soporte se completan, gracias a la ilusión perspectiva, por la sugestión de una relación delante/detrás.

Desde un punto de vista geométrico, tales consideraciones no interfieren en nada con las propiedades de la proyección central (puntos y líneas de fuga): podríamos luego imaginar que el dibujo de una configuración geométrica (por ejemplo: un problema planteado como en los "Elementos" de Euclides), si le añadimos un horizonte y un marco, se irá definiendo visualmente, manifestándose al ojo de forma cada vez más evidente, hasta presentarse como una escena visual



En esta figura, reconocemos, sucesivamente: 1° una alameda; 2° la misma, sometida a un fuerte viento; 3° un dibujo visualmente incomprensible; 4° una hilera de álamos a flanco de monte. No vemos enseguida que los dos últimos dibujos son los mismos que los dos primeros, girados. En efecto, nos es más natural mantener siempre el horizonte horizontal, según la "situación estándar" de la perspectiva.

"El horizonte mantenido", el autor y Gustavo Contepomi.

corriente, inmediatamente comprensible... Pero no es así. Existe una ruptura entre el espíritu puramente geométrico y el espíritu puramente visual, que se ejerce a nivel del juicio que la mirada establece sobre las imágenes, el cual cambia bruscamente de criterio y de referencia al pasar, según la terminología aquí propuesta, de las "condiciones generales" a las "condiciones estándar".

Según el espíritu geométrico, la situación de referencia es siempre la más arbitraria. Así, la geometría considera los triángulos rectángulos o isósceles como excepciones, subconjuntos de la familia de los triángulos cualquiera. En un dibujo geométrico, damos a menudo al primer trazo la dirección más arbitraria posible, para mostrar que cualquier otra elección sería igualmente acertada, siempre que se eviten los casos particulares.

La experiencia visual procede de otro modo, relacionándose siempre con la situación más habitual, la cual es, al principio, pero sólo al principio, la más ordenada. Así, la mirada horizontal considera en su configuración más natural los objetos sometidos a la misma fuerza de gravedad que su observador. Sin embargo, el "caso estándar" resultante se aleja a menudo de "la estructura geométrica más simple de la escena" que lo justifica inicialmente. Un ejemplo: ante un monte boscoso cuyos árboles han sido inclinados todos ellos en la misma dirección por un viento dominante, resultaría vano inclinar la mirada para buscar una percepción simplificada. Al contrario, mantenemos la cabeza firme, y percibimos que *todos los árboles* están desviados con respecto a la dirección "normal", incluso si esta dirección y su conyugada horizontal son totalmente ausentes de la escena observada...

Esta observación ilustra la diferencia entre el pensamiento geométrico y el pensamiento visual. El primero se guía por un anhelo de generalidad, mientras que nuestra mirada está sometida a un imperativo de coherencia singular, el de reunir las escenas sucesivas que se presentan a nosotros. Se trata menos de asegurar la unidad del espacio que la de nuestra experiencia, y esta coherencia de la mirada no implica necesariamente una coherencia del espacio sensible, por lo menos en un sentido estrictamente geométrico. La cuestión se resume pues en saber cómo calificar las referencias fundamentales del espacio sensible y, en particular, qué relación este espacio mantiene con el espacio geométrico.

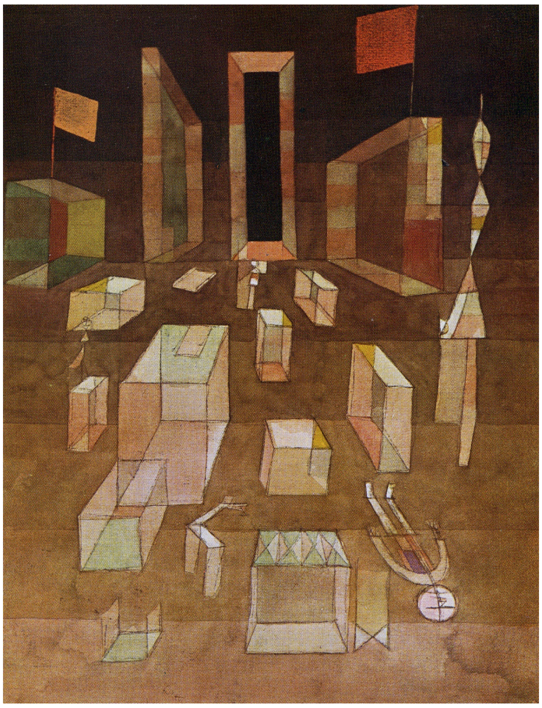
Esta es la cuestión fundamental de la geometría sensible, es decir: de la geometría condicionada por la percepción, aquí limitada a lo que llamaremos la *geometría visual*: es decir, la geometría condicionada por nuestra percepción visual del espacio tridimensional.

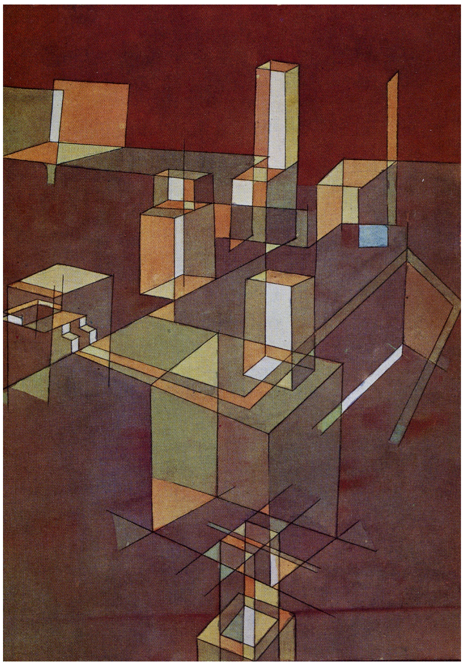
Sabemos que el ojo construye su percepción del espacio a partir de esquemas elementales, y hemos intuido que estos se resumen, esencialmente, a cuatro: rectas, círculos, proporciones y horizonte. Podríamos añadir otros, que enriquecen la escena y su percepción, como la temperatura de color, la iluminación o las sombras, pero sabemos que, con los cuatro primeros solamente, podemos modelizar muy eficazmente la mirada, como lo hacen los dibujantes. Deducimos, pues, que a estos cuatro esquemas elementales corresponden tantas propiedades del *modelo propio*, es decir del ojo considerado como un modelo.

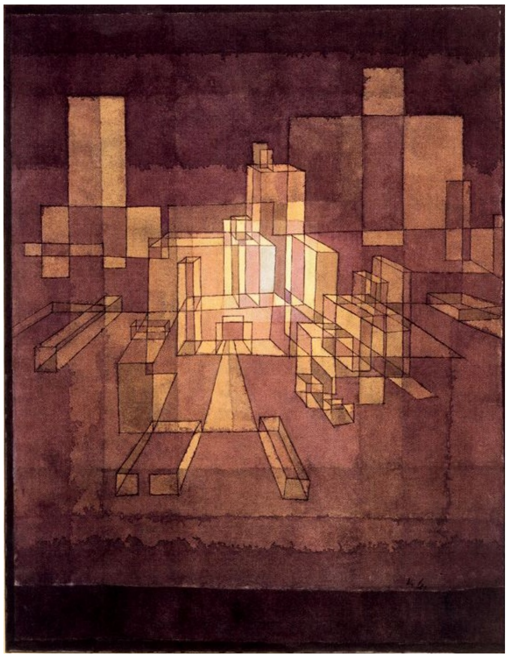
El esquema circular corresponde, indudablemente, a la propiedad de *redondez*, cuya considerable importancia visual aparece claramente en los dibujos infantiles, y en las manifestaciones más antiguas de las artes gráficas.

El esquema rectilíneo corresponde a la propiedad de *alineación*, y es muy revelador al respecto el que Platón definiera, muy visualmente, la recta como una serie de puntos alineados.

En las formas elípticas y fugadas, interrumpidas y enmascaradas que nos presentan las escenas más complejas, el modelo propio identifica inmediatamente lo redondo y lo alineado, y es capaz de distinguir, con asombrosa precisión, los menores defectos de circularidad o de rectitud en los objetos, separándolos sin confusión de las considerables deformaciones debidas al escorzo.



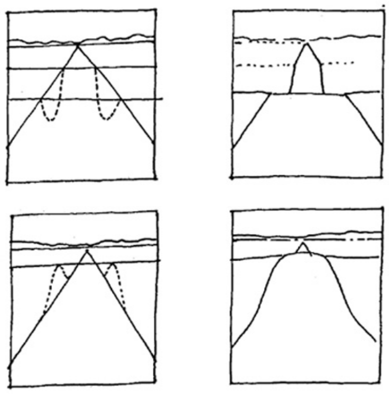




Paul Klee juega con las leyes de la perspectiva, de forma más o menos estricta. Y lo que nos permite entender los juegos de Paul Klee, es nuestra experiencia visual de la perspectiva, precisamente: el que nuestra mirada se haya sometido a las leyes de la perspectiva central.

“Incompuesto en el espacio”, “Parte de G”, “Ciudad italiana” y “Perspectiva urbana”, Paul Klee.

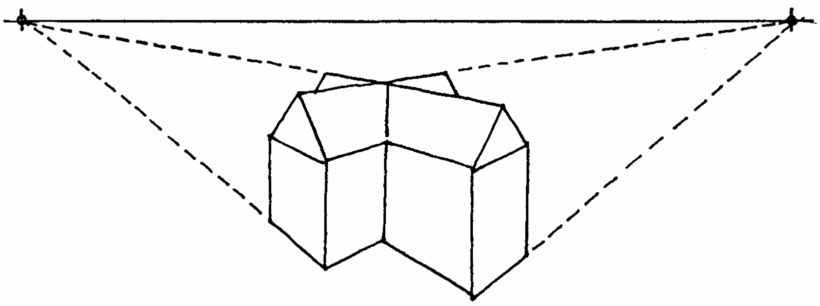
Si describiéramos geométricamente los dibujos de la derecha a un ciego de nacimiento, le asombraría aprender que los videntes distinguen inmediatamente en tales imágenes, llenas de rupturas topológicas y de deformaciones, un camino *recto* que se aleja al infinito...



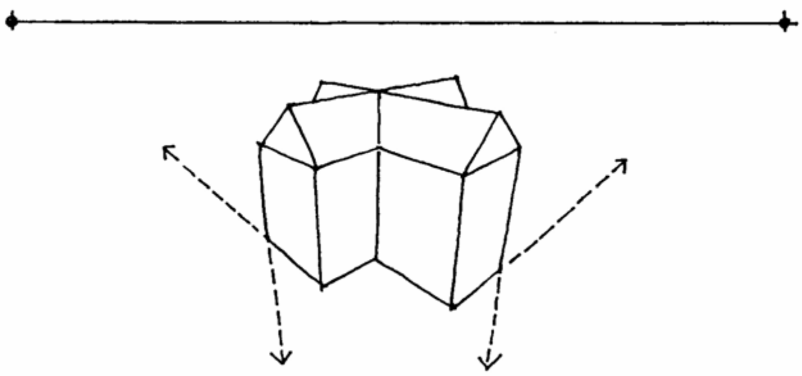
En cuanto a los esquemas de la proporción y del horizonte, ejercen sobre el modelo propio una acción conjunta e inseparable, porque el horizonte actúa como referencia para las proporciones, las cuales, en su escorzo, lo van definiendo.

Sin embargo, esta acción desemboca en dos propiedades del modelo propio fundamentales, y bien distintas. La primera es la de *regularidad*, que corresponde a la notable capacidad visual de percibir en la escena los ritmos y repeticiones, con la misma asombrosa precisión que pone el ojo en detectar las alineaciones.

Para concebir la cuarta propiedad, que funda la condición estándar como referencia temporal, hay que ponerse en movimiento. Imaginemos una persona recorriendo la ciudad con la mirada bien erguida, lo cual no le impide, por ejemplo, subir unas escaleras y asomarse a la ventana. Distingue entonces un edificio más bajo como en la figura:



Ciertamente, esta vista no es la más habitual, porque el observador tenderá naturalmente a inclinar la cabeza, para emplazar el edificio en medio de la escena:



Entonces, las verticales fugan. Sin embargo, la vista en picado así obtenida es directamente referida por la experiencia visual a la vista anterior: prueba de ello es que la mayoría de nosotros, frente a lo que Jean Pélerin, en su tratado de 1505, llamaba la "perspectiva cornuda"

Las gradaciones del color (en particular, aquí: en el contraste de calidad) pueden ser suficientes para sugerir la profundidad en el dibujo. Basta que el ojo perciba un gradiente. Y este gradiente, como en la imagen de arriba, además del relieve, puede sugerir también la velocidad.

“Lluvia, vapor y velocidad” y “Mañana despuése del diluvio”, William Turner.

(debido a la forma aparente de los dos haces de fuga), consideramos esta representación como perfectamente normal, cuando resulta ser, al contrario, extremadamente improbable. En efecto, para percibirla correctamente, haría falta clavar la mirada en el horizonte y dejar el edificio dibujarse en la parte inferior de la mirada.

Este ejemplo muy antiguo (Pélerin fue el primer perspectivista en estudiar detenidamente los puntos de fuga de manera moderna) ilustra maravillosamente la sutileza del concepto de "condición estándar": no es necesario que la situación de referencia pertenezca a la secuencia de las imágenes que a ella se vinculan, y de las cuales ella asegura sin embargo la coherencia...

Digo, pues, que la situación estándar asegura la coherencia temporal de una escena que siempre miramos con el ojo en movimiento. Esta situación se consigue irguiendo la cabeza, es decir: clavando la mirada en el horizonte. Un poco como cuando, al abrir los ojos tras despertar, buscamos enseguida unas marcas visuales, para poner en funcionamiento el sentido despertado que nos acompañará a lo largo del día. Justo antes de ello, estábamos inmersos en un espacio puramente auditivo, los ruidos reales nos sacaban poco a poco del mundo de los sueños, pero flotábamos aún en un espacio que el ojo no reconoce, donde las distancias y direcciones son muy distintas. A partir de unos pocos indicios, - un estante, una pared, un techo o el marco de una ventana, la mirada, aún borrosa, empieza sin embargo a imponer su orden. El oído, vencido, se retrae poco a poco en misiones secundarias de comunicaciones y advertencias: deja el espacio visual advenir y el ojo hacerse con las riendas.

Una vez ubicado el horizonte (aunque no se vea), advienen las verticales, las oblicuidades de la profundidad, las fugas del alejamiento, y el ángulo recto afirma su presencia. Tales esquemas, secundarios, refuerzan la coherencia temporal, y podemos ahora imprimir a la mirada los más bruscos movimientos, sin miedo de perder el equilibrio, sin arriesgar perder nuestra posición y presencia en el espacio que, en cada mirada, el ojo va conquistando para afianzarnos en su dominio...

El modelo propio se funda en cuatro propiedades: alineación, redondez, regularidad y coherencia temporal.

Un modo de representación que pudiera preservarlas sería visualmente perfecto.

Los tres invariantes de la proyección central sobre el plano (alineación, relación anarmónica y conservación de las cónicas) le otorgan, precisamente, este favor.

Origen de las ilustraciones

p.128 iz. - Axonometría, A. Choisy ("Art de bâtir chez les romains", 1873), *in* "Ombres et Lumières", Jean-Paul Jungmann, Les éditions de La Villette, Paris, 1995.
- "Vinegrape", K. Wachsmann (1995), *in* "Ombres et Lumières", Jean-Paul Jungmann, Les éditions de La Villette, Paris, 1995.

p.129 iz.: - Composición fotográfica de David Hockney, *in* "Camera works", David Hockney.
- Dos espejos convexos, detalles de pinturas de Robert Campin (1438) y Jan van Eyck ("Los esposos Arnolfini", 1434), *in* "El conocimiento secreto", David Hockney, Ed. Destino, Barcelona, 2001.

p.130 iz. - Concurso del ministerio de la industria pesada, I. Leonidov (1933), *in* "Ombres et Lumières", Jean-Paul Jungmann, Les éditions de La Villette, Paris, 1995.
- "El rascacielos Chanin", H. Ferris, *in* "Ombres et Lumières", Jean-Paul Jungmann, Les éditions de La Villette, Paris, 1995.
- "Proyecto Aeropolis", *in* "Ombres et Lumières", Jean-Paul Jungmann, Les éditions de La Villette, Paris, 1995.

p.131 iz. - "La città ideale", atr. A Francesco Laurana, *in* "El origen de la perspectiva", Hubert Damisch, 1987, Alianza Editorial, Madrid, 1997.
- "La trinidad", Masaccio (hacia 1425-1428), fresco, 667 x 317 cm, Santa Maria Novella (Florencia), *in* "El arte en la Italia del Renacimiento", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 1994.

p.132 iz. - "La melancolía", Durero, *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

p.133 iz. - "Caballo escorzado", Antonio de Torreblanca ("Los dos libros de geometría y perspectiva práctica", 1616-1619), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

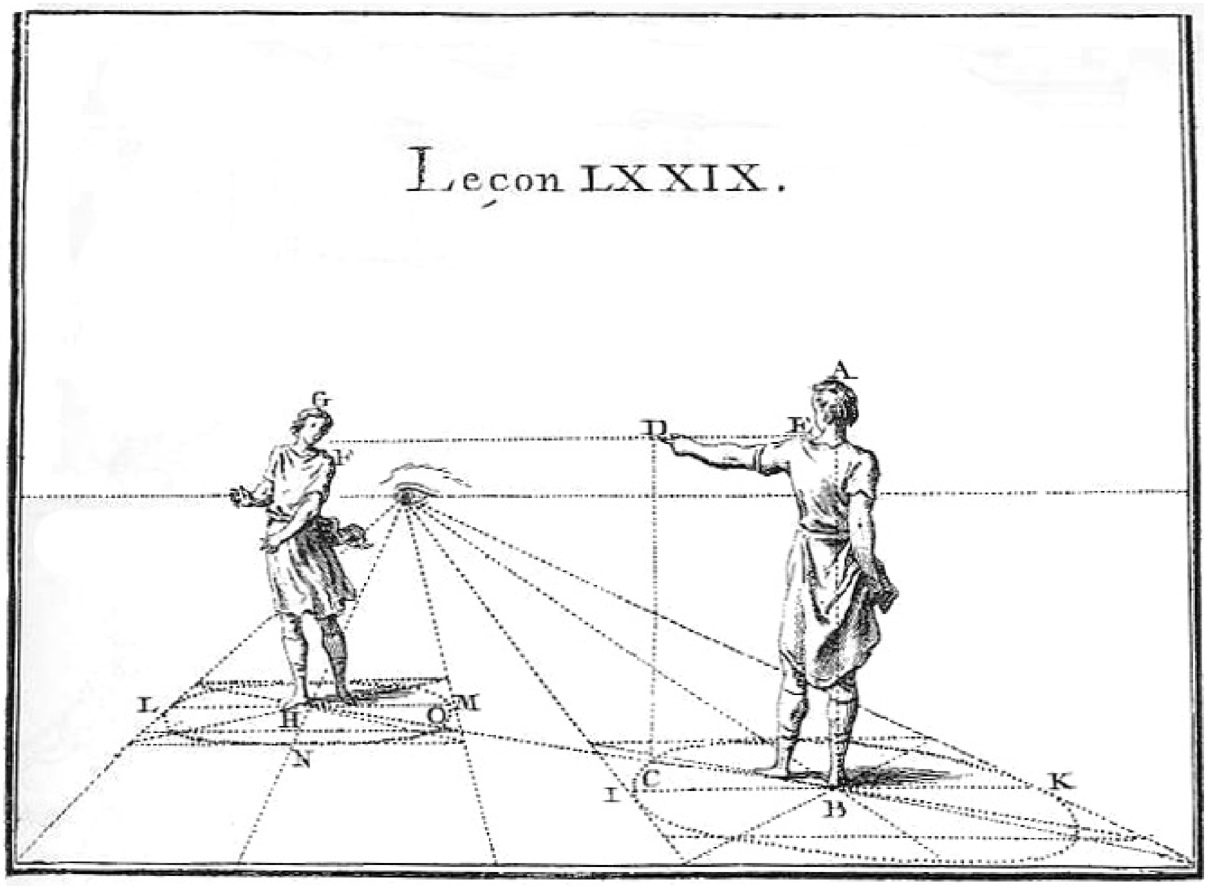
p.134 iz. - "El horizonte mantenido", dibujo propio, realización gráfica: Gustavo Contepomi.

p.135 iz. - "Incompuesto en el espacio", Paul Klee (1929), acuarela y dibujo con pluma, Belp, colección privada, *in* "Paul Klee", éditions Albert SKIRA, Suisse, 1960.
- "Parte de G", Paul Klee (1927), 32.5 x 24 cm, The Berggruen Collection Staatliche Museen zu Berlin, *in* http://pintura.aut.org.
- "Ciudad italiana", Paul Klee (1928), *in* "Il paese fertile", Pierre Boulez, Leonardo Editore, 1989.
- "Perspectiva urbana", Paul Klee (1928), 43.5 x 34.5 cm colección privada, Alemania, *in* http://pintura.aut.org.

p.136 iz. - "Lluvia, vapor y velocidad" (ó: "The Great Western Railway"), Joseph Mallord William Turner (1844), óleo sobre lienzo, 91 x 122 cm, National Gallery, Londres, *in* "Neoclasicismo y romanticismo", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 2000.
- "Mañana despuése del diluvio", Joseph Mallord William Turner (hacia 1843), óleo sobre lienzo, 78.5 x 78.5 cm, Tate Gallery, Londres, *in* "Neoclasicismo y romanticismo", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 2000.

- 16 -

Los invariantes perspectivos



En este dibujo que plantea el problema sutil de la relación entre personajes dibujados, el punto perspectivo aparece como un ojo, hacia el cual fugan las horizontales perpendiculares al cuadro, como si de un espejo se tratase...

“Escorzo de dos figuras relacionadas”, Edmé-Sébastien Jeaurat (1750).

16. Los invariantes perspectivos

La calidad particular de la perspectiva central sobre el plano, su fuerza de convicción y su eficacia descriptiva, se explican por el hecho de que los principales esquemas elementales sobre los cuales se funda nuestra experiencia visual sufren, en esta forma de proyección, las mismas deformaciones que padecen en el modelo propio.

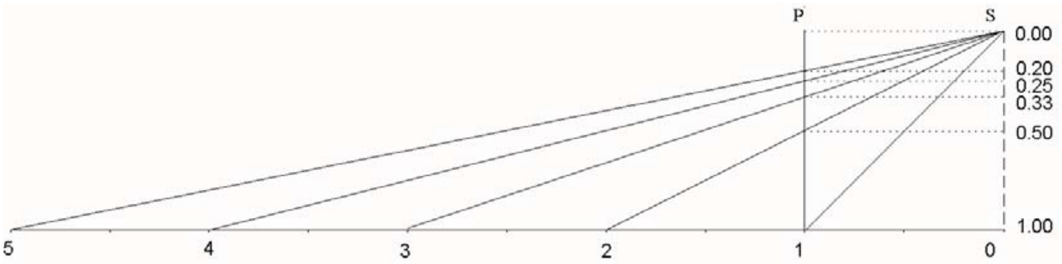
Gracias a sus tres invariantes (alineación, relación anarmónica y conservación de las cónicas), esta forma de representación conserva las cuatro propiedades fundamentales que caracterizan la mirada: la alineación, la redondez, la regularidad y la coherencia.

El primer invariante, es que la imagen de una recta es también una recta. Sin embargo, a menos que la recta esté en posición frontal, las posiciones relativas de sus puntos se ven afectadas por la proyección: la perspectiva central, como el ojo, *escorza* las distancias en profundidad, y hace ver convergentes las paralelas no frontales. Pero esta *degradación* - como la llamaba Piero della Francesca - obedece a una ley, que estructura las proporciones escorzadas, de modo que el ojo las identifica inmediatamente, tanto ante una escena real como ante su imagen.

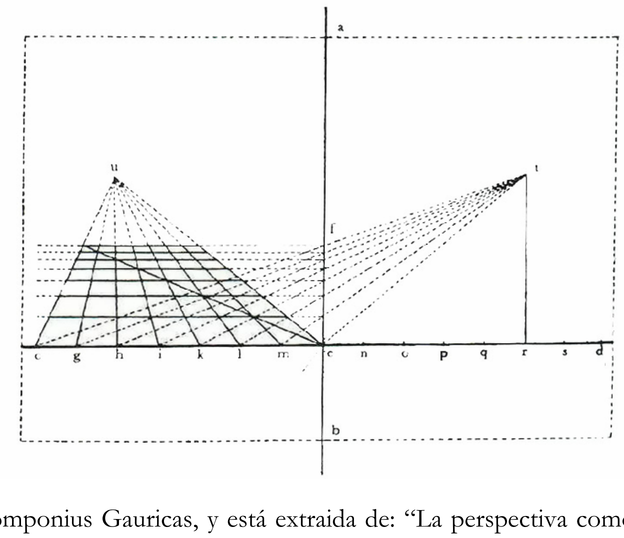
- La regularidad -

Estudiaremos primero las transformaciones que padece un tablero de malla regular en su proyección: ese fue, de hecho, el tema predilecto de los primeros perspectivistas renacentistas.

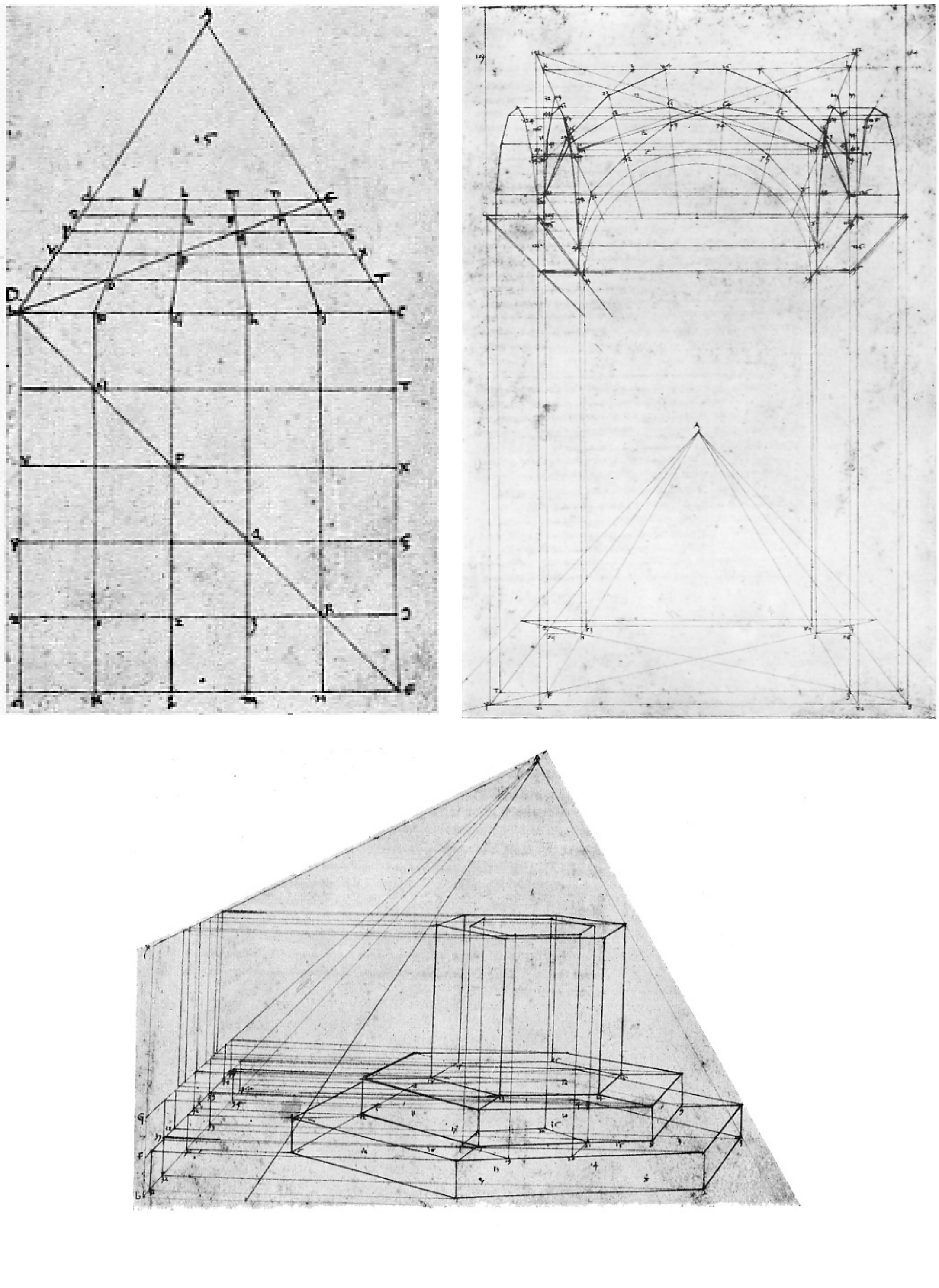
Empezaremos por representar la imagen de unos puntos alineados en progresión aritmética sobre una recta perpendicular al cuadro. Los puntos están situados a las siguientes distancias del plano desvanecente: 1 m (sobre el cuadro), 2 m, 3m, 4m,… Sus imágenes se ubican a las siguientes distancias del punto perspectivo P: 1 m, 1/2 m, 1/3 m, 1/4 m,… Es decir: en progresión armónica.



A partir de esta relación, y de la triple observación de que toda vertical se proyecta verticalmente, de que toda horizontal frontal se proyecta horizontalmente, y de que las rectas perpendiculares al cuadro se proyectan como un haz de rectas que fugan hacia el mismo punto perspectivo P, podemos construir un espacio perspectivo completo. Este fue el método de la *construcción legítima* seguido por Alberti[1].



[1] La figura aquí presentada se basa en el tratado de Pomponius Gauricas, y está extraida de: "La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999, donde se afirma que "este procedimiento es objetivamente idéntico al de L. B. Alberti".



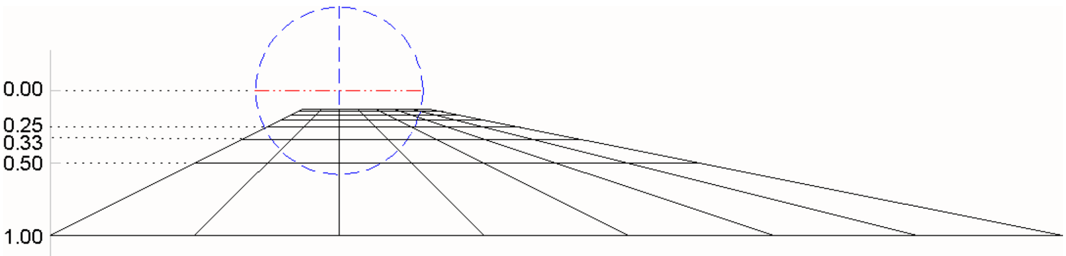
Notamos aquí, en particular, el interés que Piero della Francesca sintió por la forma hexagonal. Junto con el octógono, es una figura ideal para medir y hacer sentir el escorzo: su deformación elíptica es visualmente sensible, y no tiene la dificultad de ejecución que presentan las curvas; además, junta en un pequeño espacio tres direcciones de paralelas.

Tres esquemas de Piero della Francesca.

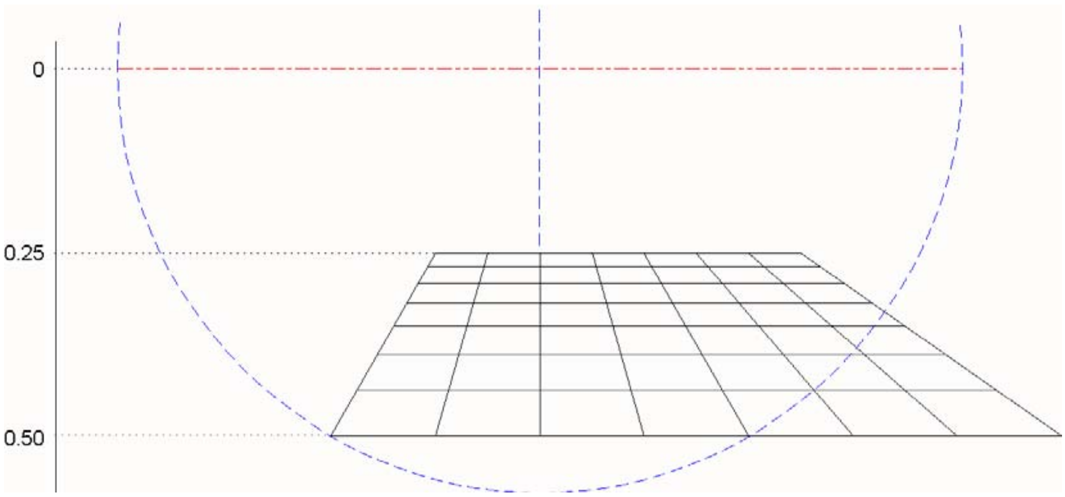
En esta construcción sencilla y eficiente, observamos que se enfatiza la relación armónica, y entendemos que el punto perspectivo se ha podido naturalmente considerar (e incluso representar) como un segundo ojo, imagen del observador.

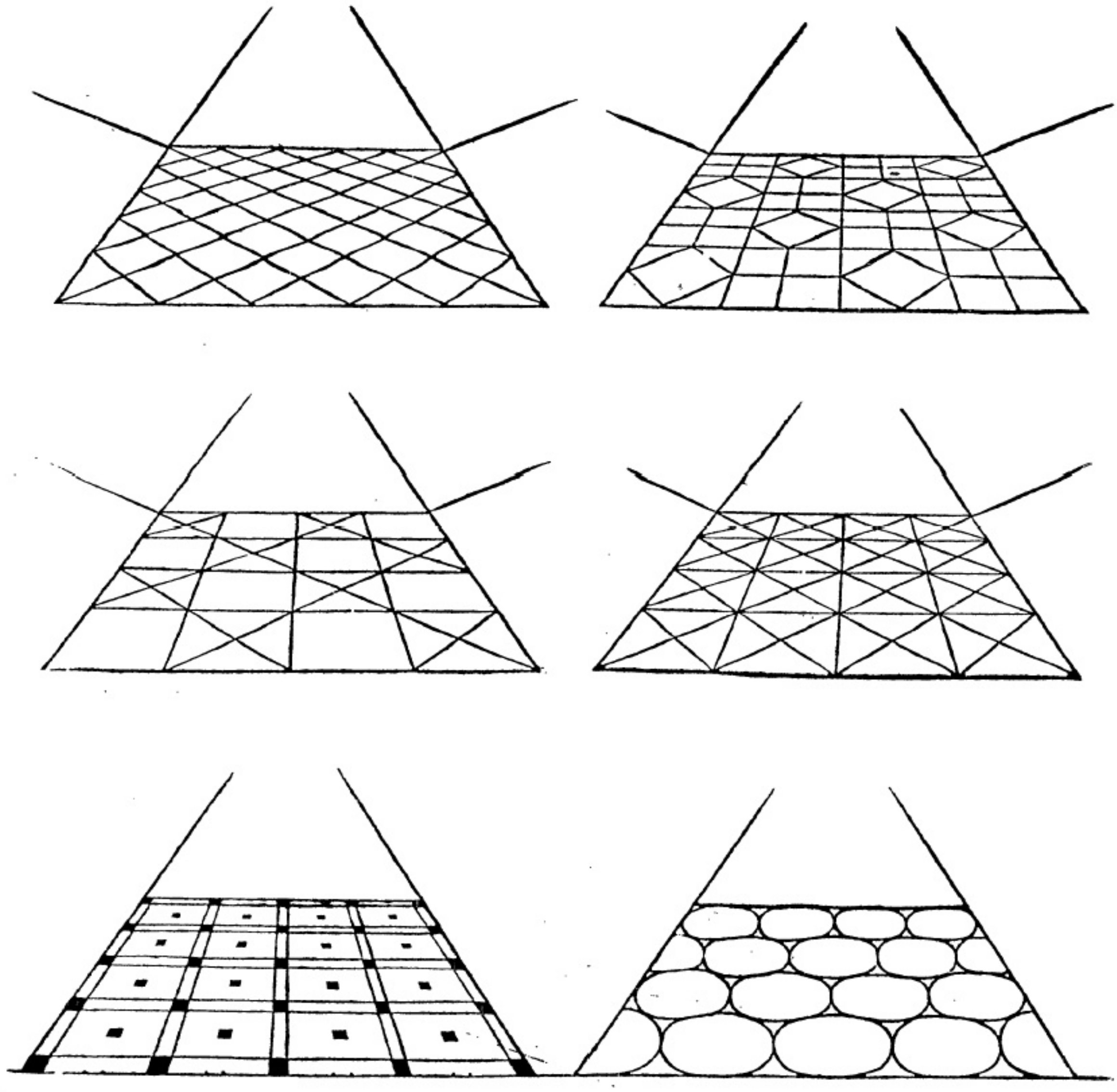
Una vez proyectada la cuadrícula horizontal, podemos fácilmente emplazar los objetos sobre ella y, en este sentido, tenemos una verdadera anticipación del sistema cartesiano de coordenadas. También podemos trazar oblicuas horizontales según direcciones establecidas sobre la malla. Observamos entonces que las paralelas horizontales fugan hacia un mismo punto, y que todas las direcciones posibles engendran una "recta del infinito", el horizonte, línea de fuga de los planos horizontales. En los manuales, tradicionalmente, se han privilegiado las direcciones de 45 grados, que engendran al infinito el *círculo de las distancias*, intercepción del cuadro plano por un cono visual de 90 grados de obertura. En las siguientes ilustraciones, sin embargo, preferiremos considerar las direcciones de 30 grados, cuyo círculo de fuga corresponde a un cono visual con una obertura de 60 grados: el límite, según Piero della Francesca, más allá del cual la imagen se deforma.

El siguiente dibujo representa la misma configuración del dibujo anterior. Cada baldosa es un cuadrado con un metro de lado, y el ojo está a un metro de altura, a un metro del tablero, de modo que las profundidades se degradan según la progresión armónica 1, 1/2, 1/3, 1 /4… El punto principal está en el centro del "círculo de Piero", trazado en azul punteado. En la imagen, a medida que nos alejamos de este círculo, comprobamos que el espacio se va cada vez más deformando: los cuadrados ya no perecen tales.



Si el ojo se eleva y se aleja del cuadro, la figura se ve menos chafada. También se ve menos deformada, a medida que vaya encajando dentro del círculo de Piero. En la siguiente ilustración, la distancia entre el ojo y el cuadro es igual a la dimensión total del tablero, y la altura del ojo a la mitad de esta dimensión. Se deduce una nueva progresión armónica, donde comprobamos que el tablero entero ocupa exactamente la mitad de la distancia que separa, en el dibujo, su arranque del horizonte.



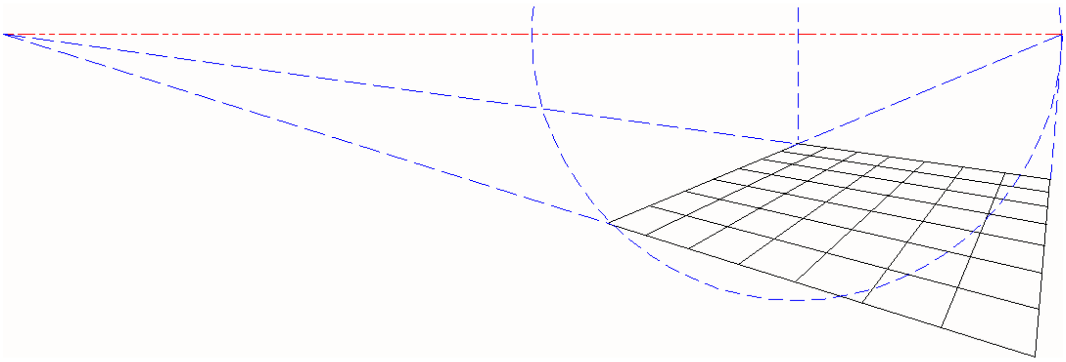


¶ Ainsi puet on et autrement /
Diuersifier pauement.

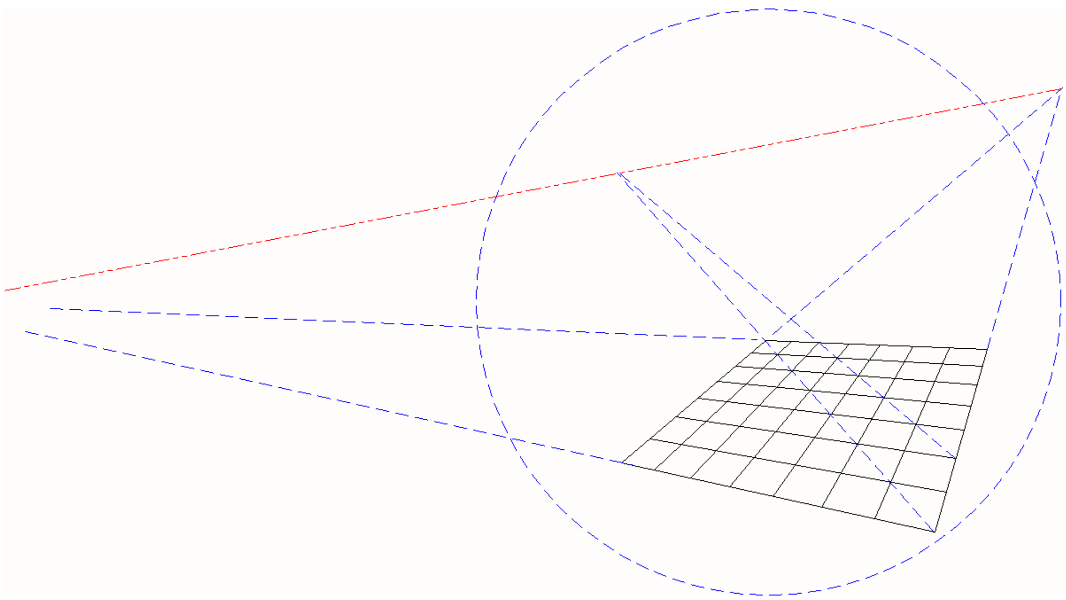
"Así podemos, y de otra manera, Diversificar los pavimentos" (Jean Pèlerin).

Página del tratado de perspectiva de Jean Pèlerin.

Si giramos el tablero de 30 grados, obtenemos la siguiente figura, donde las direcciones conyugadas de la red fugan hacia dos puntos del horizonte, produciéndose la "perspectiva cornuda" de Jean Pélerin. Viator fue, de hecho, el primer tratadista en generalizar el estudio de la construcción del espacio con dos puntos de fuga: perdemos en ello algo de profundidad, pero ganamos en expresividad, por romper un poco más con la simetría. Podemos comprobar que la malla, en ambas direcciones, sigue proyectándose en progresiones armónicas.

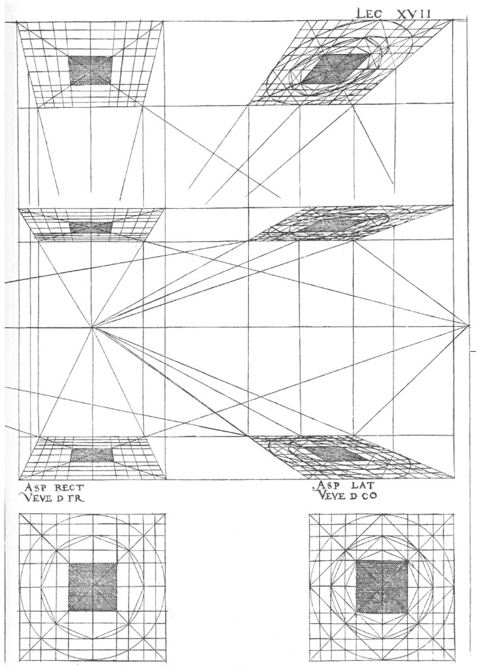


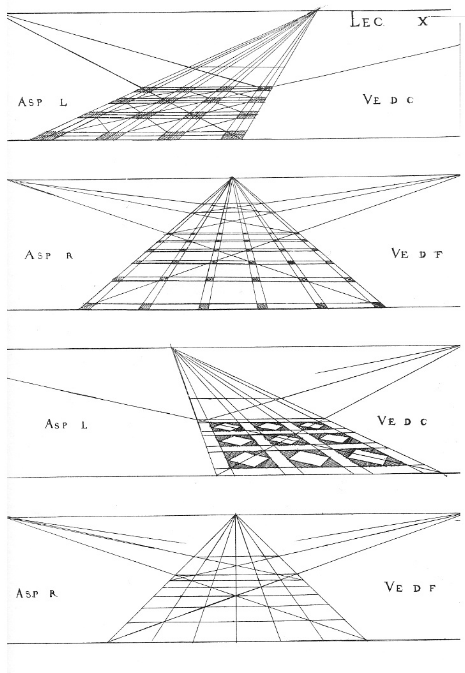
Si ubicamos el tablero en una posición cualquiera, obtenemos la siguiente figura, donde las direcciones conyugadas de la red fugan hacia dos puntos que determinan la línea de fuga para todos los planos paralelos al tablero. El punto de fuga de cualquier haz de paralelas construido sobre el tablero (o sobre un plano paralelo) se ubicará sobre esta línea oblicua, que tiene luego una gran relevancia geométrica, pero ninguna para el ojo: hemos dejado las condiciones estándar de la mirada para las condiciones generales de la abstracción geométrica. Sin embargo, podemos comprobar que la malla, en ambas direcciones, sigue aún proyectándose en progresiones armónicas.

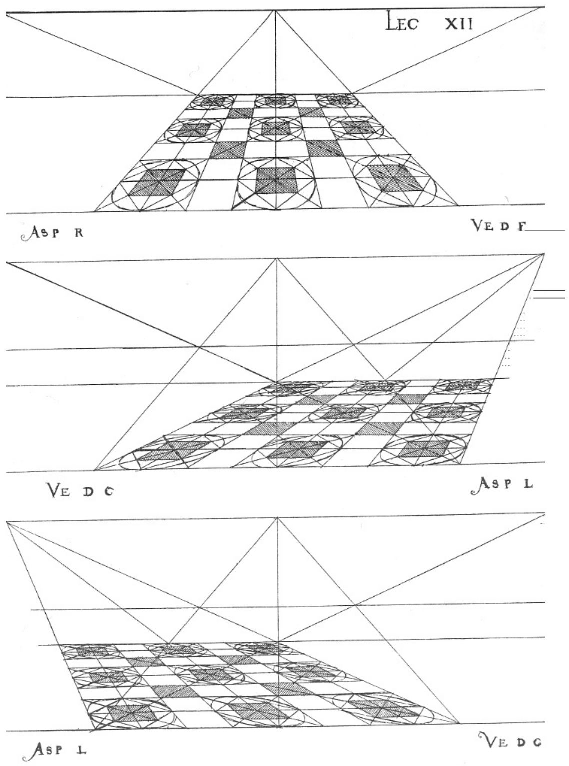


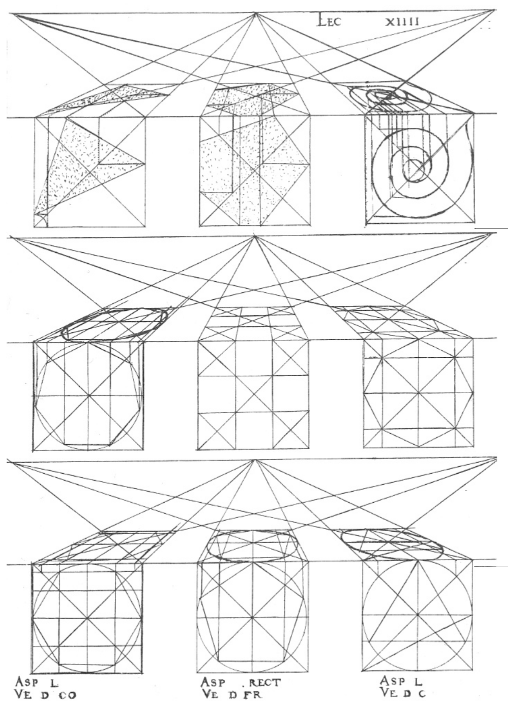
Podemos luego intuir que una malla plana de estructura regular generará siempre, en su proyección, degradaciones en progresión armónica, cual sea el emplazamiento del punto de vista y la orientación del cuadro. Esta propiedad puede demostrarse fácilmente.

Demostraremos, pues, que *la imagen de una progresión aritmética es une progresión armónica*.





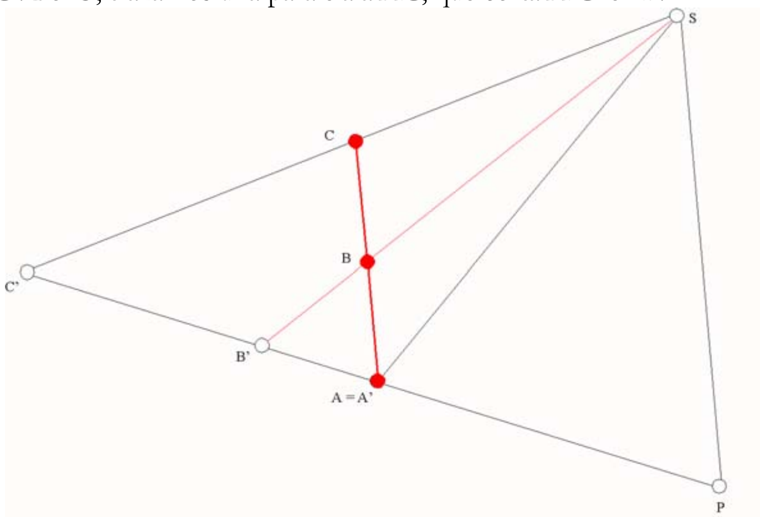




Todos los primeros perspectivistas dedicaron especial atención hacia los pavimentos, estructuras regulares que les permitían definir el espacio dibujado.

Dibujos del tratado de perspectiva de Du Cerceau

Sean 3 puntos equidistantes *A*, *B* y *C*, que proyectamos a partir de un punto cualquiera *S* sobre una recta cualquiera *d*. Las imágenes de los puntos se encuentran en cierta proporción, que se mantendrá igual sobre cualquier paralela a *d*, por homotecia. Luego, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la recta *d* pasa por el punto *A*, de modo que las imágenes de *A*, *B* y *C* se ubican, como en la siguiente figura, en *A' = A*, *B'* y *C'*. Por *S*, trazamos una paralela a *AC*, que corta *A'C'* en *P*.



Para demostrar que la proyección central transforma toda progresión aritmética en una progresión armónica, basta demostrar que, si *A*, *B* y *C* están en progresión aritmética, es decir: si *AB = BC*, entonces la distancia *PB'* es el promedio armónico de las distancias *PA*' y *PC'*.

Como los triángulos C'PS y C'AC son semejantes:

C'P / C'A = PS / AC

Como los triángulos B'PS y B'AB son semejantes:

B'A / B'P = AB / PS

Multiplicando miembro por miembro, se obtiene:

(B'A/B'P) * (C'P/C'A) = AB / AC = 1 / 2

B'P * C'A = 2 B'A * C'P

B'P * AP = - B'P * C'P + 2 AP * C'P

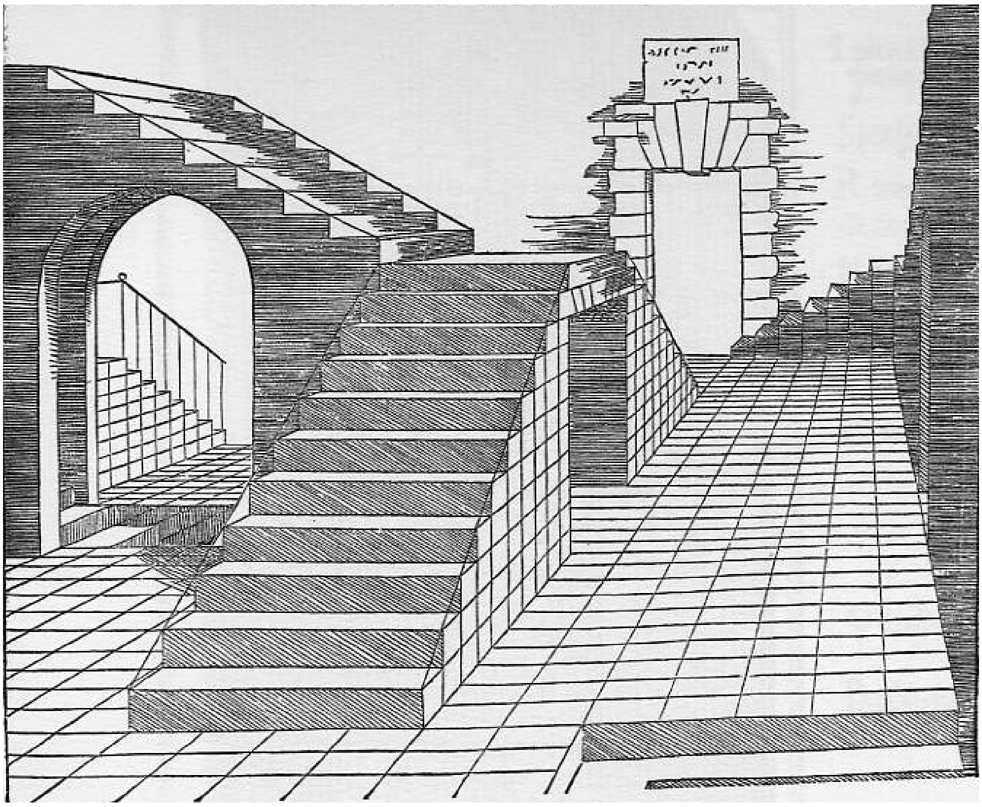
B'P (AP + C'P) = 2 AP * C'P

1 / B'P = 1/2 (1 / C'P + 1 / AP) Q.E.D.

Todo lo que presenta regularidad métrica en la escena genera, por lo tanto, relaciones armónicas en la perspectiva. Por ello, las progresiones armónicas nos parecen tan equilibradas y merecedoras de su nombre: son la representación perspectiva de toda hilada que se aleja del ojo con un ritmo constante. Los griegos, sin saberlo, lo habían sentido: la mediedad armónica es la figuración geométrica de la propiedad de regularidad que atribuimos al modelo propio, y si ellos lo sintieron sin pasar por la perspectiva central, podemos sin riesgo concluir que:

La relación armónica es la figura visual de la regularidad

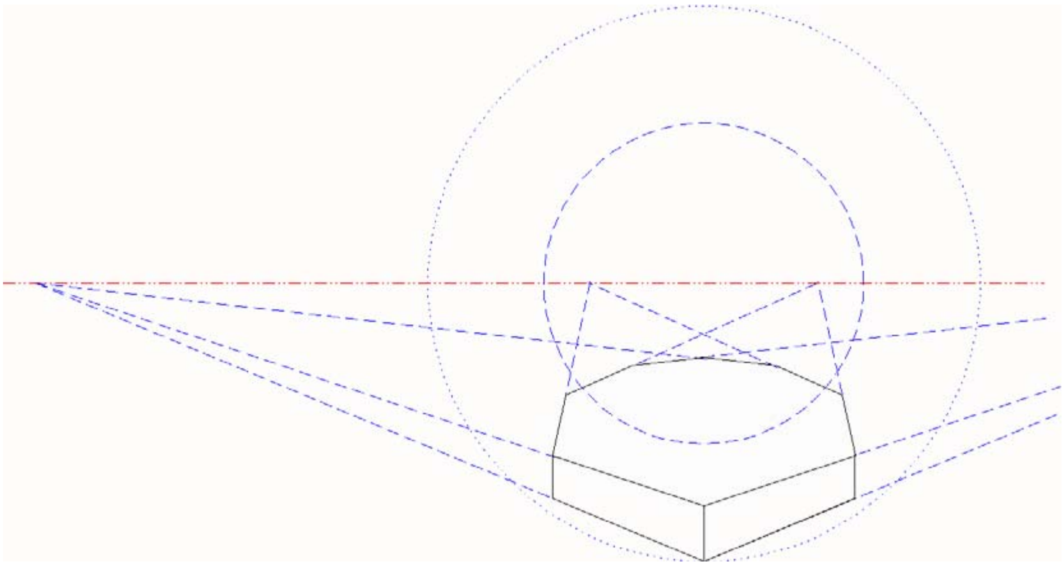
* * *



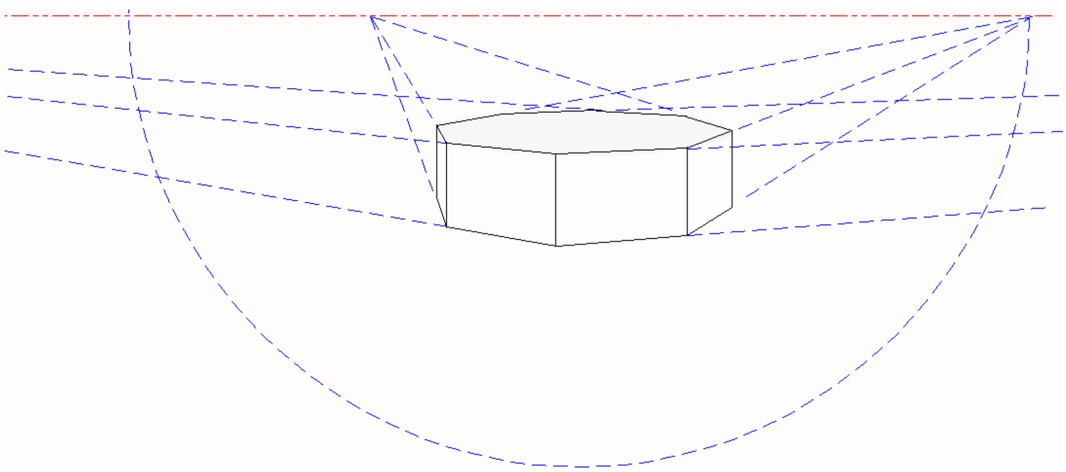
La cuadrícula del suelo puede llevarse en el plano vertical, formándose una caja, una estructuración completa del espacio dibujado. A partir de ello, construir una escalera es un juego de niños. Si la escalera es helicoidal, es un juego de paciencia. No hay mayor dificultad.

Escaleras, Sebastiano Serlio (1545).

El círculo puede ser aproximado por un polígono regular, inscrito en él o circunscrito a él. A partir del hexágono, la aproximación es visualmente satisfactoria. Empezaremos por estudiar el octógono. Como se trata de una figura plana, sus lados opuestos fugan hacia puntos alineados. En la siguiente ilustración, el octógono está en posición horizontal, y sus cuatro puntos de fugas están en el horizonte. Sin embargo, el objeto está muy cerca del punto de vista, su imagen sale fuertemente del círculo de Piero, presentándonos un ángulo muy afirmado. Hemos trazado también el más clásico círculo de las distancias, que corresponde a una obertura de 90 grados, y que contiene aquí el objeto entero.

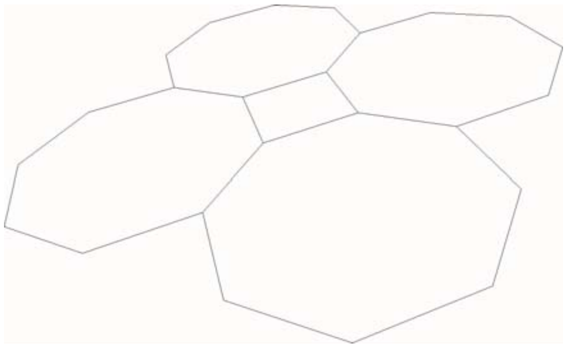


Al modificar la posición del punto de vista y la orientación del objeto, obtenemos una imagen mucho menos deformada, parecida a la de ambas fuentes octogonales en la Ciudad Ideal. Como en el famoso cuadro, observamos que el octógono superior, enteramente visible y ubicado dentro del círculo de Piero, se dibuja como un elipse. El ojo, sin embargo, identifica inmediatamente la figura de un círculo escorzado: es particularmente sensible a la redondez del objeto, a su regularidad y simetría de revolución, y el escorzo que la figura sufre objetivamente no impide su reconocimiento y simplificación esquemática como forma circular.



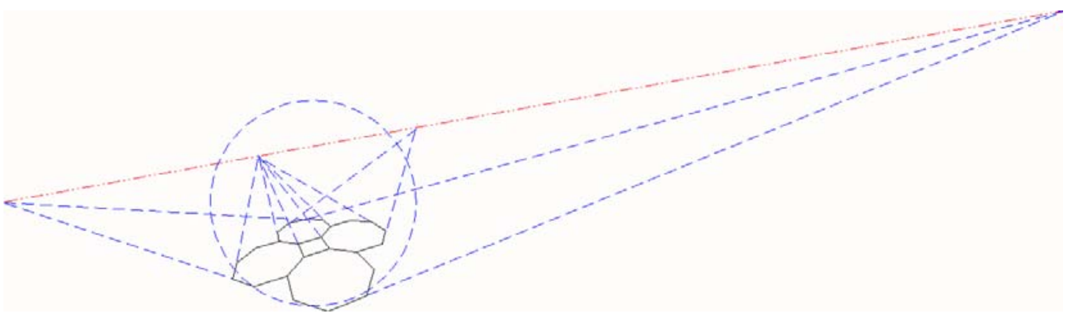
La misma arquitectura se transforma así en un asunto de perspectiva...

El patio de mármol, en Versalles (Philibert Le Roy, 1631).

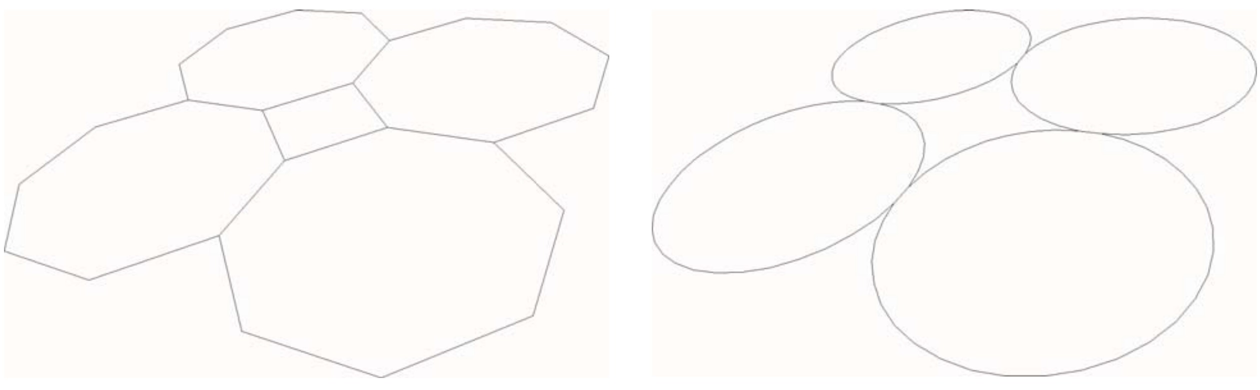


La siguiente figura resulta más curiosa: representa cuatro octógonos formando lo que podría ser la célula de base de un suelo regular de baldosas, en una disposición totalmente oblicua. Discernimos claramente las dos direcciones principales de esta estructura, según las diagonales del cuadrado central, a pesar de que las dos rectas que las realizan en el dibujo se interrumpan, precisamente, en cada uno de los cuadrados de junción entre los octógonos. El ojo añade sin embargo un efecto notable a su percepción de esta simple estructura, que parece curvarse, como si estuviera dibujada sobre una esfera.

Ahora bien, la construcción geométrica de esta figura, a partir de los puntos de fuga, tal y como se representa en la siguiente ilustración, no puede explicar este efecto. Notamos que la figura está dentro del círculo de Piero, lo cual confirma que los octógonos no se deforman exageradamente. Pero el ojo no percibe la línea de fuga, no entiende la figura en el sentido de la construcción reproducida en la ilustración...



Lo que hace el ojo, es más bien asimilar cada octógono al esquema más simple de su círculo inscrito, y la figura completa a la aproximación representada en la parte derecha de la siguiente figura:



En busca de sus esquemas elementales preferidos, el ojo encuentra cuatro círculos escorzados, y dos rectas que los separan. Sin embargo, al reducirse la estructura a una sola célula, nuestra mirada, en su afán de prolongar virtualmente las rectas, se deja influir por la curvatura de los círculos, y acaba curvando ambas directrices de la estructura, y luego la misma estructura, captándola finalmente como si fuera, toda ella, dibujada sobre una esfera...

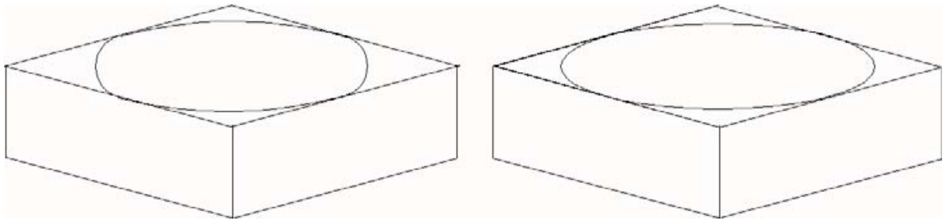
La acumulación de cascos y lanzas ordenados según hileras horizontales no escorzadas da al ejército normando un aspecto temible. El efecto perspectivo se debe, esencialmente, a la eliminación de las partes escondidas. Podríamos decir que, aquí, no hay proyección. Hay orden contra desorganización, fuerza contra espanto. Si no fuera por Dios...

Dos miniaturas de “Vida de San Albino”, finales del siglo XI.

Este ejemplo nos muestra, por lo tanto, la importancia que el ojo otorga a la redondez, y hasta qué punto se basa en los círculos que identifica para guiarse en la interpretación de la escena observada.

Ahora bien, ¿cómo se proyectan, centralmente y sobre el plano, los círculos de la realidad? Conocemos dos casos muy corrientes: sabemos que el círculo se proyecta frontalmente como un círculo, y en muchos otros casos como un elipse.

Nuestra familiaridad visual con el escorzo elíptico queda patente en la siguiente ilustración. En la figura de la izquierda, se ha utilizado un viejo "truco" de la época del dibujo manual para aproximar el trazado de un elipse inscrito en un rombo usando solamente la regla y el compás. A pesar de que los puntos de contacto con el cuadrado escorzado estén correctamente ubicados, y de que la continuidad de tangente esté asegurada entre los cuatro arcos de círculos que simulan el elipse, la falsedad de esta construcción salta literalmente a la vista, pese a su corrección topológica, y el ojo sólo se conforma con el trazado exacto de la figura de la derecha, porque "sabe" que, aún muy deformada, la imagen de un círculo siempre será una cónica.



De hecho, se puede demostrar que las cónicas en general, y los círculos en particular, se proyectan siempre como cónicas. Como lo recuerda Francis Borceux, en su "Invitación a la geometría": "en la representación perspectiva, la imagen de una recta es una recta y la de una cónica es una cónica. Así, se dice que las nociones de recta y de cónica son invariantes proyectivos, en este sentido que son preservadas por cualquier proyección central"[1]. En el desarrollo de las matemáticas griegas, el estudio generalizado de las cónicas es un poco más tardío que la obra de Euclides, y se debe a un compatriota suyo. "Como Euclides, Apolonio de Perga (262-190 A.C.) pasó la mayor parte de su vida en Alejandría, donde enseñó y escribió una obra de síntesis famosa sobre las cónicas. Este tratado de "Las Cónicas", que hizo autoridad durante dos milenios, hasta el advenimiento de la geometría analítica, presenta una cónica como la sección plana de un cono circular oblicuo. Apolonio muestra que esta definición es equivalente a la de Menecmo, Euclides, Arquímedes, etc. que presentaban una cónica como la sección de un cono circular recto"[2]. Sin entrar en más detalles, observamos que la exposición de Apolonio permite considerar todos los casos de intercepción del cono visual con el cuadro. El resultado, en cuanto al círculo, es que puede proyectarse como un círculo, como un elipse, pero también como una parábola o una hipérbola.

Incluso las disposiciones más deformadas entran en nuestra experiencia visual, debido a la iluminación con fuentes artificiales, y a las sombras proyectadas.

La siguiente ilustración muestra el caso más corriente: a partir de S, el círculo del plano τ' se proyecta en el cuadro τ; el elipse y el círculo son dos secciones del mismo cono de vértice S. Se representa también el plano desvanecente ε. Observamos que el elipse se irá alargando a medida que el círculo se desplace hacia arriba, hasta convertirse en parábola cuando el círculo toque el plano ε.

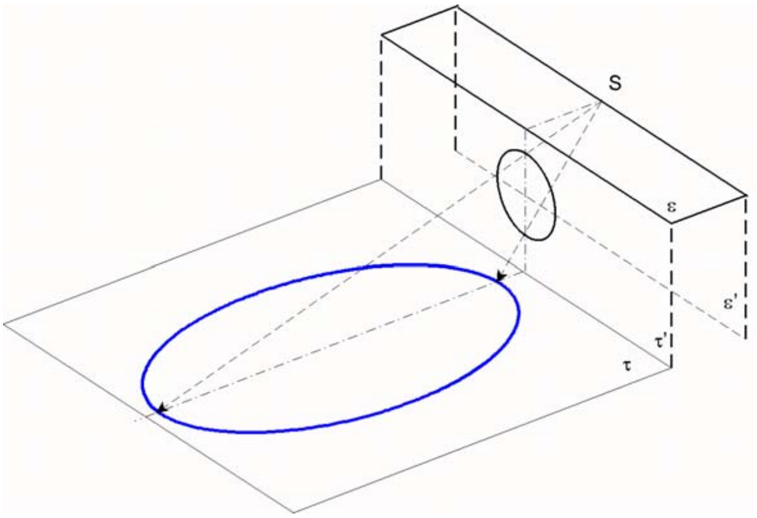
[1] "Invitation à la géométrie" (p. 152), Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.
[2] "Invitation à la géométrie" (p. 75), Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.

Aquí, los pavimentos sugieren el escorzo, y el hexágono (límites del paraíso o fuente bautismal) organiza ya el espacio perspectivo. Sin embargo, el plano vertical trasero, con su decoración claramente plana, limita aún la expresión en el dibujo de un espacio tridimensional.

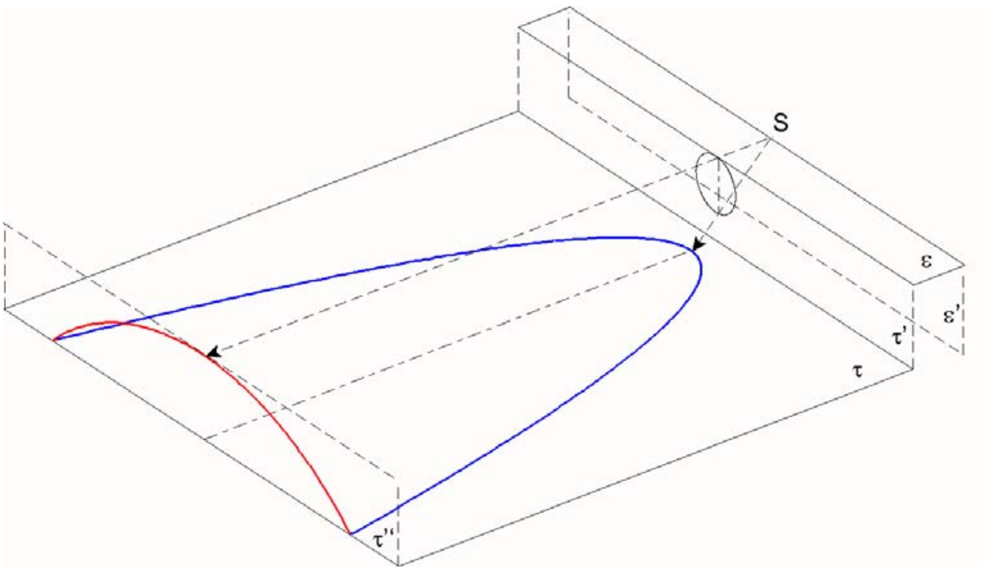
Cuatro miniaturas de una "Biblia historial" del siglo XIV.

La configuración del dibujo puede interpretarse de dos maneras: como una linterna que ilumina un disco, o como un ojo que guía el dibujo de un elipse sobre un calco.

(Linterna)	Foco S	objeto circular en τ’	plano desvanecente ε	imagen elíptica en τ
(Dibujo)	Ojo S	objeto elíptico en τ	plano desvanecente ε’	imagen circular en τ’



La siguiente ilustración muestra el caso donde el círculo proyectado es tangente al plano desvanecente; luego, su imagen en el cuadro τ es una parábola. En rojo, hemos añadido la imagen del mismo círculo en el plano frontal τ”; es un trozo de círculo, homotético al objeto, y que “completa” la imagen parabólica, como si se tratara de la iluminación de una esquina por una linterna.



A la inversa, el objeto parabólico se proyecta sobre el cuadro τ’ como un círculo. Con este segundo caso, empezamos a intuir que cualquier tipo de cónica puede transformarse en cualquier otro tipo de cónica mediante la proyección central apropiada. Esta propiedad fue la que interesó Desargues y Pascal, los iniciadores del estudio moderno de las proyecciones.

La ilusión perspectiva está ya perfectamente dominada. Un espejo convexo (arriba) indica cierto interés por la óptica, y quizás por sus recursos. El pavimento regular aumenta, por su escorzo, el efecto de profundidad.

Dos miniaturas de “Historias de Alejandro Magno”, Quinto Curcio, Flandes, finales del siglo XIV.

"El trabajo de Desargues tocando a la geometría proyectiva llevaba un título tétrico: *Brouillon Projet d'une atteinte aux événements de rencontre d'un cône avec un plan* (1639). Este título indica claramente la intención de Desargues de reestudiar la teoría de las cónicas más o menos abandonada desde Apolonio. Desgraciadamente, habrá que esperar el siglo XIX para ver los inmensos méritos de Desargues reconocidos a su justo valor.

En el siglo XVII, no se puede hablar verdaderamente de geometría proyectiva, sino de "métodos proyectivos en geometría". El principio es simple: mediante una proyección central, transformamos una configuración complicada en otra más simple; demostramos entonces el resultado en el caso simple, antes de volverlo a traducir en el contexto inicial mediante la proyección central inversa. Veamos el ejemplo del *teorema de Pascal*:

Los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se encuentran en puntos alineados.

Sabemos que una cónica cualquiera puede obtenerse como sección de un cono circular; la cónica y el círculo se corresponden, por lo tanto, mediante una proyección central cuyo centro es el vértice del cono. Mediante esta proyección, el hexágono inscrito en la cónica se transforma en un hexágono inscrito en el círculo. Los puntos alineados manteniéndose tales tras sufrir una proyección central, basta entonces con establecer el teorema de Pascal en el caso del círculo."

Francis Borceux[1]

El razonamiento de Pascal ha tenido muy fértiles aplicaciones en el cálculo numérico. En efecto, en los actuales sistemas de diseño asistido por ordenador (DAO)[2], resulta muy provechoso parametrizar las curvas y limitarse en manejar simples expresiones polinómicas. Eso es posible en el caso de la parábola, cuya forma paramétrica corresponde a un polinomio del secundo grado, pero no en el caso de las demás cónicas. Para salvar esta dificultad, conviene trabajar en un espacio de dimensión superior (por ejemplo: de cuatro dimensiones para simular el de tres), exclusivamente con parábolas, las cuales, mediante una proyección central, pueden transformarse en cualquier cónica. En lenguaje algebraico, eso significa pasar de una representación polinómica a una representación polinómica racional. Es la teoría en que se basan las N.U.R.B.S. ("Non Uniform Rational B-Spline")[3].

Finalmente, la siguiente figura muestra el caso en que el círculo proyectado corta el plano desvanecente ε; en la versión orientada de la proyección, sólo la parte del círculo ubicada debajo del plano ε puede proyectarse, formando en el plano τ una rama de hipérbola (a la izquierda). En la versión no-orientada, la imagen se halla disociada: las proyectantes infinitas que interceptan la parte superior del círculo interceptan también el cuadro, en la otra dirección, formando la otra rama de la hipérbola (parte derecha). En el dibujo, los rayos próximos al plano desvanecente han sido parados en los planos frontales τ^1 y τ^2, donde forman imágenes circulares del objeto.

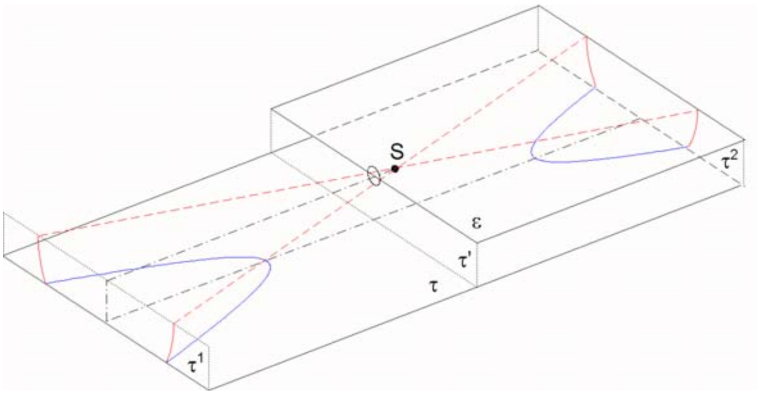
1 "Invitation à la géométrie" (p. 152), Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.

2 En inglés: "CAD" (Computer Aided Design).

3 La primera publicación acerca de las NURBS es: K J Versprille. *Computer-Aided Design Applications of the Rational B-Spline Approximation Form*. PhD thesis, Syracuse University, 1975.

Volvemos una última vez al sutil manuscrito Fr 50, tan notable ya por sus colores. El "rapto de Helena" (izquierda) se ha transformado en un estudio del círculo en perspectiva, convertido en el hexágono de las murallas, escorzado en los perfectos elipses de la torre del homenaje, o de la isla en el fondo. El mar, tratado con un oleaje idealmente regular, también puede escorzarse. Es blanco como en Flandes (izquierda) o rojo, literalmente, cuando en él se ahogan los soldados de Faraón (derecha).

Dos miniaturas del "Espejo histórico", Vincent de Beauvais, Paris, 1463.



Este caso ilustra muy bien las peculiaridades de la versión no-orientada: la segunda rama de la hipérbola es puramente virtual (ni puede ser vista por un ojo S, ni iluminada por un foco S), pero completa la cónica: sólo así podemos decir propiamente que una cónica (completa) se proyecta siempre como otra cónica (completa).

Al detallar el estudio de las cónicas, me he alejado un poco de mi tema, para indicar nociones básicas de *la geometría proyectiva*, la cual halló sus fundamentos, precisamente, en el estudio de estas curvas. A pesar de que ciertos resultados aquí resumidos no pertenecen directamente a la geometría visual, me parece importante recordar que han tenido aplicaciones prácticas importantes, aún vigentes en el desarrollo de razonamientos algorítmicos recientes, los cuales, al utilizarse con frecuencia en los programas de diseño y de renderización, devuelven finalmente estas nociones al espacio visual.

Sin embargo, para nosotros, lo esencial es recordar que los círculos, sometidos a la proyección central sobre el plano, se convierten siempre en cónicas, que tales cónicas, incluso las más deformadas, pertenecen a la experiencia visual corriente (en particular, a través de la iluminación y de las sombras), y que el círculo es uno de los esquemas elementales del ojo, y la redondez una propiedad fundamental del modelo propio. De ello deducimos que:

Las cónicas son la figura visual de la redondez

* * *

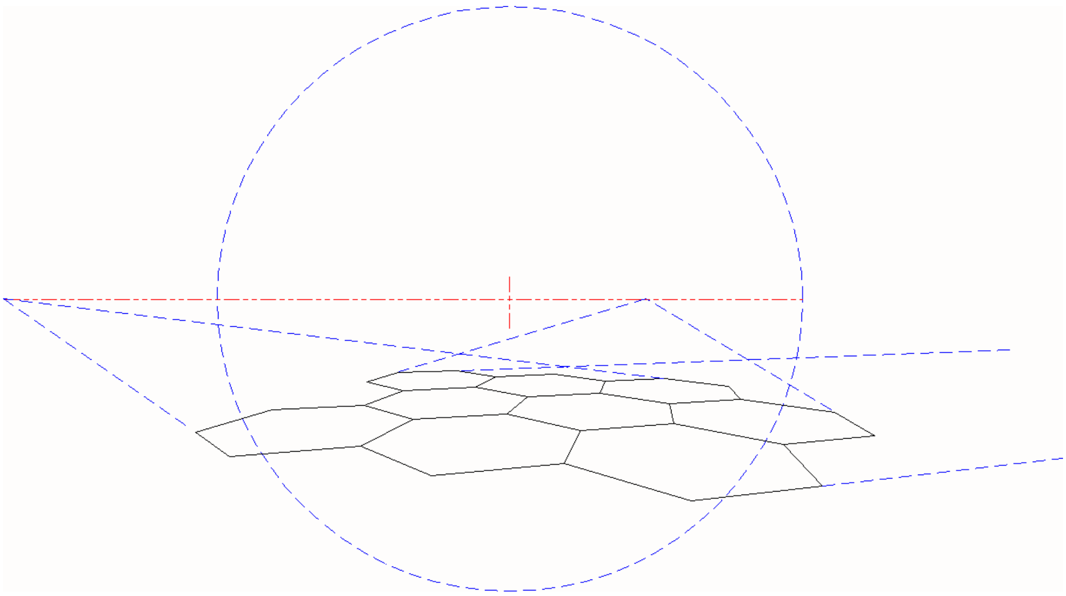
- Los pavimentos -

Si los pavimentos complejos (y otras estructuras parecidas) son tan presentes en las primeras pinturas renacentistas, es porque ofrecen una justificación verosímil y un aprovechamiento fácil del mallado espacial que precisa la "construcción legítima", y, a la vez, grandes posibilidades de variación motívica, que los escorzos realzan, reforzando en la obra la impresión de realismo y de virtuosidad.

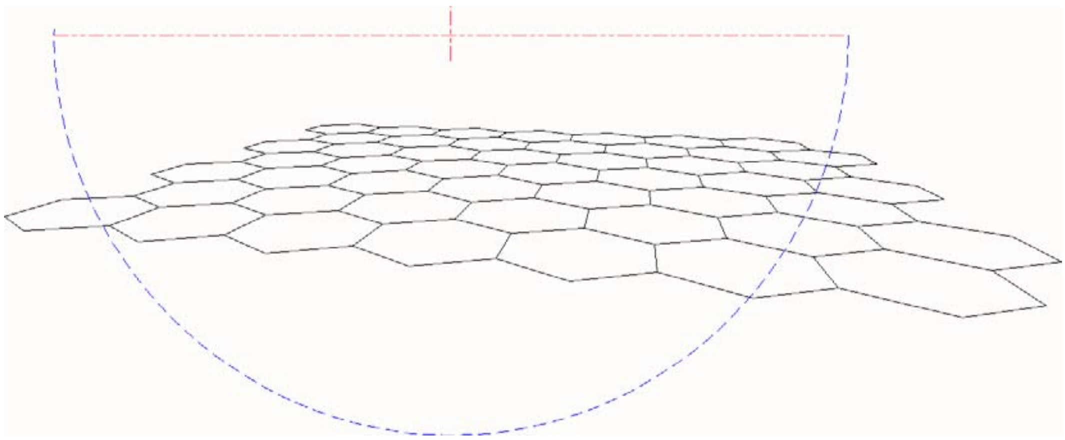
Estudiemos el mallado hexagonal. En la siguiente ilustración, su horizontalidad y sus tres direcciones principales se perciben muy bien, confirmando su construcción geométrica, con tres puntos de fuga alineados en el horizonte. La ausencia de deformaciones pronunciadas se explica por su inclusión casi completa en el círculo de Piero.

Los ropajes están pintados en grisalla, y sólo manos y caras, a veces, se realzan discretamente de rosado. El color, y el interés, se vuelcan hacia el "decorado", esencialmente los complejos pavimentos. Elegancia de la grisalla, dominio del escorzo.

Tres miniaturas de "Guillaume de Tyr", Brujas, finales del siglo XV.



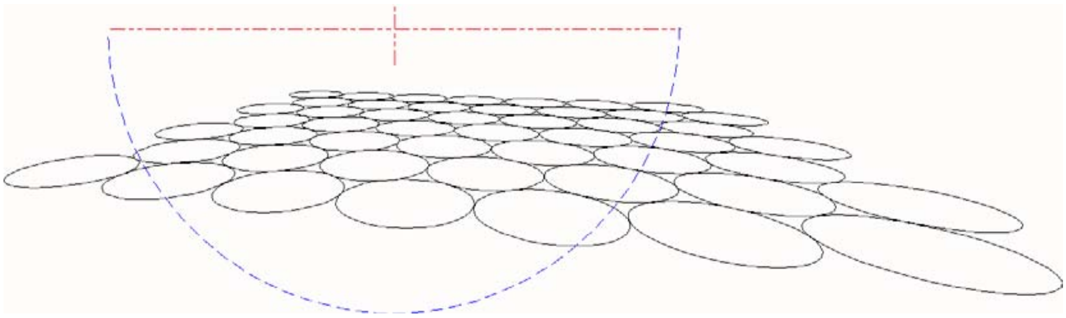
Si prolongamos este pavimento, el ojo se hace cada vez más sensible al esquema circular. En la siguiente ilustración, la parte de la derecha, que sale del círculo de Piero, se hace puntiaguda y, como en el caso de la célula octogonal antes estudiada, parece incurvarse.



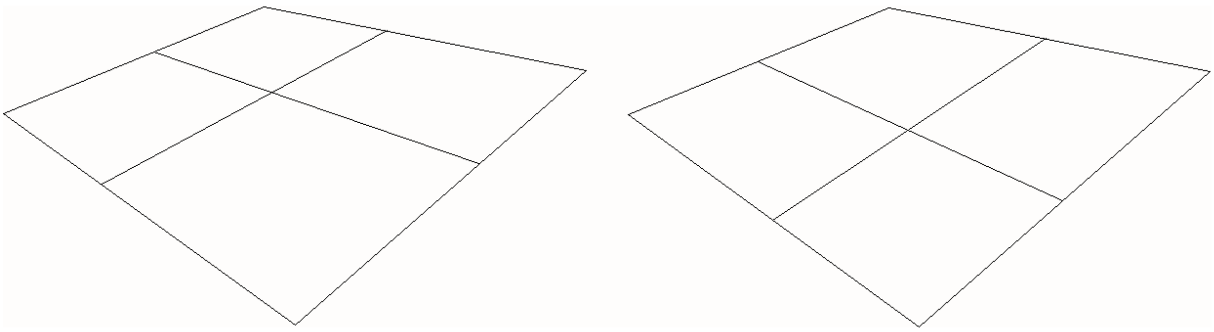
La siguiente ilustración, traducción esquemática de la anterior, resume nuestras consideraciones sobre la percepción visual. En el dibujo, encontramos solamente unos elipses espaciados en progresiones armónicas. Pero el ojo ve en ellos círculos iguales en disposición regular, es decir espaciados en progresión aritmética. Y el ojo traza también unas rectas, uniendo los puntos de tangencia. Y estas rectas – que así son en el dibujo – parecen curvarse en el extremo derecho del pavimento, porque su rectitud entra en conflicto con la redondez de los últimos elipses, particularmente deformados, por otra parte, debido a su alejamiento del círculo de Piero...

Los monocromos con retoques de amarillo convienen admirablemente para el ambiente mágico de las historias de Merlín. El color de fondo varía con la ubicación de la escena: noche o mar en azul (arriba), bosque en verde (abajo), interior en marrón,... En la batalla de arriba, no hay escorzo (las plantas crecen en la lejanía, por disponerse allí de un mayor espacio), y el recurso de acumulación es el mismo que ya servía, cuatro siglos antes, para describir las invasiones normandas. Abajo, en cambio, un bosque hábilmente escorzado basta para producir un efecto de profundidad.

Dos miniaturas de "Historia de Merlin", iluminadores: Maestro de Carlos de Francia y Jean Colombe, 1480-1485.



La siguiente ilustración propone un caso especialmente instructivo: ¿cuál es incorrecta?



Desde luego, una pregunta así puede parecer muy discutible, pero lo cierto es que el ojo, frente a ambas disposiciones, supone naturalmente la premisa necesaria para darle sentido: acostumbrado a buscar siempre el esquema más simple en escenas que se presentan ante él con el debido escorzo, presupone que los cuatro cuadrados de ambas figuras han de ser iguales entre sí en la realidad.

Al presentar esta pregunta a diversas personas, hemos observado que las repuestas diferían en función de la familiaridad que estas personas mantienen con el dibujo. Los dibujantes, y más aún los profesores de dibujo, rechazan inmediatamente la figura de la izquierda, porque están acostumbrados a buscar siempre el punto de vista que menos deforme la imagen, y la figura de la izquierda les parece la peor posible, la que suelen reprochar a sus estudiantes, propensos a dibujar así por prestar poca atención, generalmente, a la calidad y composición de las imágenes proyectadas.

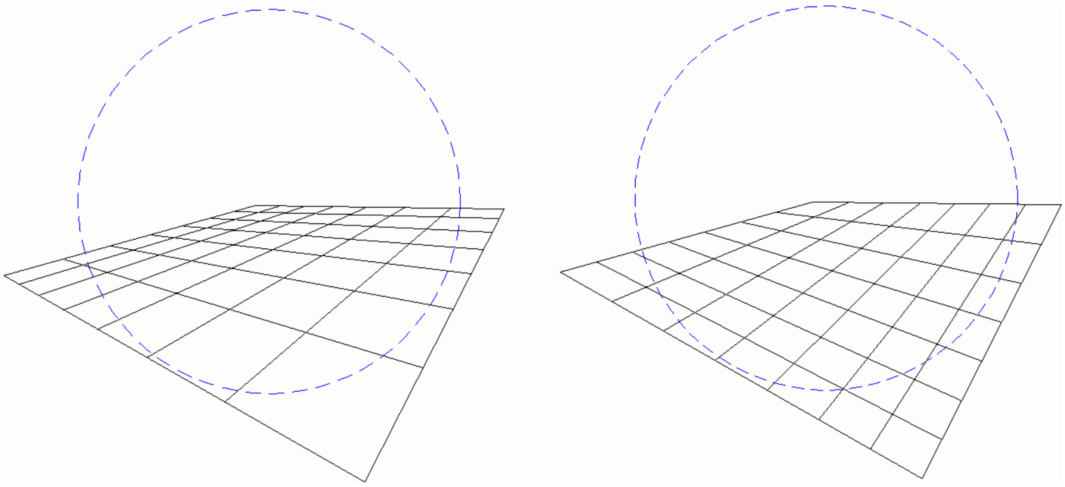
En cambio, las personas las más ignorantes del dibujo y de la geometría sienten enseguida que el dibujo de la derecha "ondula", que no se trata de un plano, sino de algo parecido a una silla de caballo. Estas personas aciertan aquí la respuesta porque, muy familiarizadas con las producciones de la proyección central, no acostumbran sin embargo cuestionarlas, y se guían solamente por su experiencia inconsciente, sin dejarse turbar por el espíritu crítico.

En efecto, la disposición de la izquierda resulta de cierta proyección central de un tablero plano, con un resultado muy deformado, pero correcto. En cambio, en la disposición de la derecha, las medianas arrancan en la mitad de los lados proyectados - como si se tratara de una axonometría -, pero los lados fugan - como en una proyección central -, dando un dibujo híbrido que no puede ser el resultado de ninguna proyección lineal de un tablero plano regular...

Dicho de manera más constructiva, la diferencia entre ambas figuras es que, sobre un contorno exterior idéntico, hemos repartidos los puntos de la red, sea de manera uniforme (derecha), sea en progresión armónica (izquierda). El efecto resultante se percibe mejor en la ilustración siguiente, donde la posición del pavimento ampliado evita mayores deformaciones de la imagen, al conformarse al círculo de Piero.

En el mismo manuscrito, la perspectiva se hace precisa en los interiores (arriba). Cuando vuelven los colores (abajo), es como si se saliera del mundo mágico, y sólo las estatuas siguen en grisalla sobre los muros del palacio. El pavimento, de un azul brillante, el punto de vista y la disposición de la escena se conyugan para reforzar aquí el efecto perspectivo: ¡escorzo = realidad!

Dos miniaturas de "Historia de Merlin", iluminadores: Maestro de Carlos de Francia y Jean Colombe, 1480-1485.



Aquí, se ve mucho mejor que el dibujo de la derecha no puede ser la perspectiva de un tablero plano regular, sino que se trata de un paraboloide hiperbólico (una “silla de caballo”), con dos esquinas (izquierda y derecha) levantadas y las dos otras (delante y atrás) rebajadas.

El paraboloide hiperbólico es una figura con propiedades visuales muy interesantes. Se trata de una superficie reglada que, en cierta disposición excepcional (una axonometría frontal) se ve exactamente como un tablero plano. Si acercamos el punto de vista o si giramos el objeto, el aparente tablero regular se empieza a deformar, ya que sus generatrices, que no son realmente paralelas, ni siquiera coplanarias, comienzan a fugar en direcciones distintas. Luego, podemos utilizar esta cuádrica para deformar continuamente un tablero regular, desde una apariencia plana hacia una figura bastante más compleja: es la propiedad que hemos utilizado aquí...

Podríamos llevar mucho más lejos el estudio de los pavimentos regulares, de su constitución geométrica y de su uso en la pintura, pero, en cuanto al efecto perspectivo, nos toparemos siempre con las tres mismas propiedades del modelo propio - la alineación, la regularidad y la redondez - y con su traducción geométrica: la preservación de las rectas, la relación armónica y la conservación de las cónicas.

* * *

- La coherencia -

Un *haz de rectas* es un conjunto de rectas coplanares que pasan por un mismo punto, llamado “centre del haz”. Las propiedades del haz son fundamentales en proyección central, ya que permiten definir el tercer invariante de esta transformación: la relación anarmónica.

Los tres invariantes proyectivos son: la alineación, la conservación de las cónicas y la relación anarmónica. Matemáticamente, la proyección de cualquier progresión aritmética en una progresión armónica no es más que un caso particular de la conservación de la relación anarmónica. Visualmente, sin embargo, se trata de dos propiedades radicalmente distintas del modelo propio: aplicada a las estructuras regulares, la relación anarmónica se simplifica en una relación armónica, figura de la *regularidad*; aplicada con toda generalidad, la misma relación anarmónica corresponde a otra propiedad visual: la *coherencia* que se establece entre distintas imágenes del mismo objeto.

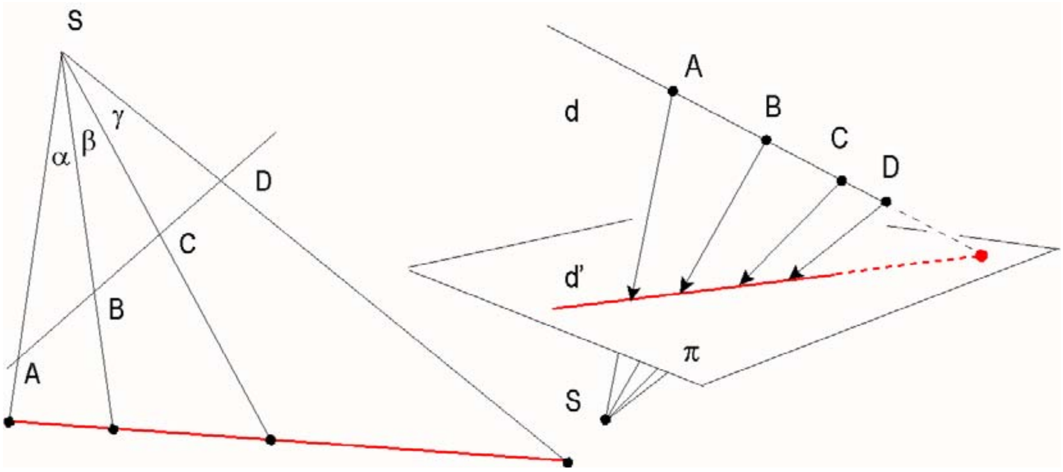
El maestro absoluto del espacio y del color en las miniaturas, Jean Fouquet, produce un efecto poderoso y solemne cuando remata con tapices flordelisados colgantes el escorzo frontal de los pavimentos (ar.iz.); domina también una escena de calle (ar.dr.), estableciendo una sutil relación entre lo íntimo de la procesión y la apertura de una perspectiva urbana (ver el papel del "mirón"), y el manejo de una bóveda de cañón (abajo). Los colores quitan o añaden perspectiva, según su gradación y variedad.

Cuatro miniaturas de Jean Fouquet.

Una *puntual* es una serie de puntos definida sobre una recta. La relación anarmónica de cuatro puntos de una puntual, citados en el orden indicado, es el cociente de las razones según las cuales los dos últimos dividen el segmento de los dos primeros. Se escribe:

(ABCD) = (CA/CB) / (DA/DB)

Como lo muestra la siguiente ilustración, se trata de una relación entre los puntos del plano, cuya conservación en la intercepción de un haz de cuatro rectas por una recta cualquiera fue evidenciada ya en la antigüedad tardía, y que cobra un interés muy particular cuando el plano se considera como proyectante (derecha): la relación anarmónica de la puntual *d* se conserva en su proyección *d'*.



Su descubrimiento se debe a Papo [Pappus] de Alejandría, el último de los grandes geómetras griegos (hacia 300 D.C.), que publicó la "Colección", un tratado en ocho libros cuya proposición VII-129 establece la conservación de la relación anarmónica[1].

La conservación de la relación anarmónica se demuestra con relativa facilidad[2].

Sea *d'* la imagen en el plano π, por proyección central, de una recta *d*. La proporción de las distancias entre los puntos no se conserva (a diferencia de lo que ocurre con las proyecciones paralelas), pero, sin embargo, demostraremos que su relación anarmónica sí se preserva.

Sea Δ *(SAB)* la superficie del triángulo con vértices *S, A* y *B*; la razón *CA/CB* puede escribirse: Δ *(CAS)* / Δ *(CBS)* y la razón *DA* / *DB* puede escribirse: Δ *(DAS)* / Δ *(DBS)*. Si escribimos $SA = S_1$, $SB = S_2$, la relación anarmónica es igual a:

$$\frac{\Delta(CAS)}{\Delta(CBS)}\,\frac{\Delta(DBS)}{\Delta(DAS)}=\frac{S_1S_3\sin(\alpha+\beta)\,S_2S_4\sin(\beta+\gamma)}{S_2S_3\sin(\beta)\,S_1S_4\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Esta relación depende solamente de los ángulos en *S*; se aplica por lo tanto a toda recta que corta el haz.

Q.E.D.

[1] "Invitation à la géométrie" (p. 84), Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.

[2] "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Gerald Farin, Academic Press, Inc., Second Edition, 1993.

Estas dos imágenes resumen los recursos del siglo XV para producir un efecto tridimensional en el plano del dibujo, para crear espacio. El papel fundamental, lo desenvuelven siempre los pavimentos, simples y regulares, o más sofisticados en forma y color. Pero siempre destacan, llegándose a veces al extremo de dejar todo lo demás en grisalla. A los pavimentos se oponen los tapices verticales, que detienen la perspectiva cuando, en posición frontal, muestran su poderillo plano (como en las miniaturas más antiguas, donde, convertidos en fondos, afirmaban la bidimensionalidad del dibujo), o la refuerzan, cuando participan del escorzo general. Todo lo demás es un juego de mostrar y esconder: quitar una pared, tapar una puerta, abrir una ventana, enmascarar el horizonte y los puntos de fuga con un lejano castillo,...

Dos miniaturas con escorzo, siglo XV.

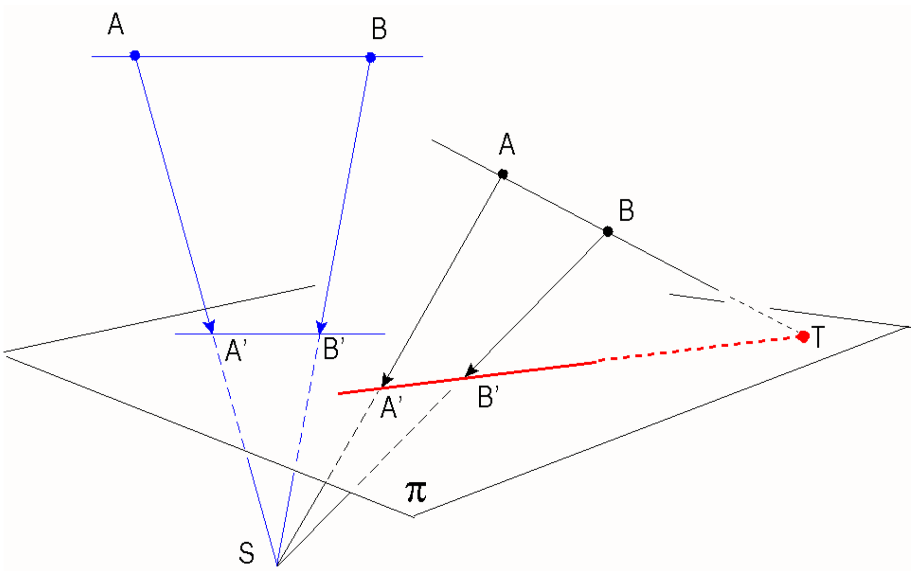
Al permutar de todos los modos posibles cuatro puntos alineados, obtenemos veinticuatro relaciones anarmónicas, que se reducen a seis, debido a las simetrías. Si (*ABCD*) = r, obtenemos las siguientes posibilidades:

(ABCD) = r	(ACBD) = 1 - r	(ADBC) = 1 - 1/r
(ABDC) = 1/r	(ACDB) = 1/(1 - r)	(ADCB) = 1/(1 - 1/r)

La conservación de la relación anarmónica constituye el principal arcano de la geometría proyectiva decimonónica, a la cual ofreció la posibilidad de definir una métrica independiente de los presupuestos euclidianos, e incluyendo los puntos al infinito del espacio proyectivo real. Afortunadamente para nosotros, el difícil camino axiomático que hace falta recorrer para asomarse a las bellezas de esta geometría no nos llevaría a ninguna parte, y nos será más útil indicar los rasgos más destacados de esta relación en un simple ejemplo, para deducir de ello las consecuencias visuales que buscamos.

Dos puntos *A* y *B* del espacio y sus imágenes *A'*, *B'* sobre un cuadro plano siempre son, por construcción, coplanares. Estos cuatro puntos bastan para calcular la posición del punto de vista *S*.

Para determinar la imagen de un punto *C* ubicado entre *A* y *B*, basta con unirlo a S. Podemos preguntarnos, sin embargo, si el conocimiento de la posición S es necesario. Observemos primero que el problema planteado es puramente bidimensional. La siguiente ilustración muestra las dos configuraciones por estudiar: o bien el segmento AB es paralelo al cuadro (a la izquierda), o bien no (a la derecha).



a. *A-B* es paralelo al cuadro. La posición de la imagen *C'* puede determinarse directamente, a partir del teorema de Tales. Sea la razón notada *(A, B, C)* y así definida:

(A, B, C) = CA / CB,

donde *CA* y *CB* son distancias signadas.

El teorema indica que:

(A, B, C) = (A', B', C')

Esta fascinante imagen da la clave: el pavimento es el nauclero que pasa la mirada, entre la segunda y la tercera dimensión, entre figuración y abstracción, y es, a la vez, un tablero de ajedrez, es decir: una matriz, con sus infinitas posibilades de juego y estructuración, las que desarrollarán más tarde los tableros de Paul Klee o las composiciones musicales del siglo XX. *Ite missa est...*

Miniatura de "Échecs amoureux", Évrard de Conty, iluminación: Robinet – Testard, Cognac, 1496-1498.

Es decir que la imagen *A'-B'-C'* de la puntual *A-B-C* sólo cambia de escala: es una homotecia. Desde luego, esta relación es válida en ambos sentidos: conociendo *C'*, y sabiendo que *C* está sobre *A-B*, podemos calcular su posición.

b. *A-B* no es paralelo al cuadro. En este caso, el problema puede también resolverse, gracias al hecho de que conocemos, además de *A* y *A'* y de *B* y *B'*, un tercer punto del espacio y su imagen: se trata de la intersección *T* de *A-B* y *A'-B'*, es decir de la traza de *A-B* en el cuadro: *T* = *T'*. Luego, podemos determinar la imagen *C'* de *C* o el punto *C* cuya proyección es *C'* a partir de la conservación de la relación anarmónica:

(A, B, T, C) = (A', B', T'= T, C')

Recordemos la definición de la relación anarmónica:

(A, B, T, C) = (TA / TB) / (CA / CB)

Si el punto T se aleja hacia el infinito, T' también se aleja al infinito, y la relación tiende hacia la relación expresada para la recta paralela al cuadro: volvemos a la homotecia.

Según el caso, en vez de utilizar la traza T de la recta por proyectar, puede resultar más interesante utilizar su punto de fuga F, que es la traza de la recta pasando por S que le es paralela. Este punto de fuga indica, de hecho, la dirección de la recta. En este caso, la conservación de la relación anarmónica se escribe:

(A, B, ∞, C) = (A', B', F, C')

Si el punto C que nos interesa es equidistante de A y B (punto medio, notado M), vemos que:

(A, B, ∞, M) = -1

Es la relación armónica. El punto medio de un segmento de recta es llamado "conyugado armónico" del punto al infinito. Expresando luego la conservación de la relación anarmónica:

(A, B, ∞, M) = (A', B', F, M')

Sobre la recta imagen, el punto de fuga y la imagen del punto medio de un segmento de recta son también *conyugados armónicos*.

Esta descripción ilustra bien la diferencia entre la transformación homotética, que preserva las proporciones, la transformación armónica, que expresa el escorzo perspectivo de las estructuras regulares, y la transformación anarmónica, que generaliza la anterior a todas las estructuras, expresando la preservación de las *proporciones entre las proporciones*.

El hombre moderno se ha acostumbrado a medirlo todo, es decir: a referir las magnitudes visuales - entre otras - a un valor absoluto y universal, como el "metro" o la "milla".

El ojo no ve así, sino mediante proporciones, y podemos pensar que los seres pensantes siempre han sabido utilizar recursos elementales (como un palito erguido a distancia constante del ojo por el brazo extendido) para evaluar mejor estas proporciones. La axonometría es la forma de representación que mejor traslada al dibujo esta percepción razonada, pero no calculada, y relativa.

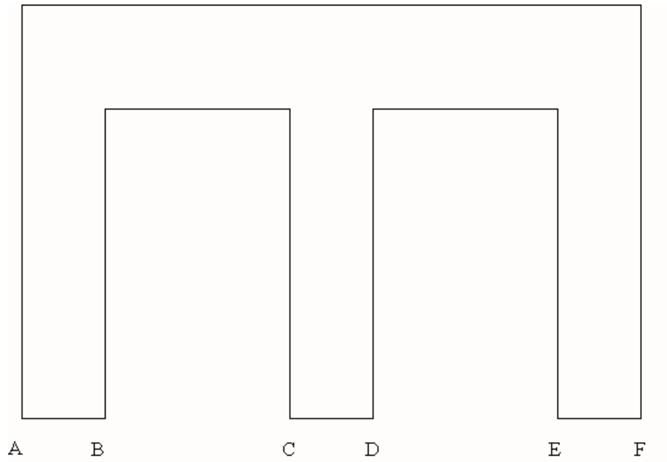
En el siglo XV, hasta el infierno se pone en perspectiva. Aquí, un magnífico trabajo sobre el círculo y sus escorzos elípticos. Verticales y horizontales, curvas, y los colores tradicionales de la oscuridad: verdes, azules y marrones, con llamas de rojo anaranjado, para resaltar el contraste cálido-frío.

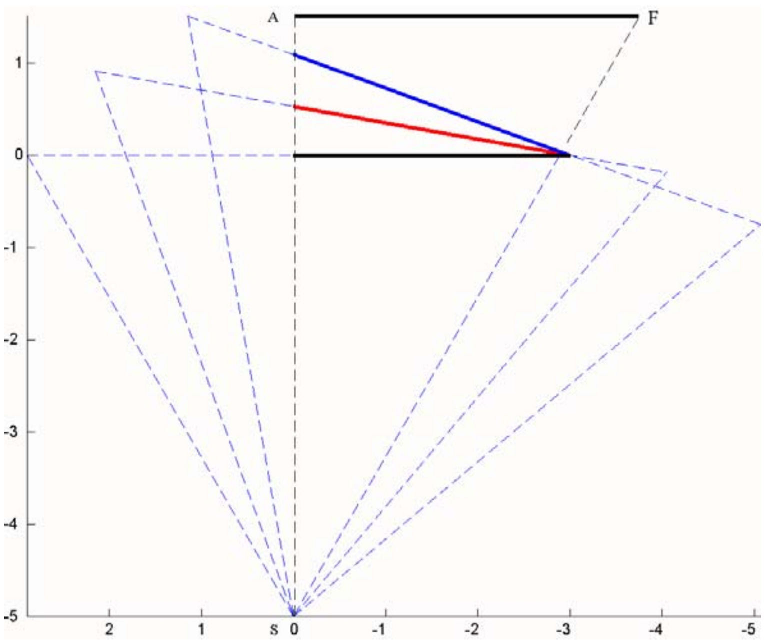
“De Civitate Dei”, Augustinus (s.), iluminador: Maître de l'échevinage, Rouen, finales del siglo XV.

Sin embargo, el ojo menos educado, incluso el de los animales, ha de percibir esta coherencia de la escena que hace que un objeto en movimiento, a pesar de variar continuamente en la percepción, es captado como siempre idéntico a sí mismo, mientras se conserven, para decirlo en lenguaje geométrico, las relaciones anarmónicas dentro de las puntuales que ostenta. La perspectiva central sobre el plano es la forma de representación que mejor traslada al dibujo esta percepción inconsciente, pero esencial para asegurar la comprensión más elemental de una escena.

Para aclarar la correspondencia entre la conservación geométrica de la relación anarmónica y la percepción visual de la coherencia de la escena, desarrollaremos un ejemplo.

Sea el doble pórtico plano presentado en la siguiente ilustración, con *AB* = *CD* = *EF* y *BC* = *DE*.





Sea un ojo *S* que mira este objeto, primero frontalmente, a pesar de que el objeto le aparezca corrido hacia la derecha (es el caso estándar, comparable a la "perspectiva cornuda" de Viator), y luego, girándose, cada vez más, para emplazar el objeto en medio del campo de visión.

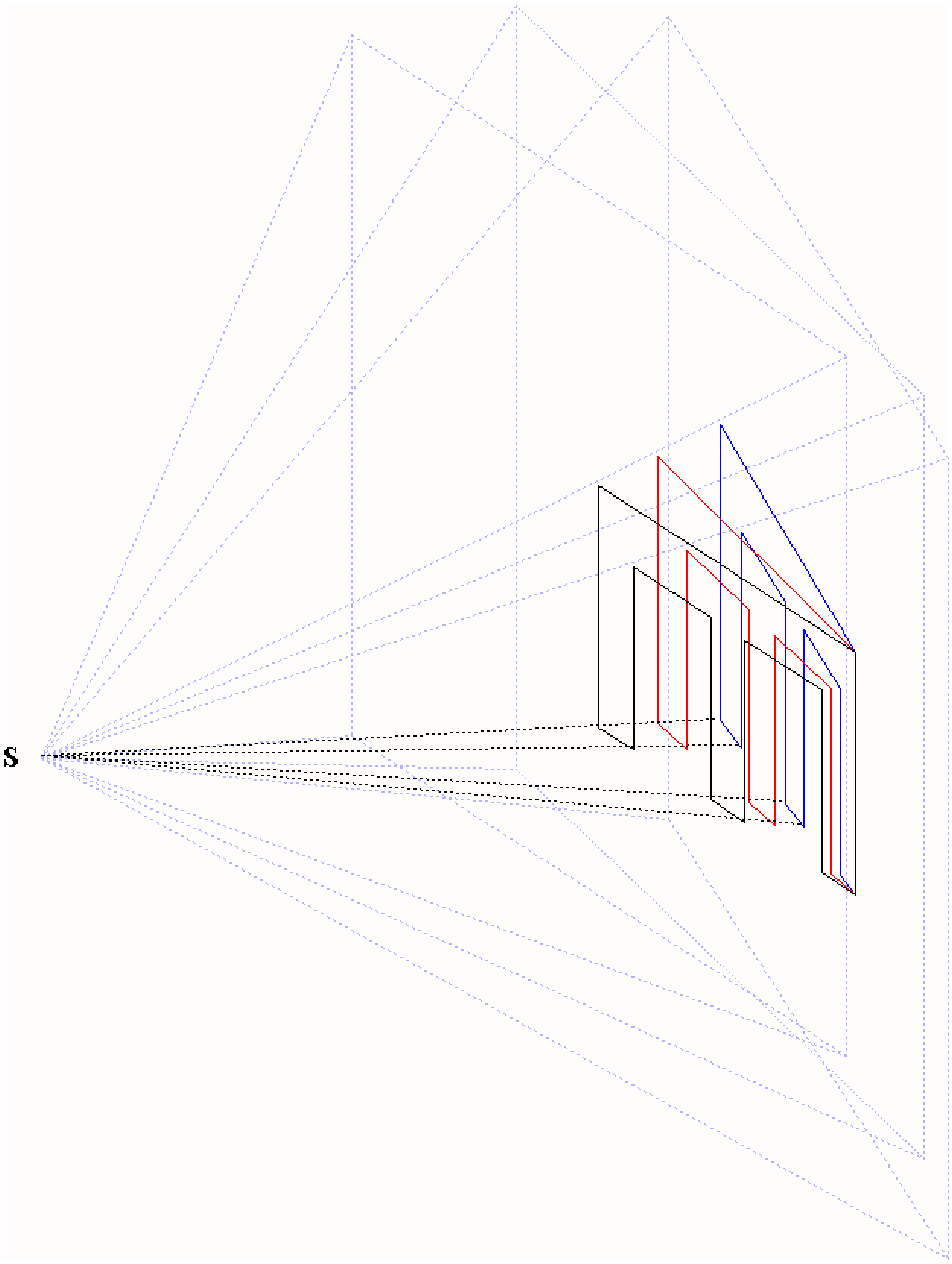
En la ilustración, se indican las tres "pirámides visuales de Piero" (en líneas punteadas azules), que tienen como base el marco cuadrado circunscrito al círculo de Piero (obertura de 60 grados).

En la siguiente ilustración, una axonometría de la triple configuración espacial, vemos el haz de rayos que intercepta los puntos *A*, *B*, *C* y *D* del objeto (no dibujado) y los puntos correspondientes de las imágenes en los tres cuadros: como sólo se desplaza el cuadro (el ojo y el

A pesar de que las "Très belles heures de Notre Dame de Jean de Berry" sean casi un siglo anteriores al "De Civitate Dei", lo adelantan por su calidad y ambición: con ellas empieza la prodigiosa aventura gráfica de la corte de Jean de Berry, donde, además de los hermanos Limbourg, acudirán, entre muchos otros, los hermanos van Eyck, dando su último brillo al arte medieval franco-flamenco. Me parece significativo que, en ellas, la tradicional mandorla se convierta casi en un elipse depurada, anunciando el triunfo de la geometría perspectiva. En estos entonces, se desarrolla, en Italia, la teoría perspectiva, y en Flandes, una nueva música polifónica... En Francia, se acaba la guerra de los cien años.

"Coronación de la Virgen", en el "De Civitate Dei" (finales del siglo XV), y en "Horae ad usum parisiensem" (finales del siglo XIV, principios del XV).

objeto son aquí inmóviles), el haz de rayos no se desplaza. Luego, queda evidente, por construcción, que la relación anarmónica entre los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se conserva en las imágenes, como cualquier otra relación anarmónica entre cuatro puntos alineados del objeto.

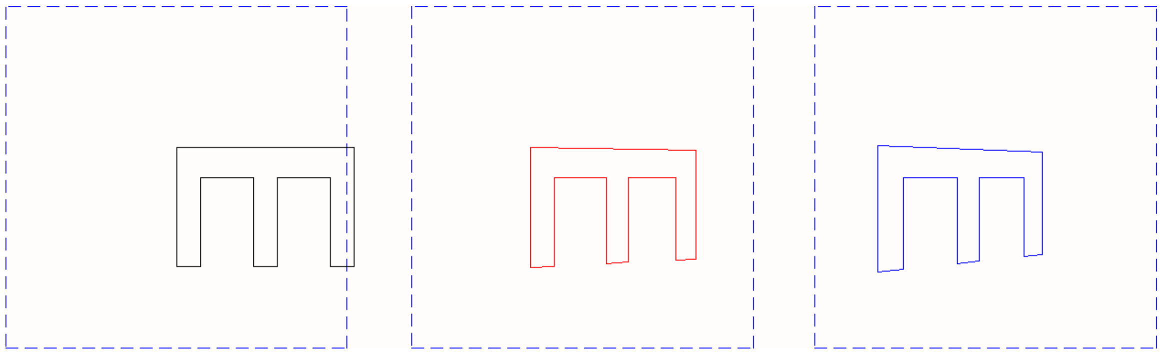


En la siguiente ilustración, vemos las tres imágenes resultantes, enmarcadas por la base de la pirámide de Piero. Aquí, debemos dejar el análisis al ojo: él percibe que las tres imágenes forman una secuencia, con tres vistas del mismo objeto. Pese a la fuga y al escorzo que se van

En el siglo XIII, Jacopino da Reggio trabaja aún en un espacio casi axonométrico (ar.iz.). A finales del siglo XV, las mesas redondas de Évrard d'Espinques están perfectamente escorzadas, generándose un espacio muy distinto (ar.dr., ab.iz.). Llega incluso a escorzar el círculo en una indudable parábola (ab.dr.).

"La última cena", Jacopino da Reggio (finales del siglo XIII), "Aparición del San Grial", Évrard d'Espinques (hacia 1470), "Caballeros buscando la silla de Tristán" (hacia 1470), "Aparición del San Grial", Évrard d'Espinques (1463).

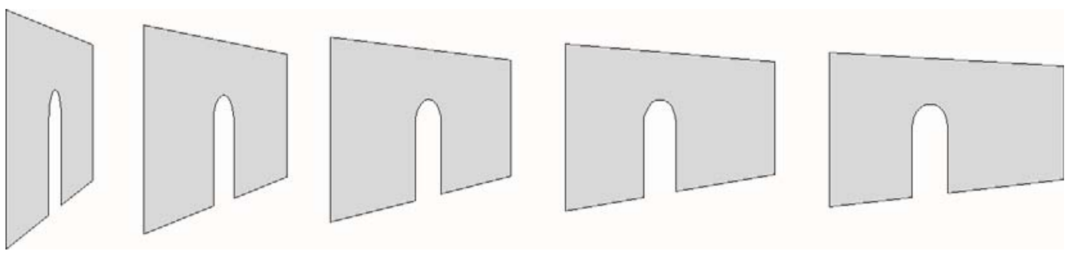
reforzando, desde la primera vista, frontal, hacia la tercera, siente que las proporciones del objeto se mantienen, y que éste no se deforma. Es decir: la secuencia temporal es coherente, las tres imágenes de la escena son coherentes entre sí. Estamos hablando de un espacio escénico que no se deforma, pero la mirada sólo puede estudiarlo moviéndose, y relacionando entre sí sus percepciones sucesivas: para el ojo, la coherencia del espacio se manifiesta como coherencia temporal.



Ahora bien, si comparamos esta ilustración con la anterior, vemos claramente que la conservación de la relación anarmónica es, simplemente, la expresión geométrica de la coherencia visual entre diferentes imágenes.

Podríamos mostrar lo mismo con otras disposiciones (movimiento del ojo, rotación del objeto, traslación del cuadro...), pero la que hemos elegido presenta dos ventajas: geométricamente, es fácil de representar, porque el haz de los rayos visuales es fijo; visualmente, la secuencia resultante es muy interesante, porque parte de una vista frontal pero descentrada hasta una vista centrada pero escorzada. Sólo la primera respeta las proporciones, pero el ojo percibe en las dos otras una progresión armónica que le indica que los dos pórticos son iguales, y que le permite referir estas vistas deformadas a la primera, que realiza las condiciones estándar.

La siguiente ilustración nos convencerá aun más de la importancia para el ojo de la propiedad de coherencia que atribuimos al modelo propio. Desde luego, lo mejor sería observar una animación. Sin embargo, aún en esta secuencia escalonada, percibimos que hay un "error", una imagen que no encaja, o una repentina deformación del objeto:

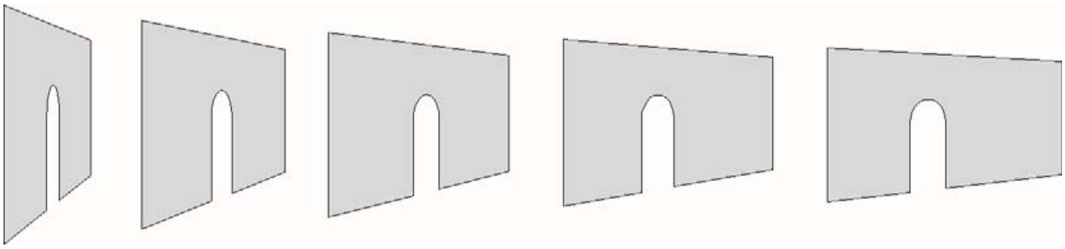


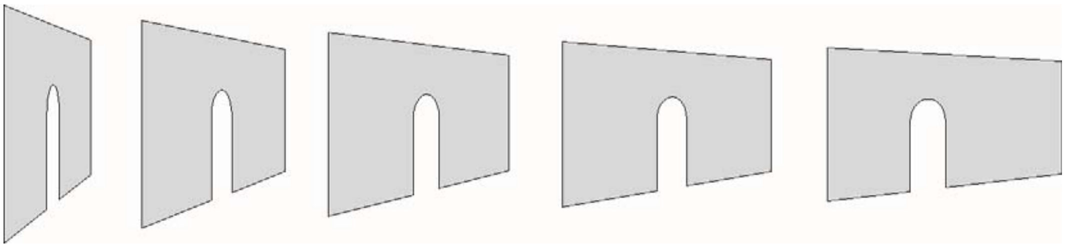
Para acabar de persuadirnos, comparamos, en la siguiente ilustración, la secuencia modificada con la secuencia "correcta", la que correspondería a un simple movimiento del ojo en torno a un pórtico que no se deforma:




En este curioso manuscrito, para nosotros recapitulativo, la profundidad se materializa a través de unos brazos abiertos en el plano frontal: elogio al gran descubrimiento de la época, al razonamiento deductivo que supone, y a la posición que ocupará en la memoria de los siglos...

Alegorías de la profundidad, de la deducción, del descubrimiento y de la memoria (Bélgica, finales del siglo XV).





Comprobamos que, en la cuarta imagen de la primera secuencia, la puerta se ha corrido un poco hacia la izquierda: esta imagen no es coherente con las demás, y es algo que el ojo percibe enseguida. Concluiremos, por lo tanto, que:

La relación anarmónica es la figura visual de la coherencia

* * *

- Conclusión -

Hemos afirmado que las cuatro propiedades del modelo propio - es decir: del ojo considerado como modelo - son la alineación, la regularidad, la redondez y la coherencia.

Luego, hemos mostrado, sucesivamente, que:

la relación armónica es la figura visual de la regularidad;
las cónicas son la figura visual de la redondez;
la relación anarmónica es la figura visual de la coherencia.

Ahora bien, la perspectiva central sobre el plano respecta estas tres características, y conserva también las alineaciones. Podemos concluir que modeliza perfectamente la mirada, en sus características fundamentales, siempre que se trabaje con ángulos de obertura limitados (por ejemplo: en los 60 grados propuestos por Piero della Francesca).

De aquí en adelante, siempre que habremos de estudiar un problema relativo a la geometría visual, lo podremos hacer, directamente y con toda confianza, mediante representaciones perspectivas.

Origen de las ilustraciones

p.138 iz.: - "Escorzo de dos figuras relacionadas", Edmé-Sébastien Jeaurat ("Traité de perspective", 1750), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

p.139 iz.: - Tres esquemas de Piero della Francesca, *in* "De prospectiva pigendi", Piero della Francesca, Casa Editrice Le Lettere, Firenze, 1984.

p.140 iz.:Página del tratado de Viator, *in* "De Artifi[cia]li P[er]spec[ti]va Viator Ter[ti]o", Pélerin, Jean dit Viator (ca 1435-1524), editado en Toul por Pierre Jacobi (tercera edición, 1521), BnF, RES-V-169.

p.141 iz.: -Dibujos del tratado de Du Cerceau, *in* "Leçons de perspective positive", Jacques Androuet Du Cerceau, editado en Paris por Mamert Patisson imprimeur, 1576, École Nationale Supérieure Des Beaux-Arts, LES 1171.

p.142 iz.: - "Escaleras", Sebastiano Serlio, "Segundo libro de perspectiva" (1545), *in* "Imágenes de la perspectiva", Javier Navarro de Zuvillaga, Siruela, Madrid, 1996.

p.143 iz.: - El patio de mármol, en Versalles (Philibert Le Roy, 1631), con la decoración de la fachada de Louis Le Vau y Jules Hardouin-Mansart (1668), *in* "El barroco", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 1997.

p.144 iz.: - " Flota normanda", Nouvelle acquisition latine 1390, fol. 7, Bnf, *ex* "Vita s. Albini", Angers, finales del siglo XI.
- " Frente a la invasión", Nouvelle acquisition latine 1390, fol. 7v, Bnf, *ex* "Vita s. Albini", Angers, finales del siglo XI.

p.145 iz.: - Cuatro miniaturas del Français 159, BnF, *ex* "Bible historiale", Guiard des Moulins, siglo XIV.

p.146 iz.: - Dos miniaturas del Français 49, BnF, *ex* "Historiae Alexandri Magni", Quintus Curtius, Flandes, finales del siglo XIV.

p.147 iz.: - Dos miniaturas del Français 50, BnF, *ex* "Speculum historiale", Vincentius Bellovacensis, Paris, 1463.

p.148 iz.: - Tres miniaturas del Français 68, BnF, ex "Guillaume de Tyr", Brujas, finales del siglo XV.

p.149 iz.: - Dos miniaturas del Français 91, BnF, *ex* "Histoire de Merlin", iluminadores: Maestro de Carlos de Francia y Jean Colombe, Bourges, 1480-1485.

p.150 iz.: - Dos miniaturas del Français 91, BnF, *ex* "Histoire de Merlin", iluminadores: Maestro de Carlos de Francia y Jean Colombe, Bourges, 1480-1485.

p.151 iz.: - Cuatro miniaturas de Jean Fouquet, in exposición monográfica de la BnF.

p.152 iz.: - "Banquete", Français 288, fol. 75, BnF.
- " Felipe II de Macedonia y Crebus", Français 9342, fol. 13, BnF, *ex* "Histoire d'Alexandre", Jean Wauquelin, Flandes, a mediados del siglo XV.

p.153 iz.: - " Évrard de Conty y los jugadores de ajedrez", Français 143, fol. 1, *ex* "Échecs amoureux", Évrard de Conty, iluminación: Robinet – Testard, Cognac, 1496-1498.

p.154 iz.: - "Infierno", Français 28, fol. 249v, *ex* "De Civitate Dei", Augustinus (s.), iluminador: Maître de l'échevinage, Rouen, finales del siglo XV.

p.155 iz.: - "Coronación de la Virgen", Français 28, fol. 273v, BnF, *ex* "De Civitate Dei", Augustinus (s.), iluminador: Maître de l'échevinage, Rouen, finales del siglo XV.

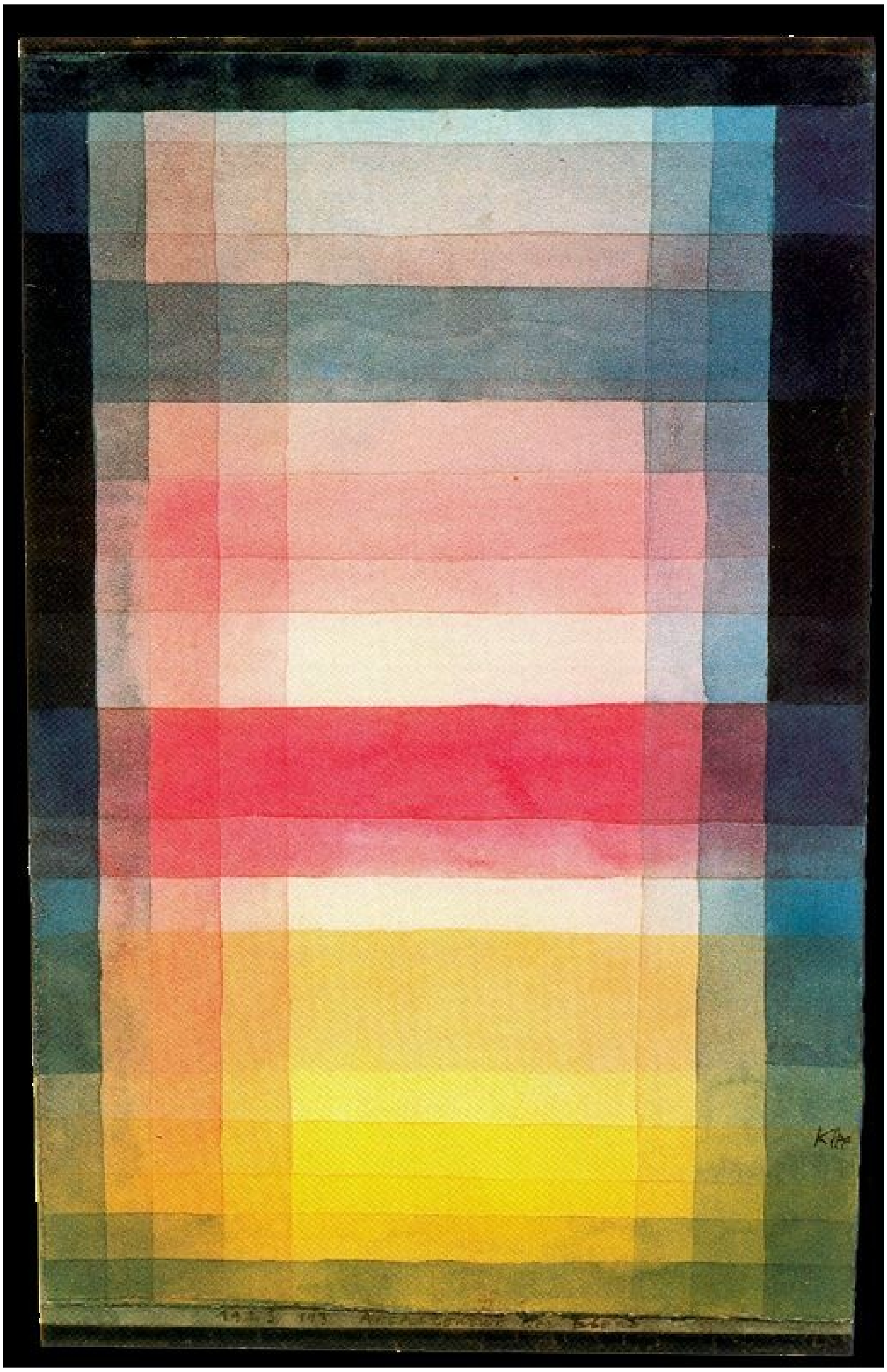
- "Coronación de la Virgen", Nouvelle acquisition latine 3093, fol. 76, BnF, *ex* "Horae ad usum parisiensem" (ó: "Très belles heures de notre dame de Jean de Berry", iluminadores: Maître du parement de Narbonne, Maître du baptême, frères de Limbourg, Paris, 1380 hasta principios del siglo XV.

p. 156 iz.: - "La última cena", Smith-Lesouëf 21, fol. 17v, BnF, *ex* "psalterium", iluminador: ¿Jacopino da Reggio?, Boloña, finales del siglo XIII.
- "Aparición del San Grial", Français 116, fol. 610v, BnF, *ex* "Queste del Saint Graal", iluminador: Évrard d'Espinques, Ahun (Francia), hacia 1470.
- "Caballeros buscando la silla de Tristán", Français 102, fol. 254, BnF, *ex* "Tristan de Léonois", Francia, hacia 1470.
- "Aparición del San Grial", Français 99, fol. 563, BnF, *ex* "Tristan de Léonois", iluminador: Évrard d'Espinques, Ahun (Francia), 1463.

p. 157 iz.: - Alegorías de la profundidad, de la deducción, del descubrimiento y de la memoria, Français 1174, BnF, *ex* "Douze dames de rhétorique", Bélgica, finales del siglo XV.

- 17 -

La ley logarítmica



A principios de los años veinte, Paul Klee ha trabajado mucho con capas superpuestas de acuarela. ¿Cómo resultan, visualmente, las gradaciones?

"Arquitectura de los niveles", Paul Klee (1923).

17. La ley logarítmica

En 1614, John Neper (1550-1617) publica su invención de los *logaritmos* (*"Logarithmorum canonis descriptio seu Arithmeticorum supputationum mirabilis abbrevatio, ejusque usus in utraque trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio, auctore ac inventore Joanne Nepero barone Merchistonii, Scoto"* – 1614).

Para su autor, y para sus primeros utilizadores, se trata esencialmente de una operación que facilita los cálculos, al transformar los productos en sumas y las razones en diferencias, ya que el logaritmo puede definirse como "un término de una progresión aritmética empezando por cero que corresponde a un término de una progresión geométrica empezando por uno".

En la palabra, reconocemos las raíces griegas *logos* (razón) y *arithmos* (número). De hecho, su utilización permite abandonar la expresión fraccional de los números *racionales* para una expresión decimal, la cual se generaliza muy naturalmente a los números *reales*: el invento del matemático escocés prefigura por lo tanto el abandono definitivo de la aritmética griega.

Sin embargo, habrá que esperar la revolución industrial, para que este gran vuelco cobre todo su sentido, y llegue a afectar directamente la observación del mundo sensible.

Félix Savart (1791-1841) aplica la función logarítmica a las razones musicales, otorgando a la octava un valor de 300 "savart". Entonces, el semitono templado, cuya razón correspondiente es la duodécima raíz de dos, vale 25 savart, el tono 50, la tercera menor 75, la tercera mayor 100,...

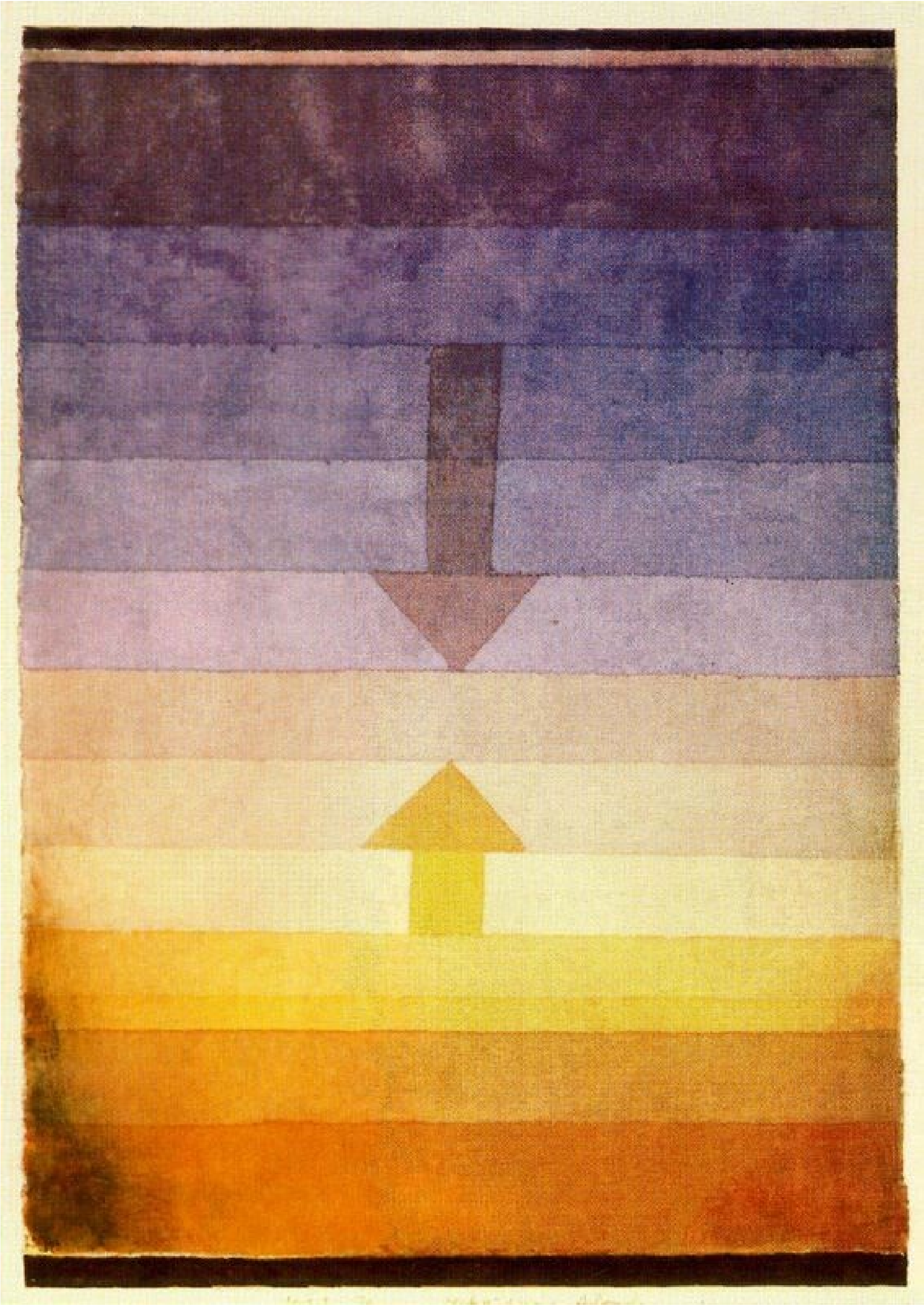
El savart facilita la expresión del gran descubrimiento griego, según el cual una progresión geométrica en el estímulo se percibe como una progresión aritmética: las razones frecuenciales, multiplicativas, se convierten así en intervalos de altura, aditivos. ¡Ironía de la historia! Mientras que los griegos, incapaces de generalizar esta observación, no supieron nunca qué hacer con ella - ni siquiera la expresaron claramente -, la propuesta de Savart llega demasiado tarde, en una época en que la ciencia ya se dedica casi exclusivamente a las energías. De hecho, la acústica naciente nunca adoptará esta unidad, y preferirá tratar las frecuencias directamente, según bandas de octavas[1]...

¿Y la música? En sus "Confesiones", Jean-Jacques Rousseau cuenta cómo su afición al arte del sonido lo lleva a proponer una nueva notación, numérica, cuya genial intuición choca con el espíritu conservador de los compositores de su tiempo, aferrados al pentagrama, sordos a la posibilidad de generalización y de demistificación que su propuesta encierra... hasta que un músico más benévolo le explica que los números no permiten visualizar los intervalos, e impiden la lectura rápida. Y es que los músicos siempre han sabido apreciar las incomparables ventajas de una buena representación gráfica...

Por despreciar tal advertencia, la ciencia decimonónica encerrará la percepción en un mundo de parámetros y valores numéricos referidos a valores absolutos (*exit* la relatividad perceptiva), reacios a la geometría (*exit* el estudio de la forma), contrastándolos con promedios de laboratorio (*exit* la sensibilidad individual construida por el esfuerzo, el estudio, la cultura y la admiración)...

No todo fue negativo en el vuelco de la Edad Contemporánea, que significó el abandono total de las proporciones por las ecuaciones, de la armonía por las energías. Recordemos, por ejemplo, que el mismo René Descartes - enseñado en el cuadrivio por sus profesores jesuitas - distinguía aún entre geometría continua y aritmética discreta: hizo falta mucho humo de antracita

[1] En la teoría de las escalas musicales, se utiliza aún la escala en *cents*, idéntica a la de Savart, salvo en que la octava contiene 1200 cents. El número n de cents que contiene el intervalo entre dos frecuencias f_1 y f_2 se calcula simplemente con la fórmula: $n = 3986 \log (f_2/f_1)$.



El problema visual correspondiente es el de la separación de las bandas, de la percepción del gradiente, de la dirección sugerida.

“Separación vespertina”, Paul Klee (1922).

para despejar completamente los horizontes modernos de los hálitos pergaminosos de las viejas lunas helenas...

La arquitectura, en especial, ganó en el cambio. Se despertó del sueño pictórico en que la habían hundido las teorías renacentistas. Ganó nuevas disciplinas - la acústica, la luminotecnia,... - impensables en el "Antiguo Régimen", donde la armonía había de regirlo todo desde arriba. Después de los precursores barrocos, se hizo cada vez más presente la preocupación por consideraciones energéticas, higienistas, ergonómicas.

Pero el nuevo coloso tenía pies de arcilla: las matemáticas decimonónicas relegaron progresivamente en un segundo plano el pensamiento geométrico, el estudio de las formas en el espacio. El resultado fue doble: un auge perezoso de las fórmulas estadísticas (tiempo de reverberación, temperatura de color), tan fáciles como insensibles, y una reacción geométrica, desesperadamente anacrónica, a través de las formas descriptiva (Monge) y proyectiva (Poncelet), y de "métodos geométricos" manuales, lentos y poco productivos (trazado de rayos acústicos, método de la fuente puntual en luminotecnia)...

A lo largo del siglo XIX, científicos honestos y razonables, como Young, Weber o Fechner, llegaron a ser considerados casi como heterodoxos, por conservar algo de su curiosidad perceptiva y no haber adherido completamente al positivismo cientificista imperante. En cambio, los mejores investigadores de la percepción (Lessings[1], Goethe[2], Hoffmann[3], von Kleist[4], Strindberg[5],...) se vieron obligados a justificar continuamente su curiosidad científica, al margen de su valor literario, frente a una corriente dominante que sólo sabía valorar lo cuantificable y directamente comprobable...

Wilhelm Eduard Weber y Gustav Theodor Fechner crearon una nueva disciplina (llamada a veces psico-física y otras psicología experimental), al enunciar que la ley logarítmica no sólo se aplica a la percepción de las frecuencias sonoras, sino también a la de las intensidades, tanto sonoras como luminosas:

"***La ley de Weber-Fechner : la medida en la mezcla***

Para obtener una escala graduada de grises, M. E. Chevreul, autor del famoso libro *Las leyes del contraste del color*, daba las siguientes instrucciones (de la traducción inglesa de 1868, página 5, párrafo 11) :

> Sobre una hoja de cartulina dividida en diez bandas, cada una de aproximadamente un cuarto de pulgada de ancho, extiéndase una capa uniforme de tinta china. Una vez seca, extiéndase una segunda capa sobre todas las bandas excepto la primera. Una vez seca la segunda, extiéndase una tercera sobre todas las bandas excepto la primera y segunda, y así sobre todas las restantes, hasta tener diez capas planas que aumentan gradualmente en profundidad de la primera a la última.

---

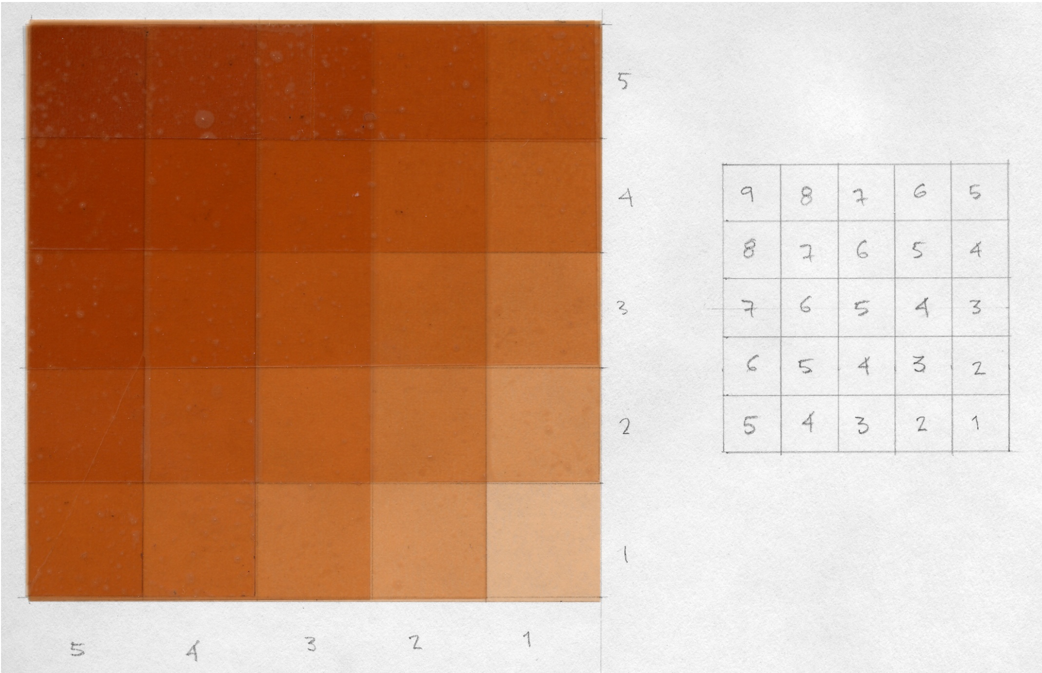
1 "Dramaturgia de Hamburgo", Gotthold Ephraim Lessing, versión castellana de Feliu Formosa, Publicaciones de la Asociación de Directores de Escena de España, Madrid, 1993. [Leer también el "Laocoonte"].

2 "Conversations de Goethe avec Eckermann", Johann Wolfgang von Goethe, versión francesa de Jean Chuzeville, nrf Gallimard, 1949. [Leer también la "Teoría de los colores"].

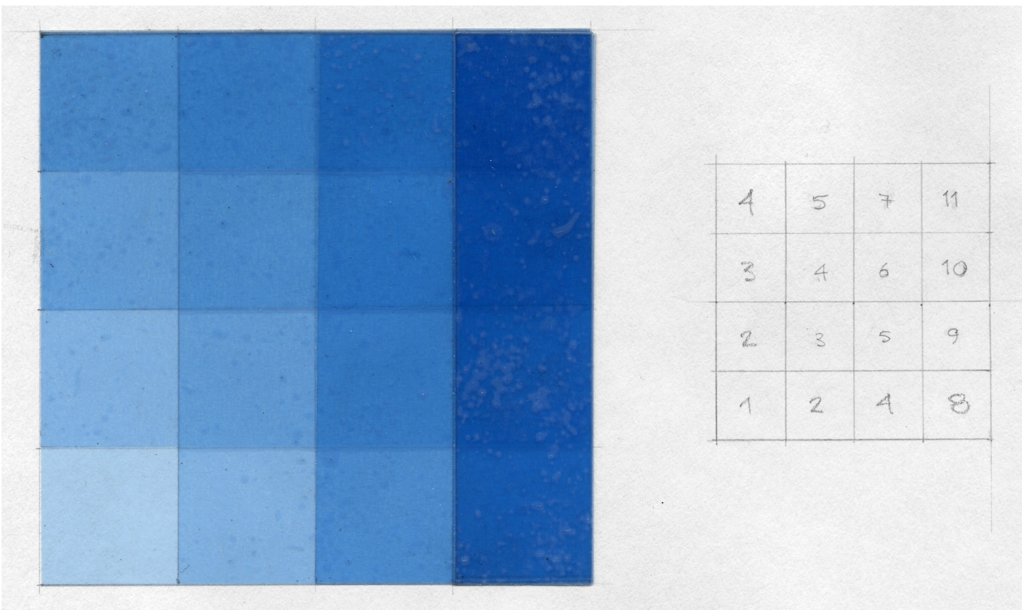
3 "Intégrale des contes et récits", Ernst Theodor Amadeus Hoffmann, versión francesa de Albert béguin, Madeleine Laval y otros, Editions Phébus, Paris, 1979 – 1983. [Leer, en especial, los textos referidos a la música instrumental].

4 "Sobre el teatro de marionetas", Heinrich von Kleist, versión castellana de Jorge Riechmann, Ediciones Hiperión, Madrid, 1988.

5 "Du hasard dans la production artistique", August Strindberg, L'Échoppe, 1990.



En el primer "cuadrado mágico", vemos cómo la intensidad luminosa, tras sufrir saltos importantes desde las casillas más claras, satura rápidamente en zonas oscuras casi iguales. En el segundo, comprobamos visualmente que la banda inferior es la que produce la mejor impresión de un paso constante en la intensidad. Es la que corresponde a una progresión geométrica.



"Dos cuadrados mágicos", el autor y J.R. Fernandez.

Todo esto suena muy convincente, tan convincente que uno se pregunta si alguien habrá dudado alguna vez que el resultado fuera el prometido, si alguien, incluido el propio M. Chevreul, habrá seguido alguna vez estas instrucciones.

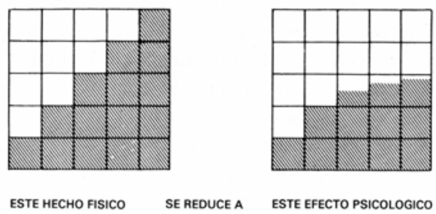
Todo esto se refiere, por supuesto, al color volúmico, pero, lo que es más importante, conduce también a una nueva comprensión de la mezcla cromática, una vez que se haya reconocido una sorpresa inevitable.

La sorpresa es que el «aumento de profundidad» gradual que se prometía no aparece -como esperaría la mayoría de la gente- en una sucesión de escalones iguales. Ni tampoco, cuando se trata de mezclar pigmentos, aparece una gradación igual cuando se va añadiendo continuamente una cantidad igual del mismo color .

En este caso, la aplicación continuada de dichas capas conduciría inevitablemente a un grado de disminución tal que el incremento inicial desaparecería en una saturación final, insuperable e invariable.

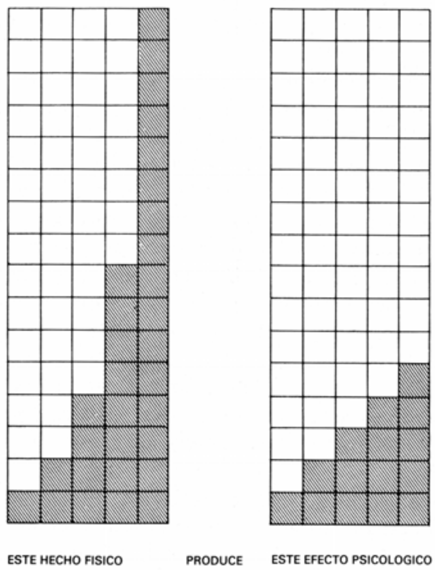
Analizando el método de Chevreul de aplicación de capas superpuestas se reconoce, no sólo una mezcla aditiva con respecto al color, sino también una mezcla substractiva con respecto a la luz.

Dicho en términos más precisos, se revela una progresión aritmética en ambas direcciones: y ambas son solamente progresiones físicas.



En los diagramas de la página siguiente se presenta este hecho físico mediante una fila de escalones ascendentes de igual altura y anchura, cuyo movimiento sigue una línea recta.

Como ya hemos dicho y se demuestra claramente en las acuarelas de Klee, el índice de incremento va decreciendo gradualmente. Por lo tanto, la diferencia de altura entre los escalones será cada vez menor. En consecuencia, la línea de dirección, que físicamente es recta, se convierte psicológicamente en curva, hasta acabar en una horizontal que representa la saturación, en la cual no puede haber ya incremento ni disminución.



Ello nos lleva a la pregunta: ¿qué se necesita para que en una mezcla se produzca una progresión visualmente constante?

La respuesta la descubrieron Weber (Wilhelm Eduard, 1804-91) y Fechner (Gustav Theodor, 1801-87). Se formula en la llamada ley de Weber-Fechner: la percepción visual de una progresión aritmética depende de una progresión física geométrica.

Tal como se explica en los diagramas, esto significa que, si los dos primeros escalones miden una y dos unidades de elevación, el tercer escalón no medirá sólo una unidad más, esto es, tres, en proporción aritmética, sino el doble, esto es, cuatro, en proporción geométrica. Los escalones sucesivos medirán 8, 16, 32, 64 unidades. Estos incrementos describen una curva ascendente que acaba en una recta vertical, que a su vez significa, una vez más, la saturación.

Sin embargo, la lectura de ese incremento geométrico describirá en nuestra mente una línea recta. Creemos y “sentimos” que leemos escalones de igual altura.

La progresión geométrica propuesta por Albers, comparada con la progresión aritmética explicada por Chevreul, no deja dudas visuales: mientras que aquella produce una impresión de paso casi constante, esta satura muy rápidamente.

"El experimento crucial", el autor y J.R. Fernandez.

Para demostrar esta sorprendente discrepancia entre hecho físico y efecto psíquico y, lo que es más importante, convencerse de ella a través de la propia experiencia, se recomienda el siguiente ejercicio:

Sobre un papel blanco, superponer capas muy claras y transparentes de un color muy poco denso; primero, como sugiere M. Chevreul, en progresión aritmética (1, 2, 3, 4, 5, etc. capas); luego, en una segunda fila sobre el mismo papel, en progresión geométrica (1, 2, 4, 8, 16, etc. capas). Ambas filas requieren escalones contiguos de igual anchura.

La comparación correcta de las dos filas -de incrementos aritmético y geométrico- exige precisión. Por ello se debe evitar la acuarela, ya que rara vez da capas homogéneas y siempre termina en contornos no sólo pesados, sino desigualmente pesados. Lo más aconsejable es el uso de láminas finas de acetato de las tintas más claras que haya, con reverso adhesivo que ofrezca las ventajas de montaje fácil y pegamento invisible. Hay varias marcas; como «Zip-a-tone», «Artype», «Cello-tak» [En España: "Normacolor", "Letrafilm", "Transplus", etc. *(N. de la T.)]*.

En caso de no disponer de este material, un papel translúcido muy fino (papel parafinado de sándwiches) podría demostrar -en transparencia- los dos efectos diferentes, observado frente a la luz.

Si se quiere hacer la demostración en un medio túrbido -con luz refleja-, las correspondientes capas de blanco finísimo sobre papel negro darán la prueba en dirección opuesta: los efectos muy diferentes del incremento o disminución aritmético y geométrico.

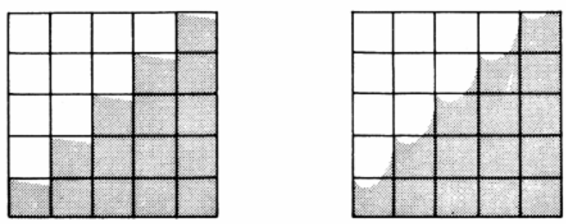
Estos estudios enseñan también que el "incremento decreciente" es visible en los límites que separan un escalón de otro: en un orden aritmético de mezclas contiguas los límites se van suavizando gradualmente, mientras que en un orden geométrico conservan igual nitidez.

Huelga decir que la exactitud de esta clase de estudios es sólo teórica. La existencia de leves imprecisiones materiales se traduce en aberraciones ocasionales de la norma.

Aunque la ley de Weber-Fechner permite "aumentos iguales" (de claridad y oscuridad, dentro de cada tonalidad concreta), es susceptible de desviación por la relatividad del color.

Si los escalones no son mucho más anchos que altos, visualmente no conservarán un perfil horizontal o recto, como sucede en el diagrama, a la izquierda.

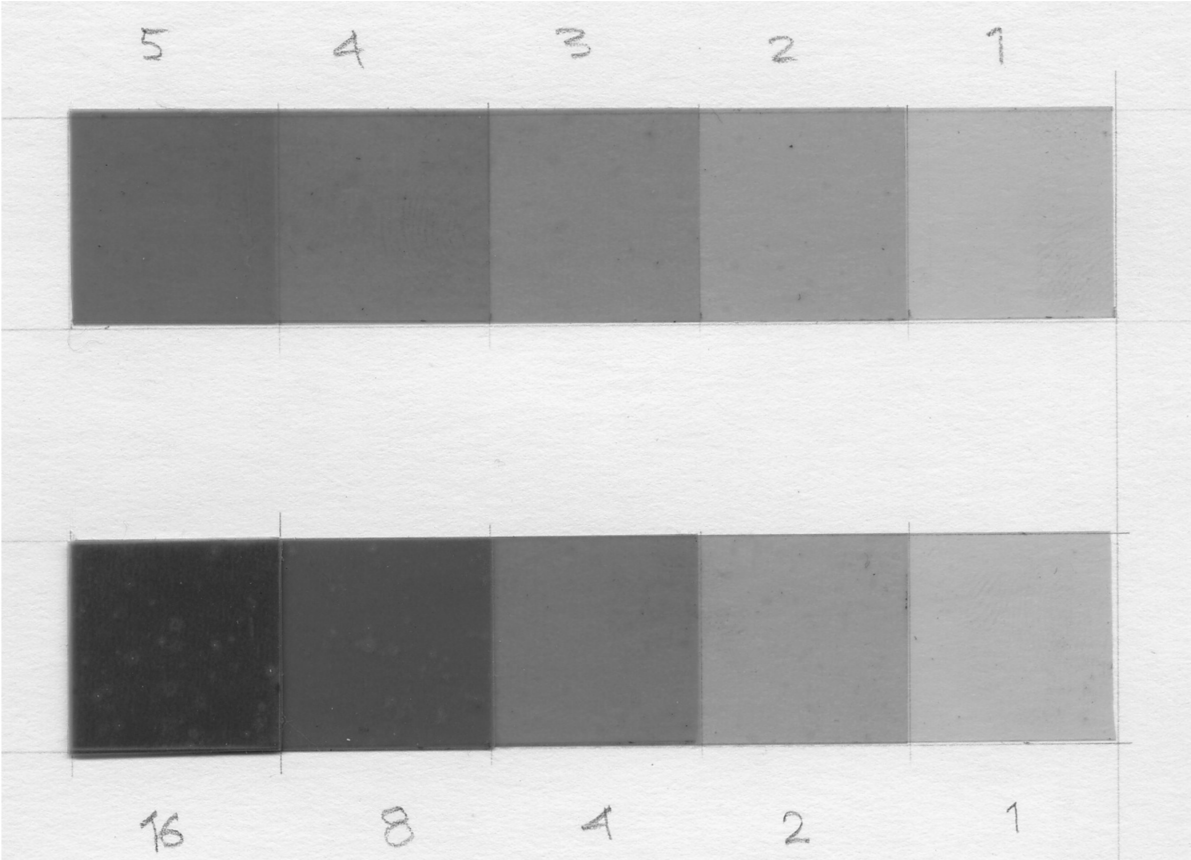
Si los escalones son más anchos se dará un efecto «de acanaladura» que recuerda las estrías de las columnas dóricas, como sucede en el diagrama, a la derecha.



LO QUE PERCIBIMOS EN REALIDAD

Se da una demostración convincente al aire libre de la ley de Weber-Fechner en las piscinas pintadas, por ejemplo, de azul. Por efecto de la reflexión, el agua aparece levemente teñida de azul. Siguiendo visualmente el descenso de los peldaños se aprecia fácilmente un incremento del azul. Dado que la distancia entre los peldaños es constante, lo que se va añadiendo son cantidades iguales de azul. Una vez más, la proporción física aritmética se percibe como proporción geométrica decreciente.

Si se comparan de arriba a abajo los bordes de los peldaños, aparecen gradualmente suavizados. Este efecto responde a un doble motivo: primero, como el incremento de azul reduce simultáneamente la luz, los perfiles que definen los peldaños aparecen menos claros. Segundo, como el incremento de azul también decrece, el contraste entre azules vecinos se reduce. Por consiguiente, la separación de los bordes de los peldaños se hace más borrosa. Ambos motivos se ajustan a la ley de Weber-Fechner y son independientes de las leyes de la refracción de la luz. Aunque la refracción de la luz origina también ilusiones en la percepción visual, presenta un principio completamente diferente desde el momento en que se refiere a un efecto óptico. La ley de Weber-Fechner explica un fenómeno perceptual.



14 28 42 56 70

Tras escanear la página anterior y pasarla a blanco y negro, podemos relevar los valores de intensidad y compararlos con una escala de grises informática. Desafortunadamente, no se pueden controlar los ajustes que las diferentes herramientas digitales operan automáticamente. En una ocasión, pude comprobar que la casilla de ocho capas resulta demasiado oscura, como lo perciben las miradas más experimentadas. Aquí, sin embargo, la comparación no es tan clara (otro escáner, otros resultados...).

Análisis del “experimento crucial”.

Es sorprendente y lamentable que la ley de Weber-Fechner sea casi desconocida entre los coloristas. Su importancia es más apreciada en la física: en la astronomía, la electricidad y la acústica, y ha quedado también demostrada en la psicología, no sólo en la percepción de la luz y el color sino igualmente en la percepción del sonido, el peso y la temperatura.

La presentación que damos sobre estas líneas del importante descubrimiento de Weber-Fechner se ha simplificado visual y verbalmente con vistas a una más fácil comprensión, pero hay que subrayar que todos los cálculos de Weber-Fechner están hechos en progresiones logarítmicas que teóricamente no alcanzan puntos de saturación."

Josef Albers[1]

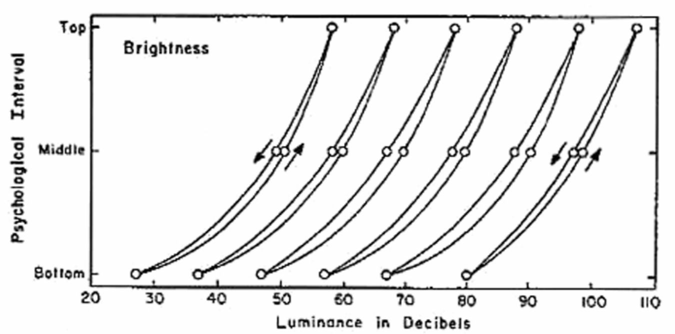
Si repetimos el experimento propuesto por Josef Albers, con láminas de acetato o con capas de acuarela[2], comprobamos que el ojo queda conforme con la ley logarítmica, aunque no de manera exacta: en la serie de 1, 2, 4, 8, 16 capas, la casilla de ocho capas parece siempre excesivamente oscura, cual sea el medio empleado. El ordenador - que aproxima sus escalas de grises mediante un "factor γ", es decir: una ley de potencia aplicada a la intensidad eléctrica - confirma esta impresión.

En mi opinión, eso significa simplemente que las características de la percepción humana no han de obedecer a una ley matemática estricta. Nuestra mente percibe las intensidades luminosas y sonoras de una forma particular, que se describe bastante bien mediante una analogía con la función logarítmica, sin que ésta forme ninguna "ley": estamos estudiando un comportamiento, que responde a cierta propiedad perceptiva, la cual tiene una precisión de tipo perceptivo, y no aritmético. Nuestros sentidos sólo emiten juicios comparativos, como "distinto", "parecido", "conforme" o "indiscernible" (la indiscernibilidad fue justamente el criterio elegido por Fechner).

En 1960, S. S. Stevens, entonces director de los laboratorios de psicología de la universidad de Harvard, leyó, en un simposio celebrando los cien años de la ley de Fechner, un artículo que se convirtió de inmediato en un clásico de la psico-física, muchos autores posteriores llegando a añadir su nombre al mencionar la "ley de Weber-Fechner-Stevens". El artículo, titulado "Para honrar Fechner y rechazar su ley"[3], tiene el siguiente subtítulo: "Una función de potencia, no una función logarítmica, describe la característica operativa del sistema sensorial".

Vale la pena resumir la situación.

Al parecer, Weber se había limitado a estudiar la sensación de peso producida por distintas masas sujetadas por los encuestados. Deducía de ello la constancia de la razón $\Delta I / I$, donde I es la magnitud inicial y ΔI el mínimo cambio notable. La ley de Weber explica, por ejemplo, porqué las estrellas, que producen un incremento constante de luminosidad en el cielo, se ven de noche, y no de día, cuando la luminosidad general es mayor[4].



La ley de Fechner, en cambio, reza que la magnitud percibida es proporcional al logaritmo de la intensidad del estímulo físico.

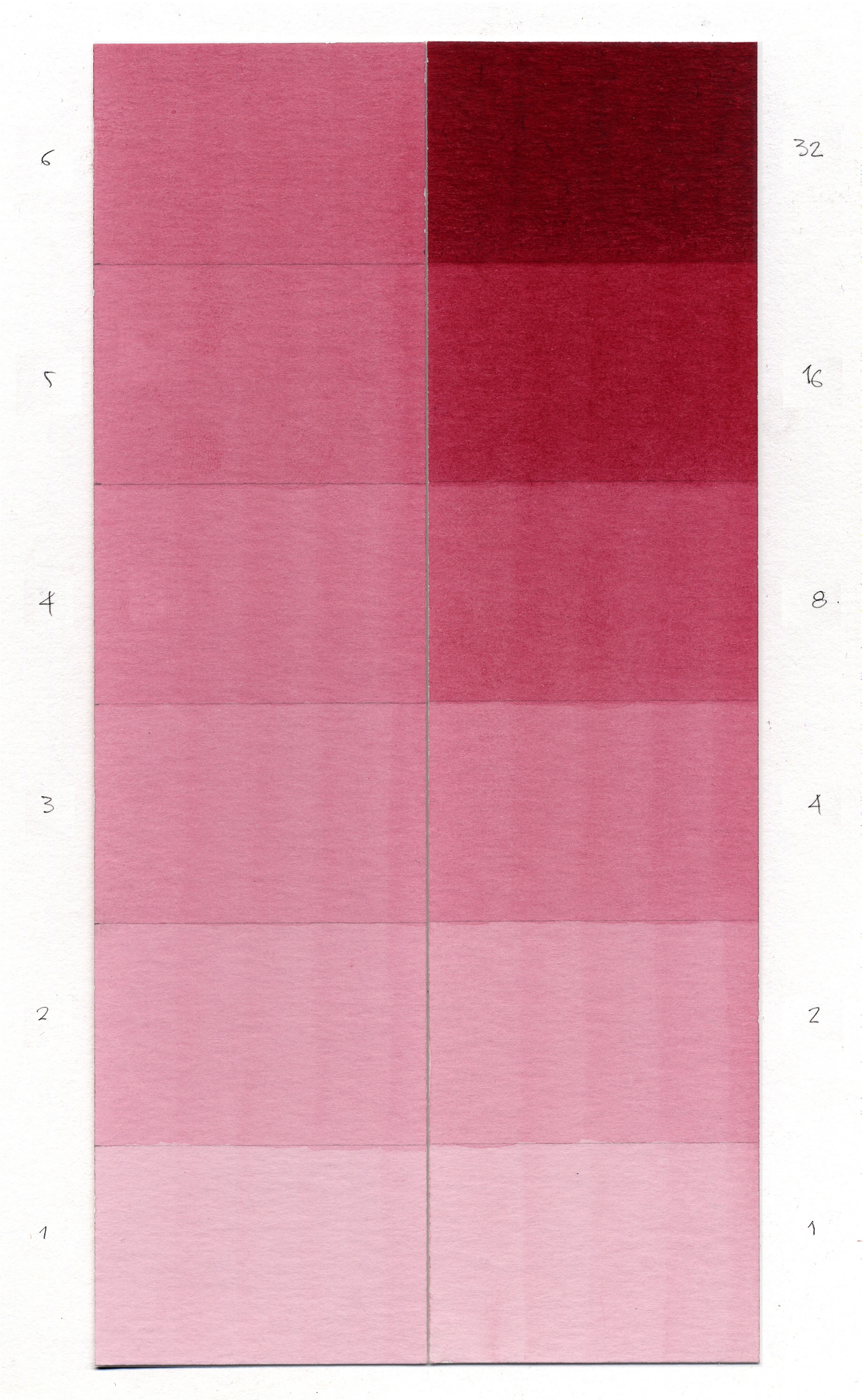
En su artículo, Stevens empieza por mostrar la inexactitud de esta afirmación, cuando se pregunta a los

[1] "La interacción del color", Josef Albers, 1963, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Forma, 1979, p. 73-79

[2] Los experimentos aquí reproducidos han sido realizados por J.R. Fernandez, arquitecto y profesor de dibujo.

[3] "To Honor Fechner and Repeal His Law", S. S. Stevens, Science, Vol. 133, pp. 80-86, 13/01/1961.

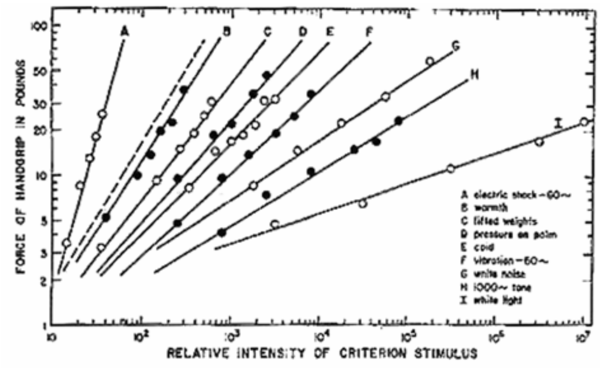
[4] "Color Appearance Models", Mark D. Fairchild, Addison Wesley Longman, Inc., 1997. [En las páginas 45-48, se encuentra un buen resumen de las teorías de Weber, Fechner y Stevens].



Con mucha paciencia, sumando capas de acuarela, se obtiene un resultado equivalente al de las capas de acetato. Es lo que hacía Paul Klee.

“Composición en acuarela”, realizada para el autor por J.R. Fernandez.

encuestados que determinen un gris equidistante de un blanco y de un negro dado. No sólo las respuestas no forman exactamente una media geométrica con los dos extremos, sino que varían ligeramente según el orden en el cual se presentan el blanco y el negro. La figura muestra el fenómeno de histéresis resultante.



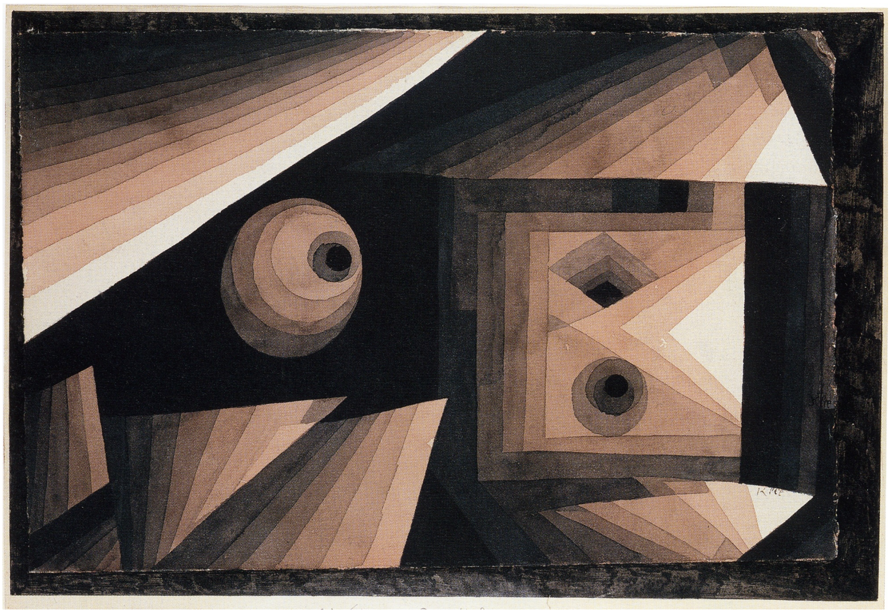
Estudiando la relación entre la intensidad del estímulo físico y la magnitud percibida en más de treinta tipos de percepción, Stevens encuentra que los resultados producen líneas rectas, con diferentes pendientes, en un diagrama con doble escala logarítmica, como se ve en la figura: es la expresión que toman en coordenadas "log-log" las funciones de potencia, cuyos valores de exponente determinan la pendiente de la representación recta en el diagrama.

Stevens propone entonces la función de potencia siguiente, según la cual la magnitud subjetiva ψ crece como el estímulo φ elevado a la potencia n (donde φ_0 representa el umbral efectivo de percepción): $\psi = k\,(\varphi - \varphi_0)^n$.

En el caso de la intensidad luminosa, el exponente n es evaluado a 0.33, produciendo una curva parecida a la de la función logarítmica, pero algo menos acentuada. Esta evaluación confirma lo que hemos podido observar, al realizar los experimentos de Albers con acrilatos o acuarelas: la función logarítmica no reproduce exactamente la propiedad visual.

Stevens busca luego los valores del exponente n para toda una serie de percepciones; sus resultados están listados en la siguiente tabla:

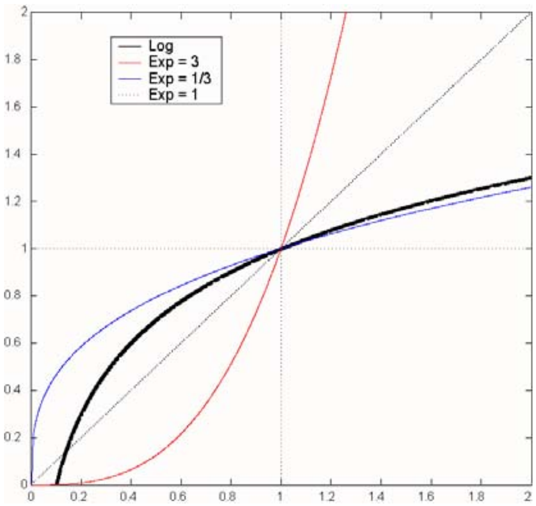
Continuum	***Exponent***	***Conditions***
Loudness	0.6	Binaural
Loudness	0.54	Monaural
Brightness	0.33	5° Target, dark-adapted eye
Brightness	0.5	Point source, dark-adapted eye
Lightness	1.2	Reflectance of gray papers
Smell	0.55	Coffee odor
Smell	0.6	Heptane
Taste	0.8	Saccharine
Taste	1.3	Sucrose
Taste	1.3	Salt
Temperature	1.0	Cold, on arm
Temperature	1.6	Warm, on arm
Vibration	0.95	60 cy/sec. on finger
Vibration	0.6	250 cy/sec. on finger
Duration	1.1	White-noise stimulus
Repetition rate	1.0	Light, sound, touch, shocks
Finger span	1.3	Thickness of wood blocks
Pressure on palm	1.1	Static force on skin
Heaviness	1.45	Lifted weights
Force of handgrip	1.7	Precisison hand dynamometer
Autophonic response	1.1	Sound pressure of vocalization
Electric Shock	3.5	60 cy/sec through fingers



Una simple gradación puede sugerir la profundidad. Controlar la gradación, es controlar la perspectiva.

“Rot-Stufung [Gradación en rojo]”, Paul Klee (1921).

Incluso en inglés, esta lista puede parecer algo picaresca, y exagerada en su precisión: el olor del café o del heptano; el sabor del azúcar o de la sacarina, los brillos, pesos y otros choques eléctricos determinan valores muy distintos del exponente.



Como lo muestra el gráfico, la función de potencia se acerca a la función logarítmica cuando su exponente es pequeño (sin nunca ofrecer, empero, un perfil tan acentuado), se hace lineal cuando éste vale 1, y tiende hacia una exponencial cuando éste se hace grande.

En el fondo, la función de potencia ofrece los primeros términos de un desarrollo en serie, y puede, por lo tanto, adaptarse a cualquier tipo de comportamiento.

Carece luego de sentido llamar "ley" la propuesta de Stevens, pues comprobamos que su amplio abanico de percepciones muestra todos los comportamientos posibles (¡desde n = 0.33 hasta n = 3.5!).

En cambio, Stevens evacua las frecuencias del sonido (su ley de potencia se mostraría allí ineficaz, ya que sabemos que, en este caso, hay una ley estrictamente logarítmica, que proviene de la estructura armónica del sonido, con sus múltiples exactamente enteros). Sólo menciona las distancias para afirmar que su percepción, mientras sean pequeñas (¡y, desde luego, en posición frontal!), es perfectamente lineal.

Al limitarnos al estudio de los sentidos vinculados con la expresión a distancia (el ojo y el oído), abandonaremos este callejón sin salida, y daremos el sentido profundo de una propiedad esencial de la percepción, que se ha perdido aquí entre los vanos números de la malograda psico-física...

Origen de las ilustraciones

p.159 iz.: - "Arquitectura de los niveles", Paul Klee (1923), acuarela sobre lápiz en papel, todo sobre cartón, 28 x 17.2 cm, Colección Berggruen en los SMBPK, *in* http://pintura.aut.org.
p.160 i z.: - "Separación vespertina", Paul Klee (1922), acuarela, 33.5 x 23.5 cm, colección Félix Klee, Berna, *in* http://pintura.aut.org.
p. 161 iz.: - "Dos cuadrados mágicos", experimentos gráficos realizados para el autor por J.R. Fernandez.
p. 162 iz.: - "El experimento crucial", realizado para el autor por J.R. Fernandez.
p. 163 iz.: - "Análisis del experimento", dibujo propio.
p. 164 iz.: - "Composición en acuarela", realizada para el autor por J.R. Fernandez.
p. 165 iz.: - "Rot-Stufung [Gradación en rojo]", Paul Klee (1921), acuarela sobre papel sobre cartón, 21.4 x 31.1 cm, Staatliche Museen zu Berlin, Nationalgalerie. Sammlung Berggruen, Berlín, *in* "Analogías musicales", Javier Arnaldo, Fundación Caja Madrid & Museo Thyssen-Bornemisza, Madrid, 2003.

- 18 -

El escorzo

Europa ha conocido otras formas geométricas, de las que aún no hemos hablado, otros modos de pensar en el espacio, cuya influencia se ha dejado sentir en la producción ulterior de imágenes, esculturas y arquitecturas. Una de ellas, esplendorosa, viene de Irlanda, refugio de la cultura celta. El “Libro de Kells” la manifiesta en su mejor nivel: increibles “arabescas”, que no deben nada a los árabes.

Una página del “Libro de Kells”, (Irlanda, hacia 800).

18.
El escorzo

Estableceremos ahora la propiedad fundamental de la percepción.

Si bien los grandes pensadores de los últimos dos mil quinientos años se han acercado una y otra vez a su enunciado, si bien disponían, desde el principio, de todas las nociones necesarias para entender su principio y sentir su alcance, lo cierto es que nadie la ha formulado con la suficiente claridad, ni la ha proclamado en toda su generalidad.

Intentaré explicar las causas de esta larga ceguera, de esta larga sordera, pero no podría introducir a ella mejor de lo que hizo Tucci Manetti hablando de Brunelleschi: *no se sabe si los antiguos, los de hace varios cientos de años, la conocían y la practicaban con razón. Pero si la practicaban según la regla que no sin motivo hemos dicho ser ciencia, como aquí lo haremos, el que habría podido enseñárnosla ha muerto hace cientos de años. Y esta regla no está escrita en ninguna parte: y si lo está, no se la comprende...*

Todo empezó, probablemente, con el estudio de unas cuerdas tensadas, que condujo los griegos (y otros pueblos antes de ellos) a descubrir que las razones se perciben como intervalos, es decir: que una progresión geométrica en las frecuencias del sonido se convierte, para el oído, en una progresión aritmética.

Al parecer, los filósofos antiguos nunca pensaron en generalizar esta ley a otras dimensiones de la percepción, si bien hubiesen podido percatarse de que la fuerza del sonido parece incrementarse regularmente cada vez que un coro duplica sus efectivos, o que el ojo siente un aumento semejante en la iluminación cada vez que se duplica el número de velas en un recinto cerrado...

Lo cierto es que los griegos prestaban poca atención a estas energías, que no podían cuantificar con la necesaria precisión. Los físicos del siglo XVII prolongaron la ciencia antigua, sin ruptura metodológica, y siguieron pensando, esencialmente, en proporciones. Hizo falta esperar la revolución industrial, para que las energías cobrasen más importancia, y que las ecuaciones reemplazaran paulatinamente el antiguo sistema de las mediedades: eso fue el gran vuelco: cambiar una meta (el "equilibrio" o "armonía") por otra totalmente distinta (la precisión infinitesimal de la geometría diferencial y el ahorro termodinámico).

Entonces, nacieron ciencias nuevas, como la acústica y la luminotecnia, que jamás hubieran podido imaginarse en el entorno del pensamiento antiguo. Estas nuevas disciplinas se ordenaron directamente en torno a la medición cuantitativa. La función logarítmica, propuesta primero por Neper, sirvió para describir la ley atribuida a Fechner: en las intensidades acústicas y luminosas, una progresión geométrica en el estímulo también se traduce por una progresión aritmética en la percepción.

En la acústica, se utilizó la función logarítmica para tener en cuenta este efecto, tanto en las intensidades (el decibelio) como en las frecuencias (el savart). En la luminotecnia no, porque los intereses económicos (expresables en vatios) siempre superaron las inquietudes perceptivas...

Se dejó de lado el aspecto frecuencial del sonido: en el artículo de Stevens, se habla de un gran número de fenómenos perceptivos a los cuales se aplica la ley de Fechner, casi todos energéticos.

Eso falsifica mucho la interpretación de la ley: en los aspectos energéticos, hay siempre un umbral inferior, de sensibilidad, y otro, superior, del dolor. Así, llegamos a creer que esta ley permite protegernos de las energías intensas, y no es este su sentido.

Lo único de que hay que protegerse, es del exceso de información: los sentidos no nos sirven para investigar, sino para sobrevivir; no cuentan, distinguen; y más vale que lo hagan en la más amplia ventana perceptiva posible, pero con una sensibilidad variable. Por ejemplo: distinguir en el claroscuro de la noche; ahora bien, si la misma sensibilidad se llevara a plena luz del día, el ojo se cancelaría en el exceso de matices, de información.

En la iluminación irlandesa, las rectas afirman la horizontalidad y la verticalidad, pero se combinan muy ingeniosamente con sofisticadas generaciones curvas. Los colores puros afirman sus contrastes, y penetran la caligrafía, incluida en el dominio geométrico del espacio plano.

Cuatro páginas del "Libro de Kells", (Irlanda, hacia 800).

Si por otra parte pensamos, como Aristóteles, en términos de proporción, parece lógico preguntarse si el escorzo visual de las distancias - que funciona también entre los dos umbrales de la cercanía y de la lejanía, donde la vista queda abolida - obedece a la misma ley. Pero la aritmética nos da una repuesta tajante: ¡no!

En efecto, en cuanto a la percepción visual de las distancias, no podemos decir que una progresión geométrica en el fenómeno se percibe aritméticamente...

Para demostrarlo, y luego en todo este capítulo, utilizaremos la proyección central sobre el plano como modelo de la mirada. Un modelo en el cual hemos aprendido a confiar.

Sean cuatro puntos A, B, C y D, en progresión aritmética de paso *p*, ubicados en:

$x, x + p, x + 2p, x + 3p.$

Su relación anarmónica es:

$(ABCD) = (CA/CB) / (DA/DB) = (2\ p / p) / (3\ p / 2\ p) = 4/3$

Sean sus imágenes A', B', C', D', en progresión armónica, ubicadas en:

$1/x, 1/(x + p), 1/(x + 2p), 1/(x + 3p)$

Comprobamos entonces la conservación de la relación anarmónica:

$(A'B'C'D') = 4/3$

Notamos que el valor de esta relación es independiente del paso de la progresión aritmética.

Sean cuatro puntos E, F, G, H, en progresión geométrica de razón r, ubicados en:

$x, r\ x, r^2\ x, r^3\ x.$

Con la misma definición de la relación anarmónica, comprobamos que:

$(EFGH) = (r + 1)^2 / (r^2 + r + 1)$

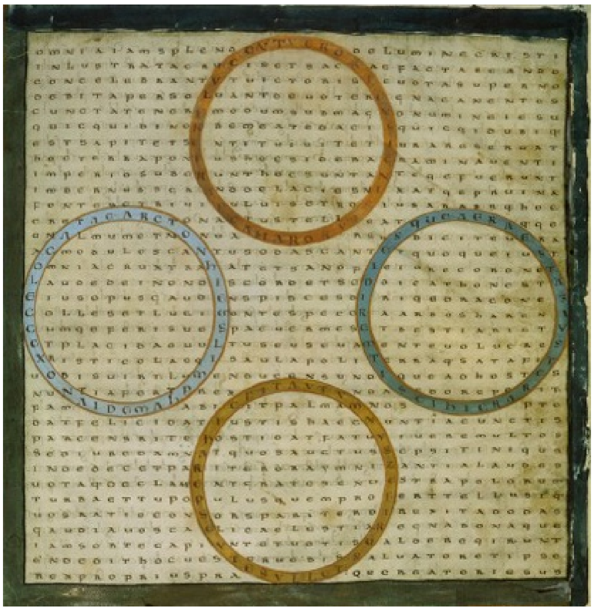
Esta vez, la relación sí depende de la razón. Si imponemos que sea igual a 4/3, encontramos que la razón debe ser igual a 1. Salvo si los cuatro puntos están confundidos, no existe, luego, ninguna puntual en progresión aritmética cuya imagen pueda ser una puntual en progresión geométrica, y recíprocamente.

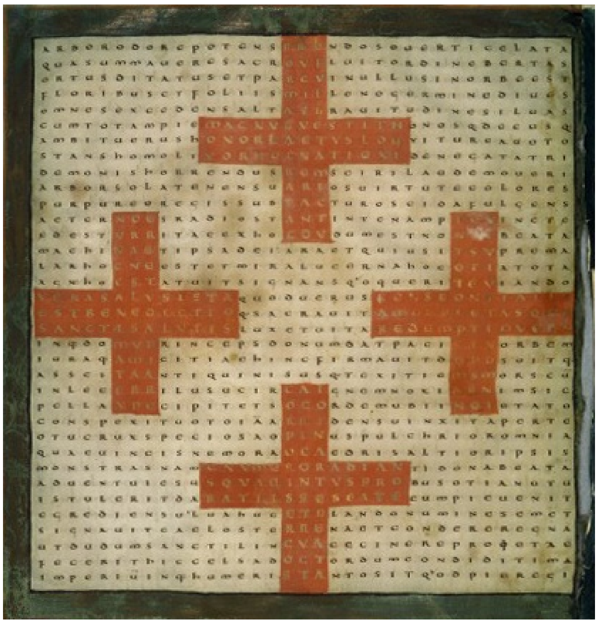
Q.E.D.

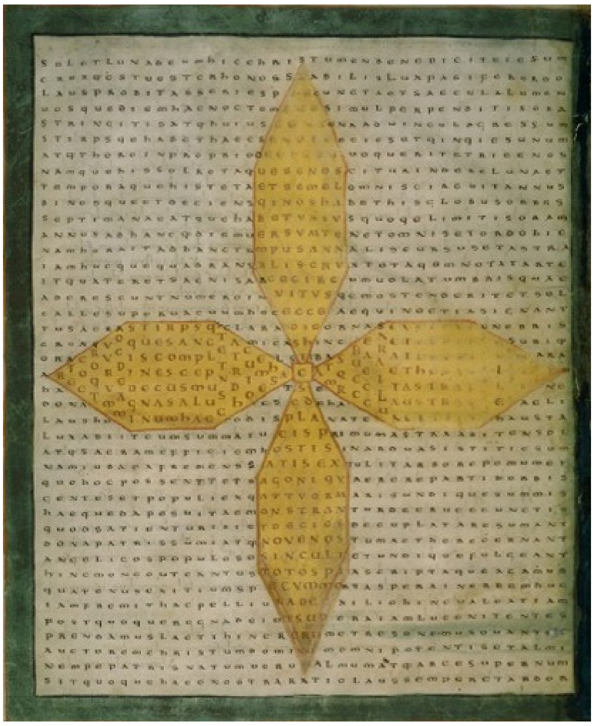
Ahora bien, esta demostración negativa, puramente geométrica, estaba al alcance de los renacentistas, y de todos los que piensan, como los pitagóricos, con números y proporciones. De hecho, sólo la percepción frecuencial del sonido, precisamente la que estudiaron los pitagóricos, parece regirse por una ley estrictamente logarítmica, porque la estructura armónica del sonido es aritméticamente rigurosa: sus intervalos corresponden a razones exactas.

¿Y qué hay de la ley de Weber-Fechner aplicada a las intensidades? El mismo Stevens nos muestra que no es nada precisa: se trata de un comportamiento. Por esta razón, él utiliza funciones de potencia, que son más dúctiles y calibrables.

La percepción de las intensidades sonoras debe ser, en su parte fisiológica, mecánica: un amortiguador sería la figura conveniente de la ley. El ojo es más complicado, por la escala de la luz, mucho más pequeña, cuántica. Y hay diferentes visiones (de día, de noche, intermediaria) que lo complican todo.







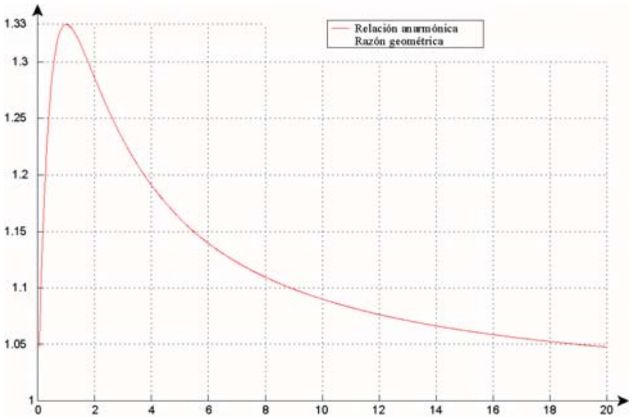
Contemporáneo de Carlomagno y de Luís el Piadoso, Rabano Mauro, reformador del monasterio de Fulda, en Alemania, hace de puente entre Isidoro de Sevilla - considerado a menudo como el "último de los antiguos" - y lo que llegará a ser la escolástica medieval. En el caso de este manuscrito, podríamos hablar de una "geometría hermética", quizás deudora de las especulaciones judías, o de un sueño neopitagórico...

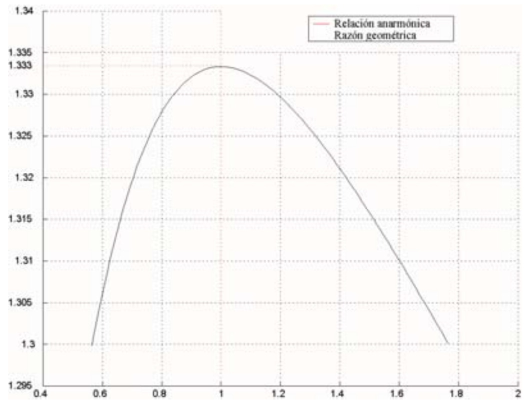
La cruz, como símbolo de la creación, de la incarnación, y del tiempo; Rabano Mauro adorando la cruz (manuscrito realizado en el monasterio de Fulda, siglo IX).

Entonces, ¿porqué no investigar el espacio visual de la misma forma, buscando un comportamiento en vez de una ley aritmética?

No buscamos una fórmula matemática, sino una propiedad perceptiva.

El siguiente gráfico (a la izquierda) muestra el valor de la relación anarmónica para razones de una progresión geométrica variando entre 0.01 y 20 (corresponde a la ecuación anteriormente establecida):



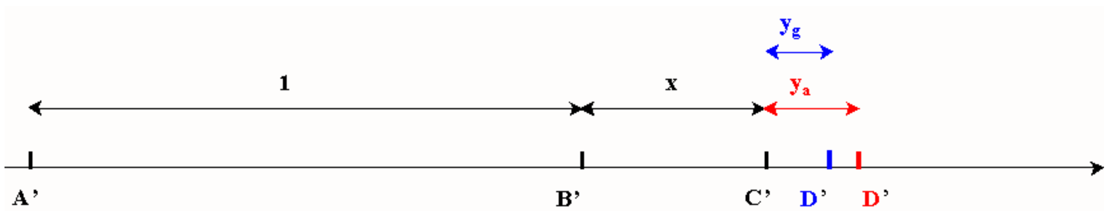


Cuando la razón de la progresión geométrica tiende hacia 0 o hacia el infinito, la relación anarmónica correspondiente tiende hacia 1. La relación tiende hacia la de una progresión aritmética (4/3) cuando la razón tiende hacia 1. Si la razón de la progresión geométrica está comprendida entre 0.565 y su inverso 1.77, la relación anarmónica de los puntos es superior a 1.3; podemos luego esperar que esta progresión se parezca a la proyección central de puntos equidistantes. La ilustración de la derecha presenta un detalle del diagrama anterior, en la zona interesante.

Ahora bien, existe una regla no escrita de la arquitectura que reza que una progresión geométrica, para ser manejable, debe tener una razón de este orden: seguramente no superior a dos...

- Variación de posiciones sobre una recta -

Sean tres puntos *A*, *B* y *C* igualmente espaciados sobre una recta, y sean sus imágenes por proyección central *A'*, *B'* y *C'*; definiremos como unitaria la distancia entre *A'* y *B'*, y notaremos *x* la distancia entre *B'* y *C'*. ¿A qué distancia de *C'* se halla el punto *D'*, en el caso de que los puntos estén en progresión geométrica? ¿Y en el caso de que le relación anarmónica de los puntos imágenes siga igual a la de los puntos iniciales (es decir: 4/3)?



La razón de la progresión geométrica A', B', C' es:

B'C'/ A'B' = x / 1 = x

La ondulación generadora, que nos recuerda inevitablemente la idea moderna de los "fractales", se despliega en azul, blanco y rojo, en estas visiones apocalípticas, donde una naturaleza atormentada, quizás deudora del grafismo oriental, participa a la destrucción de toda la obra humana (del ángulo recto).

Dos ilustraciones del Apocalipsis, por el Maestro de Sarum, Salisbury, hacia 1250.

Por consiguiente, si prolongamos la progresión hasta D', este punto se hallará a una distancia de C' igual a:

$Y_g = x^2$

Si les cuatro puntos se ubican en una relación anarmónica de 4/3, obtenemos que la distancia de C' a D' es igual a:

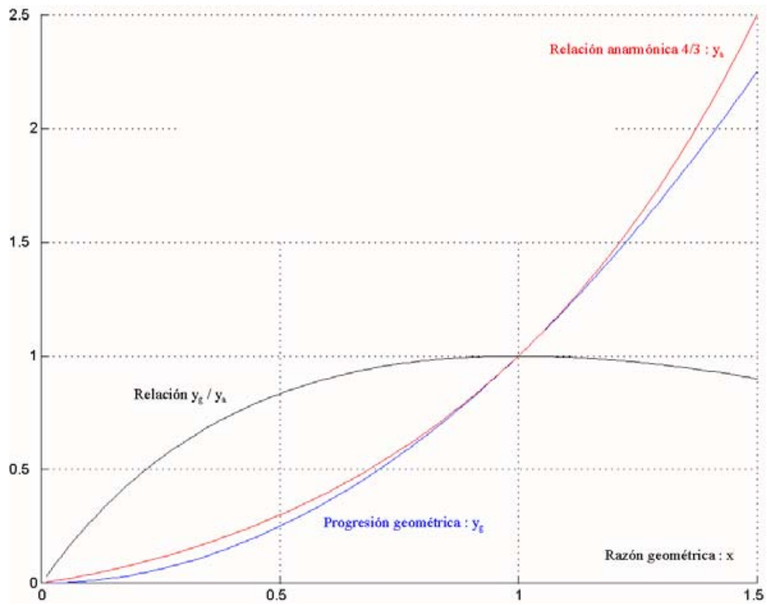
$y_a = x\,(x+1)\,/\,(3-x)$

Observamos que si x vale 3, el siguiente punto de la progresión armónica se sitúa al infinito, lo que se verifica fácilmente, comparando la progresión aritmética:

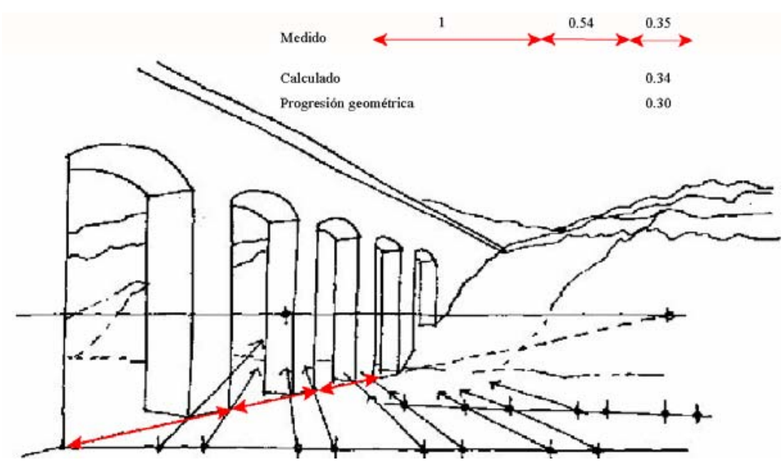
…,3, 5/2, 2, 3/2, 1, 1/2, 0 con su correspondiente armónica …,1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1, 2, ∞

donde la diferencia entre 2 y 1 es el triple de la diferencia entre 1 y 2/3: el siguiente término, efectivamente, es infinito.

Como lo indica el diagrama siguiente, el intervalo *C'D'* es siempre mayor para la progresión armónica que para la geométrica. Las dos curvas son tangentes cuando la razón geométrica x es igual a 1.



Estos resultados se comprueban sobre un dibujo realizado a mano alzada, que ilustra la manera tradicional utilizada para trasladar a la perspectiva unos intervalos regulares ("regla de la cuarta proporcional"). Pese a la imprecisión del dibujo agrandado, vemos, por una parte, que la proporción armónica está bien respetada y, por otra parte, que los arcos del puente dibujado están casi en progresión geométrica.



El color verde juega aquí un papel dramático, muy alejado de las connotaciones tranquilizadoras y esperanzadas que suele atribuirle la mirada moderna. La asociación verde-azul-roja, muy dinámica, ha acompañado gran parte de la historia de la iluminación occidental, por lo menos desde el siglo XIII hasta Jean Fouquet.

Dos ilustraciones del Apocalipsis, por el Maestro de Sarum, Salisbury, hacia 1250.

Para convencernos de la validez de la ley logarítmica en el caso de las intensidades luminosas, hemos realizado el experimento propuesto por J. Albers, sumando capas de acetato translúcido. Nos deja dos resultados muy claros:

1- Con 1, 2, 3, 4, 5 capas (progresión aritmética), el ojo percibe una disminución de intervalo en cada paso, sintiendo un efecto de saturación.

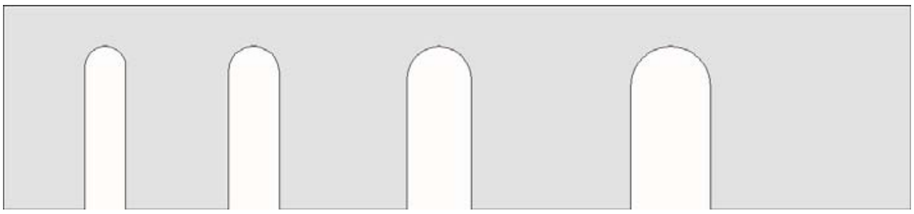
2- Con 1, 2, 4, 8, 16 capas (progresión geométrica), el ojo percibe un intervalo constante.

Este experimento se revela crucial, en el sentido de que convence el observador, de una forma simple e indiscutible, de que una progresión geométrica en el estímulo se percibe como aritmética (caso 2).

Para trasladar este experimento a la dimensión espacial de la mirada, deberemos inhibir nuestro hábito en interpretar inconscientemente la perspectiva central, que nos hace reconocer inmediatamente en un escorzo armónico la marca de la regularidad. En cuanto a las intensidades, el ojo se muestra más ingenuo: no ha aprendido a interpretar la información energética y a reconocer en su percepción atenuada de la serie aritmética (caso 1) la regularidad que realmente encierra. Por lo tanto, al estudiar la perspectiva, habremos de confiar en las indicaciones de la regla más que en el ojo, pronto a "corregir" la imagen para reconocer en ella la estructura geométrica más simple posible.

El equivalente del primer caso se muestra en la página anterior, en la figura del puente, cuyos arcos equidistantes se escorzan en la perspectiva. Hemos visto, midiendo en este dibujo, que la progresión armónica resultante es casi geométrica, como en el caso de las intensidades: si prolongáramos el puente, los intervalos disminuirían cada vez más rápido en el dibujo, obteniendo hacia el horizonte el mismo efecto de saturación que manifiestan las casillas de acetato.

Ahora bien, para construir un equivalente al secundo caso, tendremos que imaginar un puente cuyos arcos estén realmente en progresión geométrica, como las capas de acetato cuyo número se va duplicando a cada paso. Sin embargo, no elegiremos una razón 2, porque sabemos ya que sería exagerada. Propondremos el puente de razón 1.25 que la siguiente figura muestra en vista frontal.

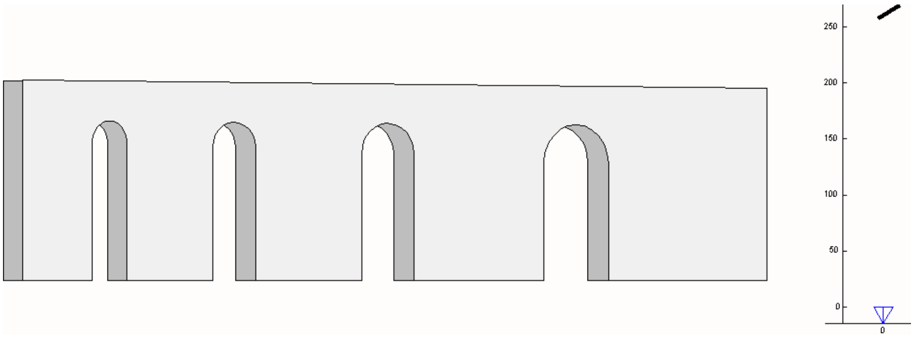


En esta vista, desde luego, la progresión geométrica se preserva: el escorzo es nulo, y el efecto perspectivo también. Visualmente, se trata de un "caso degenerado". ¿Qué pasa ahora si miramos el mismo puente en posición oblicua (30°), pero desde muy lejos, con prismáticos?

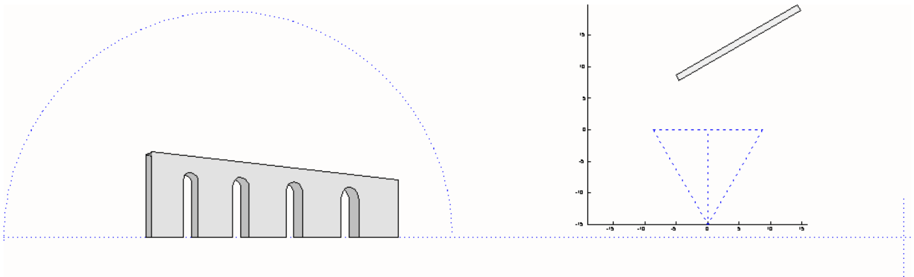
El Mediterráneo sigue bajo la influencia de las formas romanas, tanto en Italia como en el mundo árabe. Arquitectura estilizada y objetos elegidos conforman un espacio esencialmente plano.

Ilustración de las "Maqâmât", Al Harîrî, Jazîra (Siria), 1222; "Exultet", Fondi (Italia), 1136.



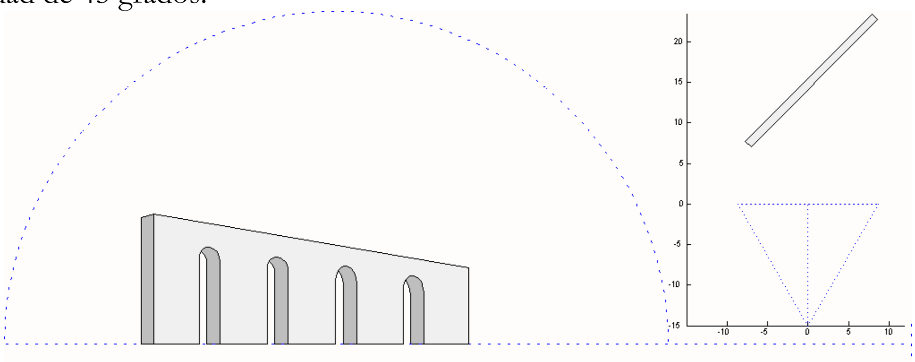
La progresión geométrica se ve ahora, apenas atenuada, en una visión algo extraña, donde las horizontales apenas fugan. Esta vez, la perspectiva ha degenerado en axonometría, como suele pasar a través de los prismáticos: no hay escorzo, ni tampoco efecto perspectivo. Por esta razón, los relieves se aplanan cuando miramos las lejanías a través de unas lentes (y también porque disminuye la profundidad de campo, debido a las propiedades ópticas de las lentes).

Ahora, nos acercaremos del puente, para pasarnos de las lentes, preservando la oblicuidad de treinta grados.



Las horizontales fugan, y el efecto perspectivo se manifiesta. El puente está enteramente comprendido en el círculo de los sesenta grados de obertura, de modo que no hay deformación: la perspectiva central ofrece aquí un modelo válido para la mirada. Ahora bien, en el dibujo, *los arcos son casi equidistantes*, la imprecisión de la progresión aritmética resultante es casi indiscernible.

Nos acercaremos ahora un poco más, girando la cabeza hacia la derecha para producir una oblicuidad de 45 grados:

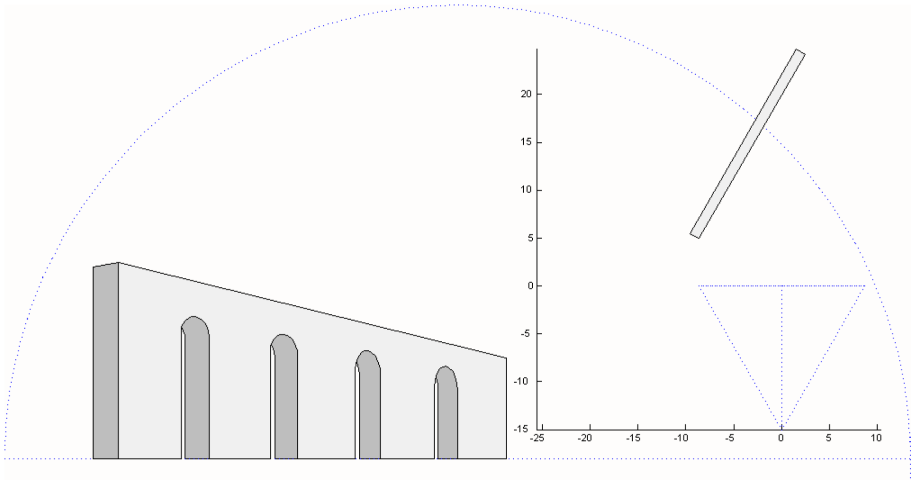


El puente sigue dentro del "círculo de Piero", las horizontales fugan más fuertemente, y el efecto perspectivo se halla mucho más pronunciado. Al mismo tiempo, los arcos dibujados se hallan muy igualmente espaciados. Habría que utilizar una regla muy precisa para comprobar que la progresión aritmética no es perfectamente exacta.

Junto con las conversacionnes ("maqâmât") de al Harîrî, el compendio de fábulas "Kalîla y Dimna" ofrece a los iluminadores árabes un campo ideal para su geometría narrativa, eficaz y elegante. Aquí, una puerta abierta basta para sugerir la perspectiva.

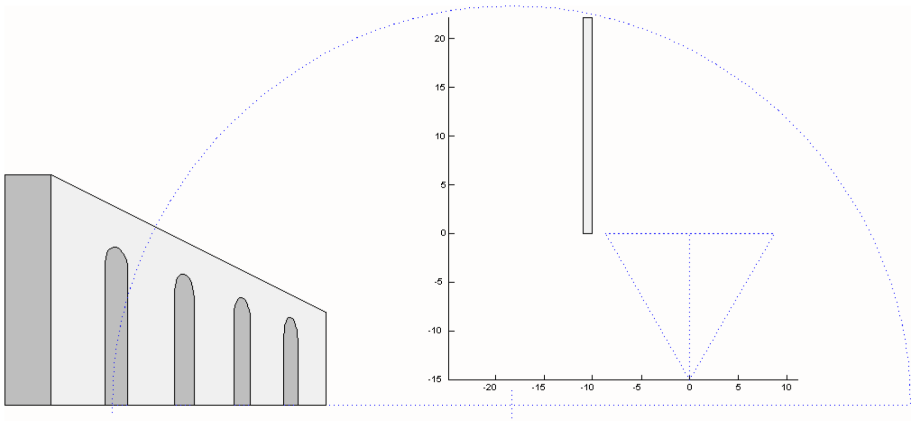
Ilustración de "Kalila wa Dimna", trad.: Ibn al-mukaffa', Egipto o Siria, principios del siglo XIII.

Nos acercaremos ahora un poco más, girando la cabeza hacia la derecha para producir una oblicuidad de 60 grados:



La progresión se mantiene casi aritmética en el dibujo, aunque el caso de 45° resulta ligeramente mejor en este sentido...

Nos acercaremos ahora un poco más aún, girando la cabeza de modo que nuestra mirada esté paralela al eje del puente, creando una oblicuidad de 90° (distancia principal *d* = 15 unidades):

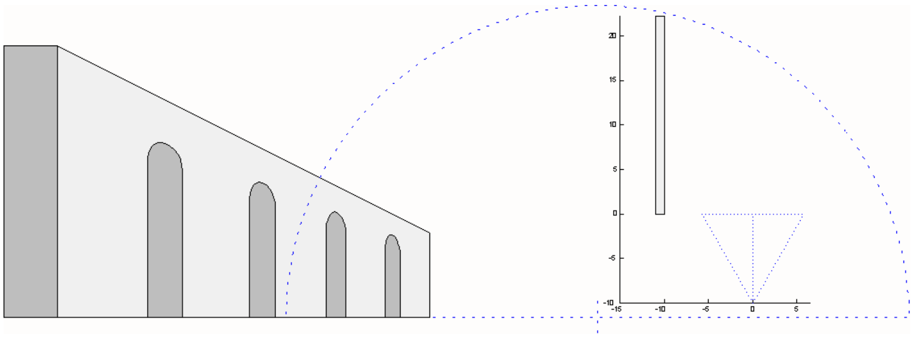


Como en las tres configuraciones anteriores, los arcos dibujados están casi igualmente espaciados. El error es indiscernible. No se trata pues de un trampantojo, que produciría un efecto particular en una posición determinada. En cuatro situaciones bien distintas, donde el efecto perspectivo se manifiesta claramente, observamos que una progresión geométrica en el estímulo se convierte, en la perspectiva, en una progresión aritmética.

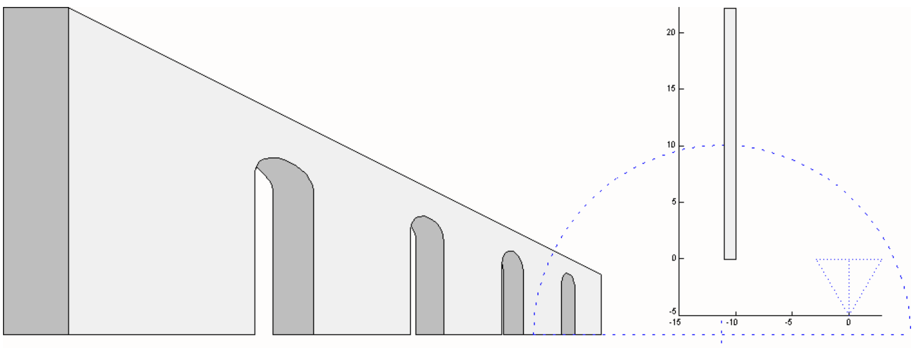
Con pocos elementos, el gran iluminador al Wasîtî sugiere una biblioteca (ar.iz.), una mezquita (ar.dr.) o un campamento (ab.iz.). Sin embargo, el decorado habitual de las "Conversaciones" es el campo libre, donde se juntan libremente los oyentes, para divertirse con las fechorías de Abû Zayd...

Cuatro ilustraciones de las "maqâmât" de al Harîrî por al Wasîtî, Iraq, 1236.

Miremos finalmente lo que ocurre si salimos del círculo de Piero, acercándonos más al puente (reduciendo la distancia principal a dos tercios del caso anterior; es decir: d = 10 unidades):



Midiendo sobre el dibujo, comprobamos que la progresión aritmética se pierde, allí donde el ángulo de obertura supera los sesenta grados. Sin embargo, al ojo, acostumbrado a corregir las perspectivas deformadas, le cuesta darse cuenta. Para convencerlo, hemos de proponerle un caso más exagerado, acercándonos aún más al puente (reduciendo la distancia principal a un tercio; es decir: d = 5 unidades):



Podemos concluir que una progresión geométrica del espacio se percibe como progresión aritmética, siempre que se respeten las cuatro condiciones siguientes:

- la razón de la progresión geométrica debe ser moderada (entre 0.6 y 1.7 aproximadamente);
- la situación no debe degenerar en un vista frontal;
- la situación no debe degenerar en una vista axonométrica;
- el objeto no debe salir del círculo de obertura de sesenta grados.

Estas condiciones son, precisamente las mismas que se imponen para permitir el efecto perspectivo: que el objeto no sea excesivamente diforme, que el punto de vista no genere una vista degenerada, que el ángulo de obertura no sea excesivo (en cual caso, la proyección central dejaría de ofrecer un modelo adecuado para la mirada).

Por lo tanto, la operación logarítmica acompaña siempre el efecto de perspectiva.

Para acabar de convencer, damos a continuación un análisis más detallado del razonamiento visual seguido.

* * *

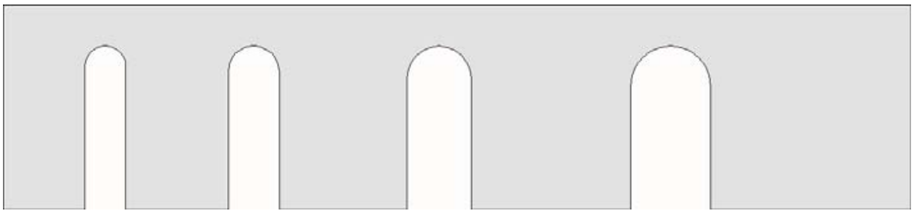
Las plantas dibujan arabescas, cobijando los conmensales, compitiendo con la caligrafía, y prestándose a los efectos retóricos de las brillantes conversaciones: un arte, ante todo, de la línea, de la palabra, de la figura y del cuento.

Dos ilustraciones de las “maqâmât” de al Harîrî por al Wasîtî, Iraq, 1236.

- La figura

Llamaremos “puente PG” la figura anteriormente estudiada, donde la célula “pila + arco” crece en progresión geométrica, con una razón igual a 1.25; la célula inicial mide 3 unidades (pila de 2 u., arco de 1 u.) y evoluciona así:

Ancho de las cuatros células:	3	3.75	4.68	5.86	
Arranque de cada célula:	0	3.00	6.75	11.44	17.30

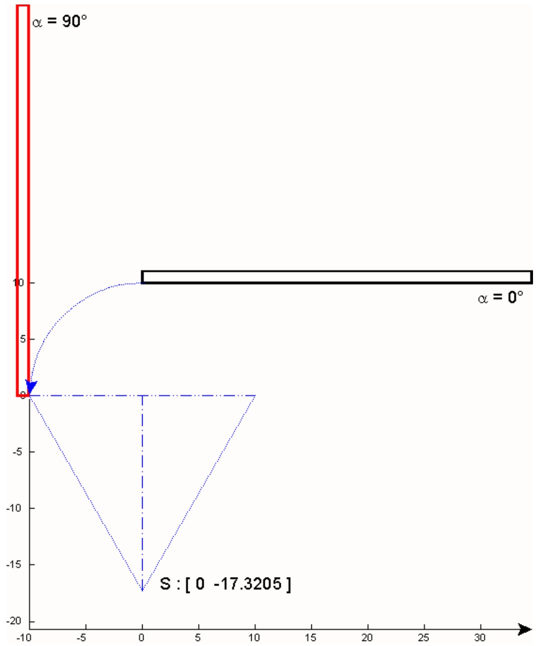


Podemos construir igualmente un “puente PA”, en progresión aritmética (razón 1), a partir de la misma célula inicial. Su tamaño total, de 14 u., será desde luego inferior al del puente PG.

- La rotación

Para facilitar los esquemas, dejaremos el observador fijo, rotando el objeto.

Como lo muestra la figura, el puente se encuentra a 10 unidades del cuadro en posición frontal. Luego, pivota en torno al punto principal, hasta alcanzar una posición perpendicular al cuadro. Este es el proceso aplicado a lo largo del ejemplo anterior. Si la distancia principal es igual a 17.3 unidades, el puente está justo incluido en el cono de Piero, cuando se halla perpendicular al cuadro. También se encuentra dentro en las configuraciones de 30°, 45° y 60°.



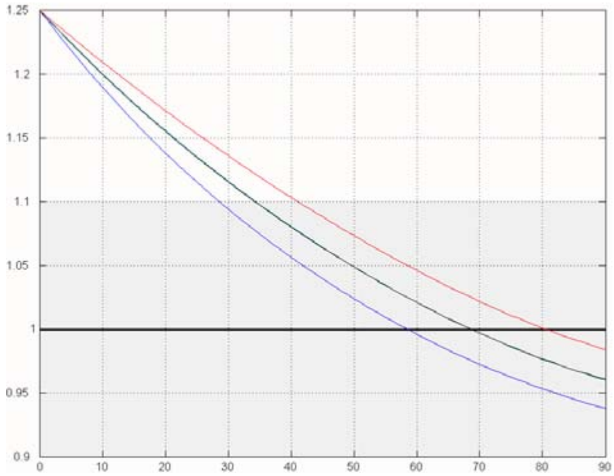
- El gráfico

En posición frontal, el puente PG manifiesta en el dibujo una progresión geométrica de razón 1.25 entre los tamaños de sus cuatro células. En las demás orientaciones, la progresión deja de ser geométrica, y se ve casi aritmética. Para cuantificar esta observación visual, construimos los tres valores correspondiendo al cociente entre los tamaños de dos células adyacentes (1 y 2, 2 y 3, 3 y 4). En el caso frontal, estos tres valores son iguales a 1.25; en el caso de una progresión aritmética exacta, serían iguales a 1. En general, los tres valores serán ligeramente diferentes entre sí, en función de la oblicuidad del puente y de la distancia del observador, y se representarán, respectivamente, en rojo, verde y azul (en negro, se representará el promedio de los tres, generalmente muy próximo al valor intermedio).

Las procesiones y caravanas permiten al iluminador breves alardes: todo siempre se mueve, las estancias son pausas, y, como en la poesía árabe, las comparaciones son más animadas que descriptivas. La vida misma es un campamento, la geometría fluidez, líneas y figuras en constante desarrollo.

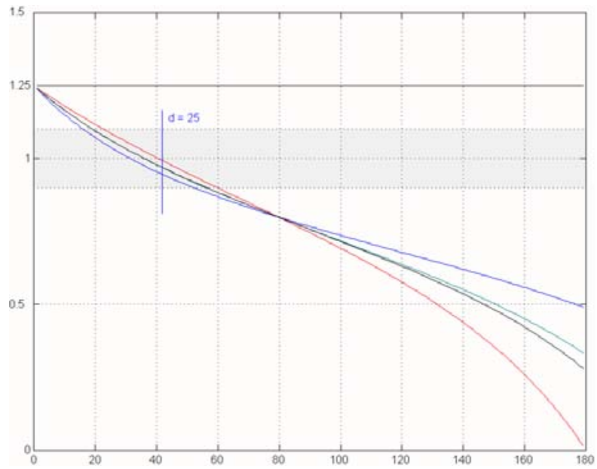
Cuatro ilustraciones de las “maqâmât” de al Harîrî por al Wasîtî, Iraq, 1236.

En el siguiente gráfico, se representan estos valores en función de la oblicuidad del puente, para una distancia principal de 25 unidades.



Cuando la oblicuidad es nula (caso frontal), los tres cocientes valen 1.25 (progresión geométrica en el dibujo). A medida que se gira el puente, los valores bajan y se separan. Consideraremos que si los tres están comprendidos entre 0.9 y 1.1, el dibujo se ve como una progresión aritmética (la variación es casi indiscernible): este caso corresponde a la banda gris de los gráficos. A una distancia principal de 25 unidades, eso empieza a ocurrir a partir de 40° de oblicuidad, y el mejor resultado corresponde a 70°. Sigue funcionando para 90°; los tres cocientes valen entonces, respectivamente, 0.98, 0.96 y 0.94.

- *La distancia principal*



Además de la oblicuidad del objeto, el otro parámetro importante es la distancia del observador.

En el siguiente gráfico, que corresponde al puente perpendicular al cuadro, se hace variar el ángulo de obertura que incluye el cuadro, desde 0° (ojo al infinito) hasta 180° (ojo sobre el cuadro). La posición del ojo correspondiendo a d = 25 u. está indicada en el gráfico.

Observamos que las tres curvas vuelven a juntarse para d = 11.92 u. (80° de obertura). ¡En este caso, el puente se dibuja con una progresión geométrica inversa a la que lo define como objeto espacial!

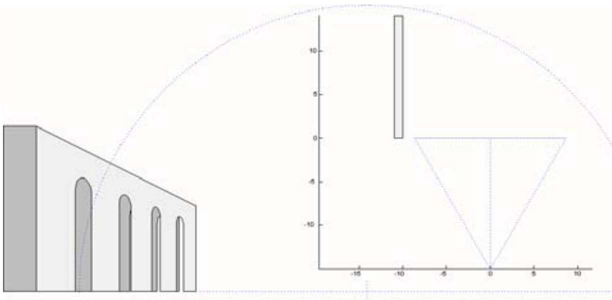
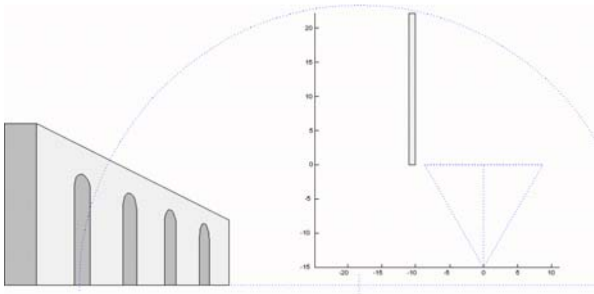
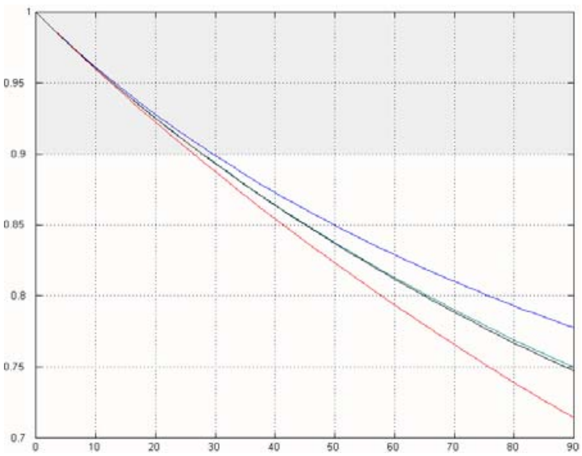
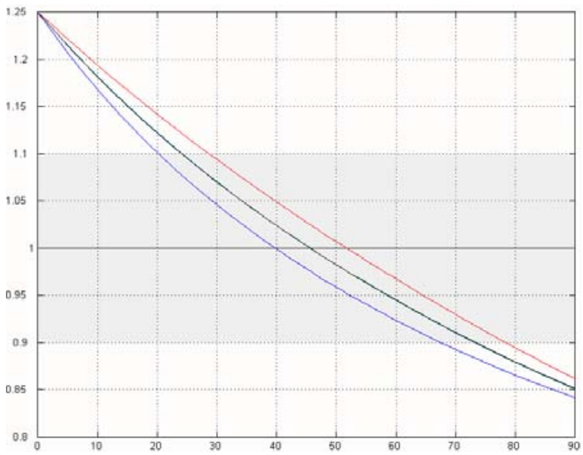
La zona útil corresponde a unas oberturas comprendidas entre 25° y 60°.

- *El ejemplo*

Podemos ahora sintetizar el caso anteriormente estudiado del puente PG, comparado con el puente PA. Obtenemos así una representación comparable a la que realizamos en el caso de los valores de luminosidad: una progresión aritmética que satura en el dibujo, y una progresión geométrica que parece aritmética en el dibujo...

La arquitectura mediterránea no es más que balcones y ventanas, bajo los cuales amontonarse, a través de las cuales seguir los viajeros que pasan: la perspectiva central no serviría aquí de nada.

Dos ilustraciones de las “maqâmât” de al Harîrî por al Wasîtî, Iraq, 1236.

<table>
<tr><th>Puente PA</th><th>Puente PG</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
En el puente PA, todas las células son iguales, y se proyectan en progresión armónica. En el gráfico, comprobamos que la posición frontal (oblicuidad nula) corresponde a una razón 1. Al aumentar la oblicuidad, los tres cocientes empiezan a disminuir y a separarse, cada vez más. A partir de unos 25° de oblicuidad, el efecto perspectivo se hace sensible, y las cuatro células ya no se ven iguales.

En la configuración de 90°, obtenemos los siguientes valores:

90°: 0.7143 0.7500 0.7778

Manifiestan el escorzo típico de la progresión armónica. Si prolongásemos el puente, lo veríamos “saturar” en su camino hacia el horizonte, como las capas de acetato en progresión aritmética saturan en su camino hacia la oscuridad...
</td><td>
En el puente PG, empezamos por encima de la zona gris, y terminamos por debajo. Comprobamos que la posición frontal (oblicuidad nula) corresponde a la razón 1.25 preservada. Al aumentar la oblicuidad, entramos rápidamente, antes de los 30°, en la zona gris, de equidistancia aparente.
Obtenemos los valores siguientes:

00° : 1.25 1.25 1.25
30°: 1.09 1.07 1.05
45°: 1.03 1.00 0.98
60°: 0.97 0.94 0.92
90°: 0.86 0.85 0.85

En los tres casos intermedios, la proyección muestra las células en progresión casi aritmética (como previsto, el caso más confundente corresponde aquí a una oblicuidad de 45°), con un paso casi constante, como las capas de acetato en progresión geométrica...
</td></tr>
</table>

* * *

La compenetración del texto en cursivas, de las figuras sin paisajes y de los movimientos depurados ha ofrecido a los árabes un arte distinto del que se desarrolla en Europa, y de lo que luego se hará en Persa, pese a infinitas influencias recíprocas: distintas miradas sobre un mismo mundo.

Ilustración de las “maqâmât” de al Harîrî por al Wasîtî, Iraq, 1236.

Acabamos de mostrar que la "ley logarítmica" se aplica al espacio visual como a las frecuencias sonoras y a las intensidades, tanto visuales como sonoras. En estas cuatro dimensiones, nuestra percepción aplica un filtro no-lineal, de tipo logarítmico.

Intuimos que estas cuatro propiedades son una sola, la cual no se puede justificar por la fisiología. En efecto, los estímulos y los captores son demasiado diferentes. En su percepción de las frecuencias, el oído se adapta a la estructura armónica del sonido, de manera aritmética. En cuanto a la percepción visual del espacio, de naturaleza puramente geométrica, depende esencialmente de la posición del observador, y de los ángulos visuales. El ojo percibe los quanta de luz, mientras que el oído repite y amortigua las energías acústicas.

Sólo un proceso mental puede explicar un comportamiento similar en ámbitos tan distintos.

Si pensáramos solamente en las energías, podríamos creer que se trata de un filtro protector, pero tal idea carece de sentido en las dos otras dimensiones.

¿Qué comparten estas cuatro dimensiones, más que la amplitud de sus ventanas perceptivas? El oído percibe las frecuencias entre 20 y 20000 Hz, las intensidades entre 10^{-12} W. y centenares de vatios. El ojo distingue una superficie iluminada con fracciones de luxes, y soporta centenares de millares de luxes. Percibe desde unos pocos centímetros de distancia, hasta las estrellas.

Al total, hay una cantidad gigantesca de información, muy por encima de cuanto el cerebro puede procesar. Y tampoco convendría cerrar estas ventanas: para sobrevivir, el ser humano ha de poder distinguir bajo el sol y en una noche sin luna, graves y agudos, murmullos y gritos, desde muy cerca hasta muy lejos. La única solución es de poder comprimir esta información, de una forma adaptativa (acostumbrándose al sol y a la luna, al ruido y al silencio), de modo que lo esencial siempre pueda distinguirse a tiempo.

Percepción no-lineal, y percepción relativa. Ambas propiedades están estrechamente vinculadas. En efecto, una progresión geométrica no puede empezar en cero (no progresaría). Una escala de grises no puede empezar con el blanco absoluto, ni con el negro absoluto. No incluye los absolutos: blanco y negro son dos polos, dos horizontes para la escala, bien definidos, pero inalcanzables. La mirada puede abrazarlo todo, menos su origen y el infinito, sus dos polos. Tampoco es posible llegar a oír el silencio. Este rechazo de los polos viene del filtro logarítmico, y crea la relatividad, condición indispensable para una percepción ágil, mejor preparada para distinguir que para calcular.

Llegados aquí, la expresión "ley logarítmica" empieza a resultar incómoda. No se trata de una ley, sino más bien de una propiedad. No pertenece a la aritmética (en el sentido moderno de "ciencia de los números"), sino más bien a la geometría sensible.

Personalmente, es en su aplicación al espacio visual donde la entiendo mejor, donde mejor puedo explicarla. Los primeros perspectivistas tenían una palabra: *escorzo* (en el francés de Pélerin y du Cerceau: *raccourci*), que viene del italiano *scorcio* (del lat. *ex* y *curtiare*). En castellano, *escorzar* es "representar, acortándolas según las leyes de la perspectiva, las cosas que se extienden en sentido perpendicular u oblicuo al plano del papel o lienzo sobre que se pinta". Es exactamente eso. Piero della Francesca utilizaba la palabra "degradazione", que puede introducir confusiones. Para traducir el verbo *acortar*, el italiano tiene el verbo más corriente *accorciare*. *Scorciare* se ha especializado en el sentido visual: es "acortar con el ojo", es decir: atajar visualmente. "Uno scorcio" describe la concentración de información en poco espacio, por ejemplo: la aparición repentina, por la boca de una callejuela, de varias construcciones tétricas, apiladas a lo largo de una perspectiva que abre sobre el mar, allá en el fondo, tan cerca sin embargo, para el ojo, de la esquina inmediata que enmarca la escena...

Arriba, el chacal paseando por el espacio irreal del cuento se refleja en el agua que nos separa de él: en esta “puesta en abismo”, por un asombroso juego de color, el reflejo es quien revela la figura. Abajo, dos caballeros, solapándose, producen un doble efecto de movimiento y de perspectiva, en un dibujo sencillo que resume la elegancia del arte árabe del trazado.

“El chacal y su reflejo” (“Kalila wa Dimna”, Baghdad, principios del siglo XIII); “Dos caballeros” (“Kitab al-Baytara”, Baghdad,1210).

Ahora bien, el ojo *escorza* las distancias y las intensidades. El oído *escorza* las frecuencias y las intensidades. Nuestro cerebro escorza sus percepciones, y escoge sus informaciones. Eso suena mejor. Imaginemos un piano cuyas cuerdas se distingan solamente por su longitud (mismo grosor, misma densidad). Mirándolo de soslayo, veríamos el abanico de las cuerdas crecer en progresión aritmética: ¡así como suenan!

La gran excepción, es el color. El ojo no escorza las frecuencias, no lo necesita: la ventana es diminuta (no llegaría a formar una *octava*, si este término tuviera sentido aquí). Por ello, de todos los fenómenos de la percepción, el color es el menos relativo.

Origen de las ilustraciones

p.167 iz.: - "Libro de Kells", Hébrides (c. 800), Dublín, Trinity College Library, Ms. A. I.6 (58), *in* "Codices illustres", Ingo F. Walther & Norbert Wolf, Taschen, Köln, 2003.

p.168 iz.: - "Libro de Kells", Hébrides (c. 800), Dublín, Trinity College Library, Ms. A. I.6 (58), *in* "Codices illustres", Ingo F. Walther & Norbert Wolf, Taschen, Köln, 2003.

p.169 iz.: - "Cruz, símbolo de la creación (número 4)", Latin 2423, fol. 10v, BnF,
- "Cruz, símbolo de la incarnación", Latin 2423, fol. 16v, BnF,
- "Cruz, símbolo del tiempo", Latin 2423, fol. 12v, BnF,
- "Rabano Mauro adorando la Cruz", Latin 2423, fol. 31v, BnF, *ex* "In Honorem Sanctae Crucis", Rabanus Maurus, Fulda (Alemania), principios del siglo IX.

p.170 iz.: - dos ilustraciones del Français 403, BnF, *ex* "Biblia", Maestro de Sarum, Salisbury, hacia 1250.

p.171 iz.: - dos ilustraciones del Français 403, BnF, *ex* "Biblia", Maestro de Sarum, Salisbury, hacia 1250.

p.172 iz.: - "Maqâma 16-Abû Zayd llegando a la mezquita", Arabe 6094, fol. 49v, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, Jazîra (Siria), 1222.
- Nouvelle acquisition latine 710, fol. rouleau, BnF, *ex* "Exultet", Fondi (Italia), 1136.

p.173 iz.: - "Fábula: Shedram, Iraht e Iblad", Arabe 3465, fol. 131v, BnF, *ex* "Kalila wa Dimna", trad.: Ibn al-mukaffa', Egipto o Siria, principios del siglo XIII.

p.174 iz.: - "Maqâma 02: Abû Zayd en la biblioteca de Basra", Arabe 5847, fol. 5v, BnF,
- "Maqâma 07: Abû Zayd entrando en la mezquita de Marâgha", Arabe 5847, fol. 18v, BnF,
- "Maqâma 14: Abû Zayd dejando los peregrinos", Arabe 5847, fol. 38, BnF,
- "Maqâma 02: Abû Zayd reconocido por al-Hârith", Arabe 5847, fol. 6v, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, iluminador: Al Wâsitî, Iraq, 1236.

p.175 iz.: - "Maqâma 36: Abû Zayd y sus auditores", Arabe 5847, fol. 110, BnF,
- "Maqâma 17: Abû Zayd y sus auditores", Arabe 5847, fol. 46v, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, iluminador: Al Wâsitî, Iraq, 1236.

p.176 iz.: - "Maqâma 07: procesión al fin del ramadan", Arabe 5847, fol. 19, BnF,
- "Maqâma 31: caravana de peregrinos", Arabe 5847, fol. 94v, BnF,
- "Maqâma 12: al-Hârith viajando", Arabe 5847, fol. 31, BnF,
- "Maqâma 32: la cantante y el rebaño de camellos", Arabe 5847, fol. 101, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, iluminador: Al Wâsitî, Iraq, 1236.

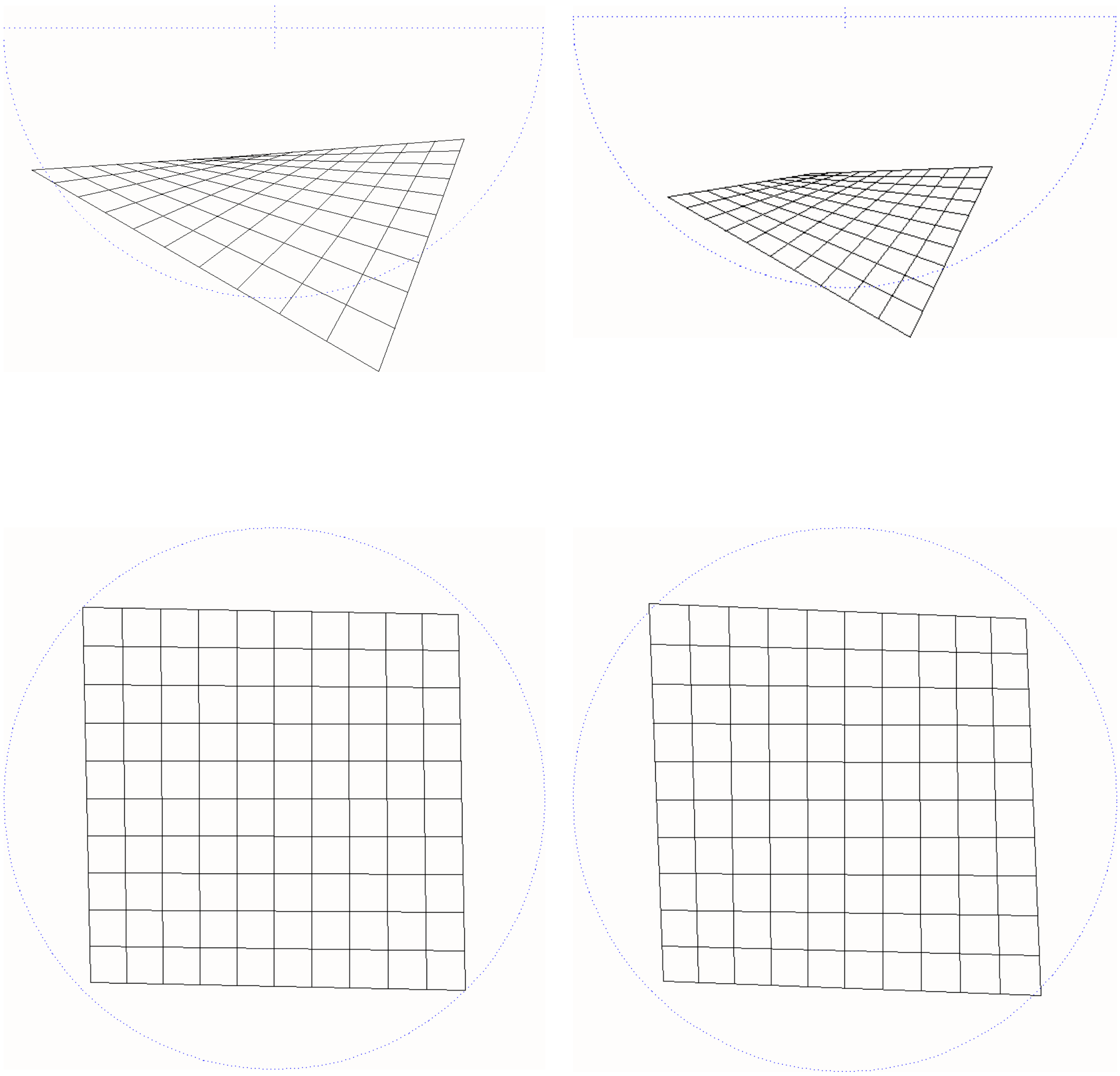
p.177 iz.: - "Maqâma 21: Abû Zayd predicando", Arabe 5847, fol. 58v-59, BnF,
- "Maqâma 43: Abû Zayd y al-Hârith llegando a un pueblo", Arabe 5847, fol. 138, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, iluminador: Al Wâsitî, Iraq, 1236.

p.178 iz.: - "Maqâma 05: Abû Zayd admitiendo su mentira", Arabe 5847, fol. 14v, BnF, *ex* "Maqâmât", Al Harîrî, iluminador: Al Wâsitî, Iraq, 1236.

p.179 iz.: - "El chacal y su reflejo", Hazine 363, folio 32b, Tokapki, *ex* "Kalila wa Dimna", Baghdad, principios del siglo XIII.
- "Dos caballeros", Ahmed III 2115, folio 58ª, Tokapki, *ex* "Kitab al-Baytara", Ahmed ibn al-Husayn ibn al-Ahnaf, Baghdad,1210.

- 19 -

Las figuras geométricas



En las imágenes de la izquierda, vemos el paraboloide hiperbólico realizado por la deformación mecánica de un tablero plano (los vértices son desplazados de una unidad). En una vista lateral, reconocemos claramente la figura (ar.iz., a 15 unidades de distancia), tanto más fácilmente cuanto más nos alejamos (ar.dr., a 20 unidades de distancia), centrando la figura dentro del « círculo de Piero ». Si nos colocamos justo arriba del paraboloide (ab.iz., a 15 unidades de distancia), sólo vemos un tablero ligeramente deformado. Aunque la foma paraboloide se halle más pronunciada (ab.dr., con los vértices desplazados de dos unidades), apenas si el ojo la reconoce en esta configuración…

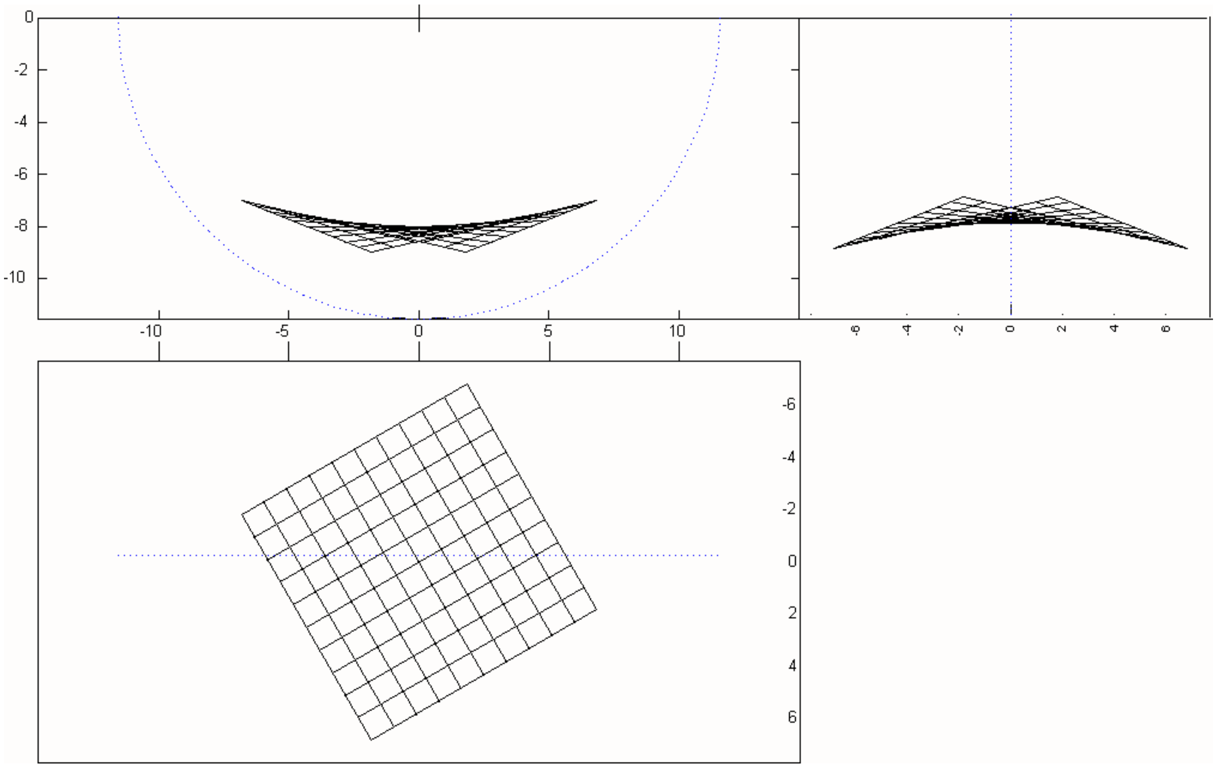
Vistas de paraboloides hiperbólicos en proyección central.

19. Las figuras geométricas

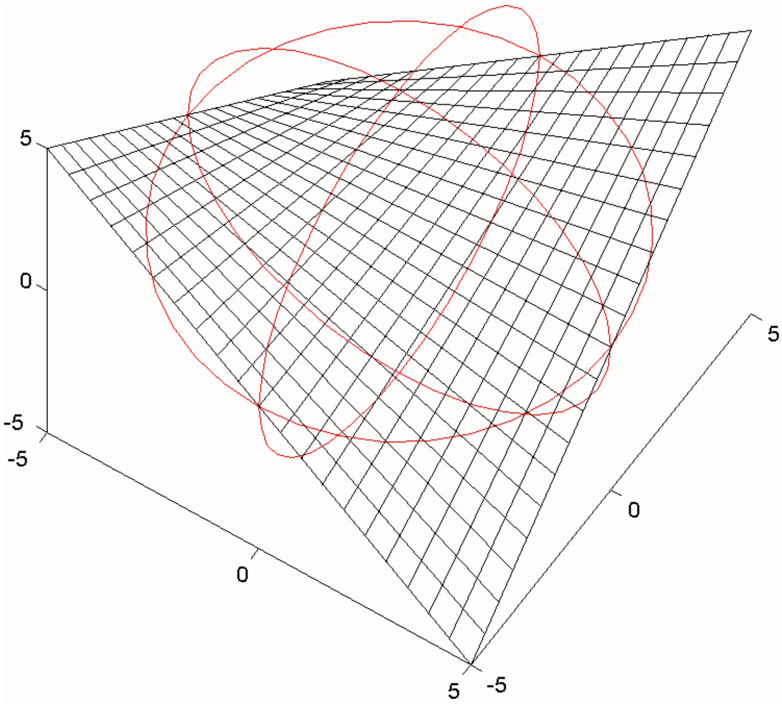
En sus aplicaciones, la geometría sensible presenta siempre las mismas dos características. En primer lugar, trabajamos con nociones geométricas, generalmente muy sencillas, cuyo conocimiento remonta al siglo XVII, o incluso a la antigüedad, o, más a menudo, al siglo XIX, cuando casi todas las teorías necesarias fueron completadas y sistematizadas. El siglo XX ha aportado, esencialmente, nuevos métodos algorítmicos (las transformadas de Fourier, las integrales de Monte-Carlo,...), mientras que sus grandes modelos físicos se apartaron, conscientemente, del mundo sensible. ¿Y qué nos permite la nueva algorítmica, y la revolución informática que la sustenta? Recuperar muy viejas ideas, antaño desechadas por resultar fastidiosa o meramente imposible su realización manual.

En segundo lugar, utilizamos nociones sensibles, tratando de interpretar las consecuencias perceptivas de cada decisión geométrica, con el fin de *ver* o de *oír* el resultado. La geometría sensible no se departe nunca de las apariencias, y sólo juzga de oídas... Eso nos obliga a luchar constantemente contra la vana satisfacción de las soluciones abstractas, de las propiedades matemáticas curiosas pero estériles. No es tan fácil: ¿quién sabe dónde y cuándo una propiedad cobra sentido y se vuelve eficiente?

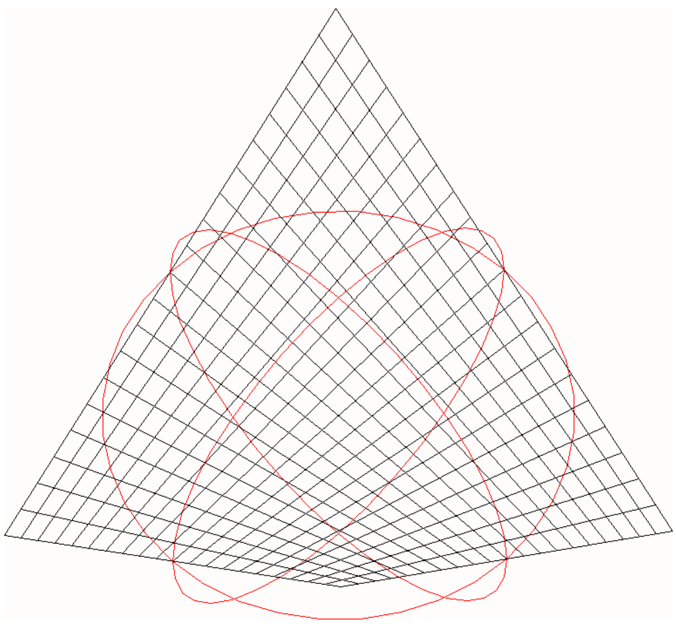
Consideremos el ejemplo de una superficie sencilla: el paraboloide hiperbólico. Podemos definirlo *algebraicamente:* como todas las cuádricas, corresponde a determinada ecuación del segundo grado. Según la *geometría tradicional*, se definirá como generado por una parábola siguiendo otra parábola, su generatriz. Podemos también describirlo como una deformación *mecánica*: por ejemplo, un tablero de cien casillas (diez unidades por diez); alzamos de una unidad dos de sus vértices opuestos, y bajamos los dos otros en la misma medida. La *geometría descriptiva* nos permite *representar* este mismo ejemplo, otra manera de definirlo, como en la siguiente figura, donde se ha elegido una representación multivista:



Pero, ¿cómo definir esta superficie *visualmente*, es decir: por el efecto que produce su aparición ante la mirada? Si la giramos ante el ojo, alejándola y acercándola sucesivamente, la veremos también como una deformación del tablero plano, pero no dinámica, sino cinemática. Esta observación formal es el punto de partida para una descripción *sensible* del paraboloide.

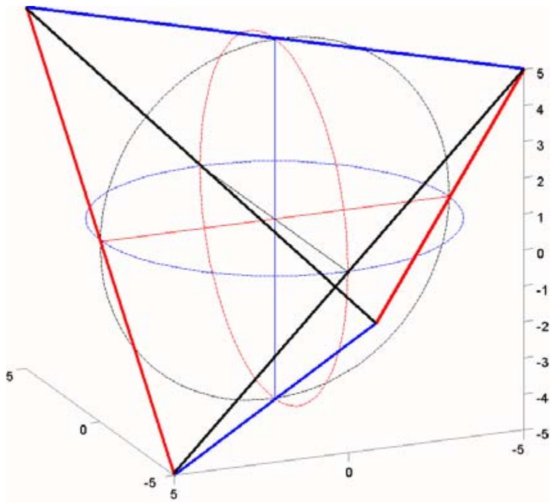


La esfera armilar construida sobre los tres ejes propios del paraboloide ayuda a entender cada configuración. En determinadas posiciones - no siempre degeneradas -, se obtienen figuras visuales peculiares, a menudo ambiguas, y muy variadas cuando se piensa en la simplicidad geométrica de la superficie estudiada…

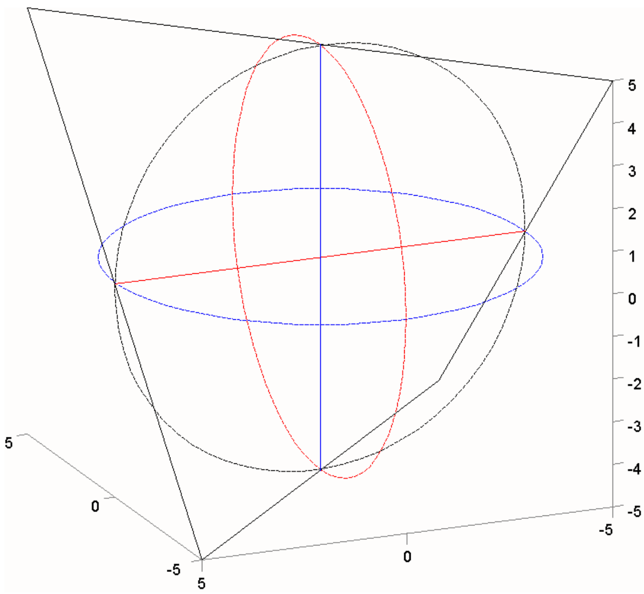


Vistas axonométricas del paraboloide hiperbólico.

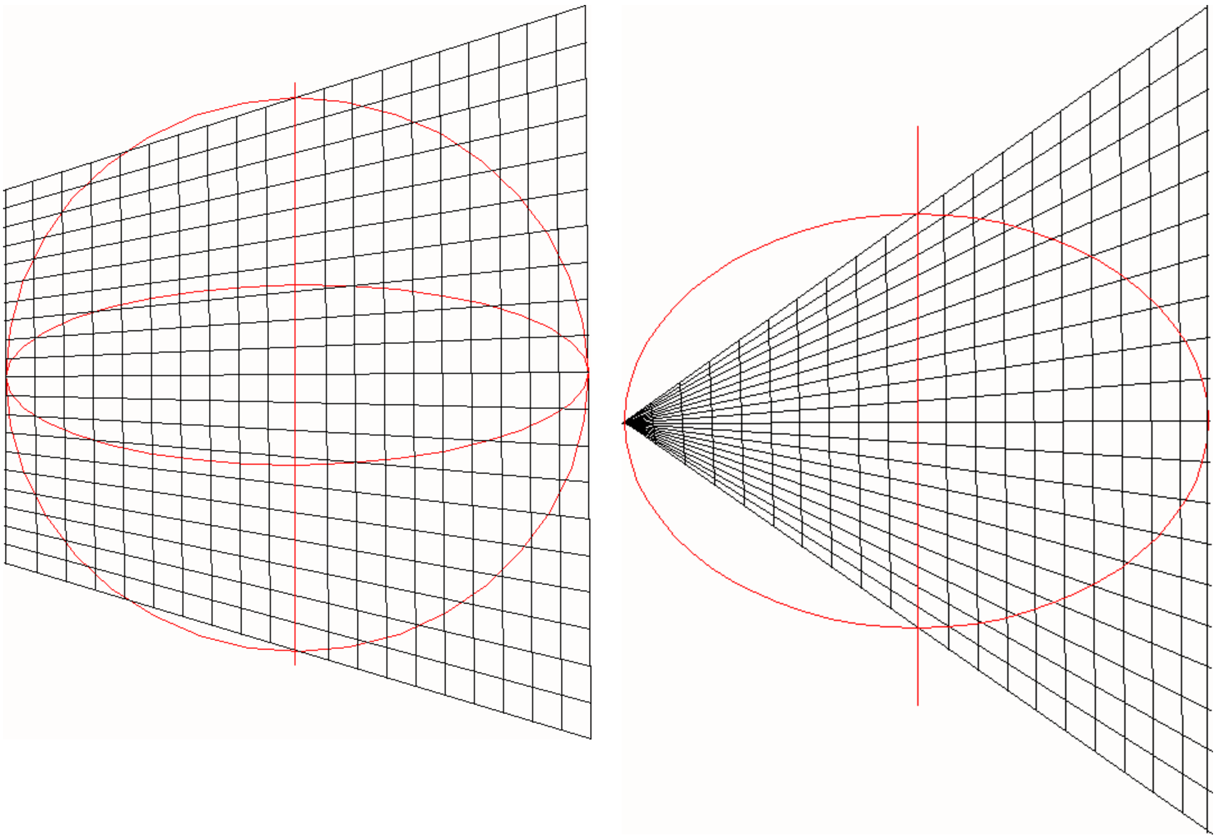
Para las siguientes ilustraciones, construimos un paraboloide hiperbólico sobre cuatro de las seis aristas de un tetraedro regular, el cual se halla a su vez construido sobre las diagonales cruzadas de las caras opuestas de un cubo:



En los planos medianos de cada dos caras opuestas del cubo, dibujamos los círculos inscritos (cuyos diámetros son iguales a los lados del cubo). Los tres círculos forman una esfera armilar, que nos ayudará a entender la disposición del paraboloide en distintas configuraciones:

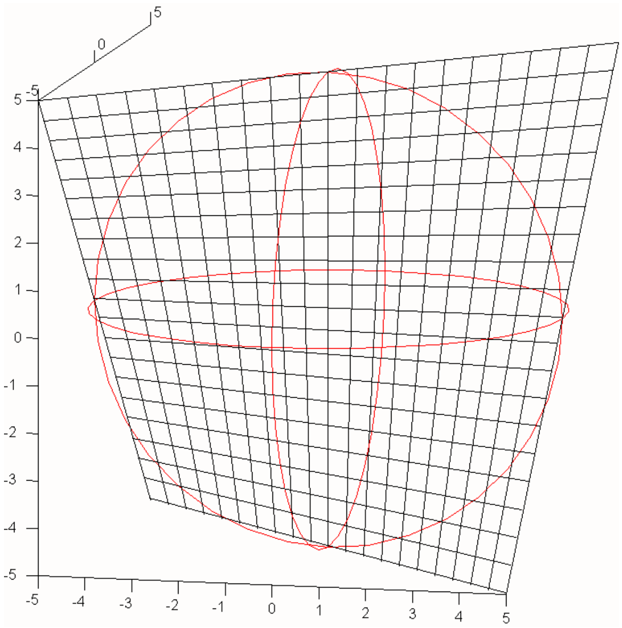


Notamos que uno de los círculos pasa por los puntos medios de los cuatro lados del paraboloide.

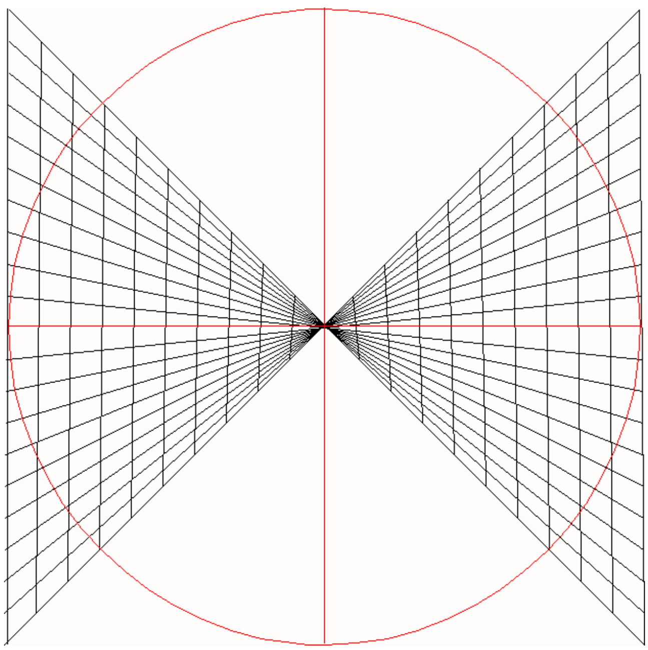


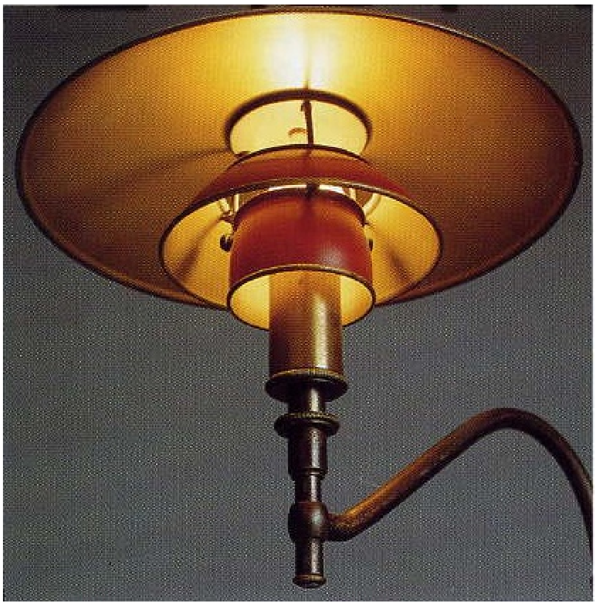
En estas configuraciones, obtenemos un resultado visual particularmente ambiguo: las rectas en una de las dos direcciones parecen fugar - y de hecho convergen en el dibujo -, pero las casillas no se ven luego iguales entre sí: al mantenerse equidistantes en el dibujo las rectas de la segunda dirección, el ojo interpreta que las casillas crecen en el espacio, hacia atrás, como si mirásemos de soslayo el mástil de una guitarra…

Vistas axonométricas del paraboloide hiperbólico.



En una animación, veríamos mejor cuántas deformaciones un paraboloide hiperbólico es susceptible de producir si lo giramos ante la mirada. Aquí, las figuras son axonométricas: representan un paraboloide pequeño observado a cierta distancia. Si nos acercamos, los efectos visuales se hacen menos extravagantes. Sin embargo, siempre comprobaremos que esta figura es visualmente compleja. Para diseñar con ella un edificio, es importante conocer sus propiedades constructivas, estructurales y mecánicas: el hecho que sea *reglada*, que se pueda realizar fácilmente con cables tensados,... No menos importante es aprender a *verla*. Cuando Iannis Xenakis proyectó el pabellón para la exposición universal de Bruselas, tuvo que recurrir a la geometría descriptiva, pera resolver dificultades de conexiones y de proporciones. Pero eso aún no era suficiente: sólo con las fotografías, llegamos a percibir el aspecto visual del pabellón, siempre cambiante, siempre sorprendente. Ahora bien, las cuádricas son curvas matemáticamente sencillas. Pero nadie se ha preocupado hasta ahora de unir la geometría y la percepción visual, haciendo una presentación exhaustiva de las superficies sencillas bajo el punto de vista de la mirada...





Prism reflection: Poul Henningsen wall lamp, 1919.

Mirror reflection: Poul Henningsen table lamp, 1924.

Diffuse reflection: PH hanging lamp with copper shades, 1926.

Diffuse reflection: and refraction in PH opal glass table lamp, 1927.

La famosa lámpara PH (arriba) fue el resultado de largas investigaciones geométricas, fisicas y empíricas por parte de su autor, Poul Henningsen. Se estudiaron primero las lámparas de lágrimas, y la posibilidad de reducir el deslumbramiento mediante múltiples reflexiones sobre prismas de cristal (ab.iz.), luego el uso de reflectores especulares o difusos (ab.md.) para dirigir la luz; finalmente, tras decantarse por reflectores en forma de espiral logarítmica, la lámpara PH resultante se declinó en varias versiones, una de las cuales con reflectores translúcidos (ab.dr.), para obtener una iluminación más uniforme.

La lámpara PH (Poul Henningsen), su desarrollo y sus declinaciones.

"Empédocles explica [la sensación de las cosas visibles], a la vez por los rayos y por las imágenes"
Aecio[1]

Si estudiamos las figuras geométricas en relación a su percepción por la mirada, no podemos limitarnos a las que corresponden directamente a los esquemas primarios del ojo, ni a sus deformaciones escorzadas. En efecto, el dominio visual incluye también lo que los griegos llamaban la *catóptrica* (estudio de las reflexiones) y la *dióptrica* (estudio de las refracciones), y todas aquellas otras transformaciones que el ojo conoce desde siempre, y que la óptica ondulatoria recoge bajo los términos de "difracción", "difusión"o "interferencias".

Ahora bien, en un enfoque teórico, el simple añadido de las reflexiones nos lleva ya en tierras desconocidas, donde la geometría visual procede a tientas, falta de herramientas fiables y de casos simples exhaustivamente descritos que permitieran ajustar sus nociones.

Sin embargo, el problema geométrico resulta sencillo: es el de los espejos, que podemos estudiar trazando rayos, como Euclides ya lo hizo en su "Catóptrica"[2], continuación de la "Óptica". Cabe decir que los mismos autores modernos que han criticado esta última obra han sido más severos aún con aquella[3]. En mi opinión, tales críticas, y las fuertes dudas sobre la autoría de la "Catóptrica" que implican, son algo injustas, y podríamos aquí desarrollar sobre este libro ingenioso un capítulo parecido al que dedicamos a la "Óptica", donde seguiríamos el autor alejandrino en su descripción de los espejos curvos, sin utilizar la menor noción de trigonometría, pero con elegantísimos razonamientos puramente geométricos...

Para describir los espejos planos, existe otro modelo, que el mismo Empédocles, al parecer, ya oponía conscientemente al trazado de rayos: se trata de determinar directamente la imagen de la figura reflejada, tal y como aparece a la vista, del otro lado del espejo.

De un lado, pues, la mirada considerada como un rastreo, y los rayos visuales, provistos de leyes de reflexión (especular o difusa, según las características ópticas del material formando el obstáculo encontrado) y, en su, caso, de refracción (cuando se den obstáculos translúcidos). Del otro, los espejos planos produciendo *simulacros* del mundo real, cuya teoría puede extenderse - con cierta dificultad metodológica - a los espejos curvos y a sus simulacros deformados, imágenes "virtuales" (del otro lado del espejo) o "reales" (focalizándose del lado del espejo donde se halla la figura reflejada).

No nos extenderemos aquí en la descripción de ambos modelos, de los métodos modernos que han suscitado - el trazado determinista, el trazado probabilista, el método de las imágenes, la radiosidad -, de sus ventajas comparadas, ni de sus posibles desarrollos, pero estudiaremos rápidamente una aplicación, para poner de manifiesto cuánto nuestras dudas perceptivas limitan la capacidad geométrica de nuestras herramientas en resolver problemas concretos.

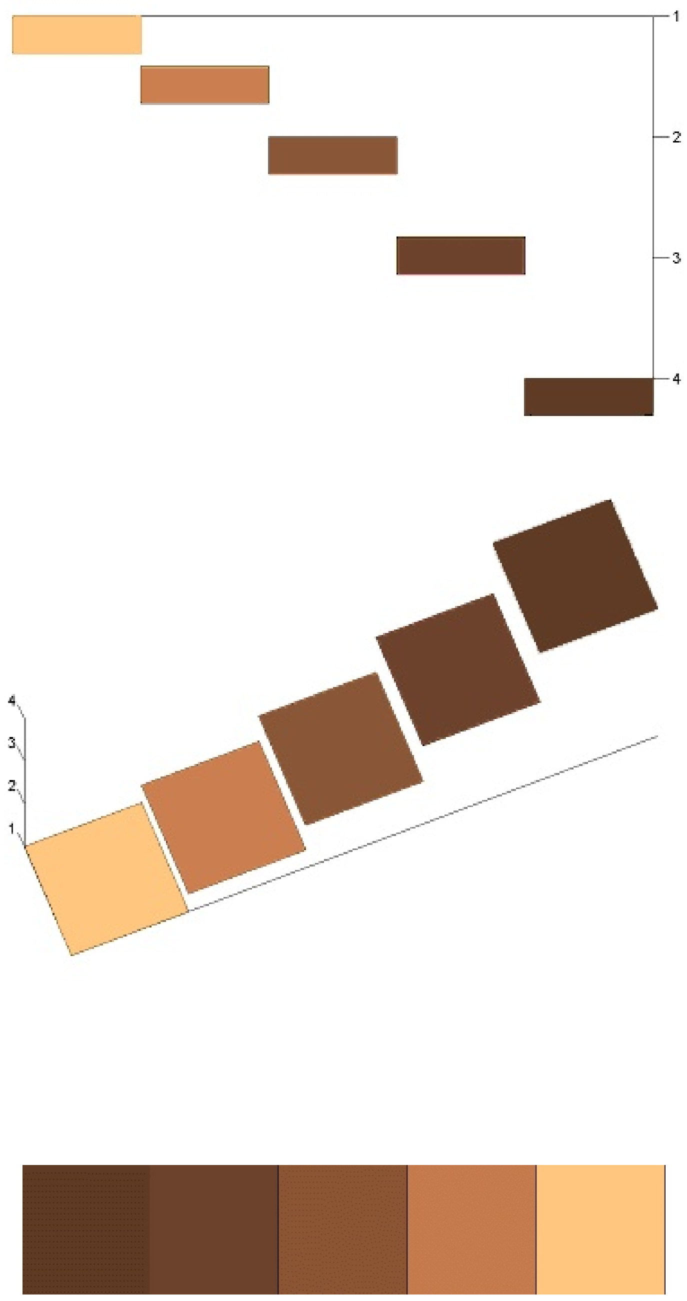
Estudiaremos una curva particularmente interesante - la espiral logarítmica - y un reflector que se basa en sus propiedades - el de la famosa *lámpara PH*.

---

1 "Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988. Empédocles (p. 371), *in* "Opinions", Aétius.

2 "Catóptrica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.

3 En particular, se ha pretendido que la "Catóptrica" suponía una definición geométricamente equivocada de la reflexión especular, error que hubiera sido gravísimo, y poco compatible con la calidad general de la obra euclidiana, de ser cierto. Tal error se produjo, efectivamente, pero remonta, en realidad, a ciertas interpretaciones medievales del libro. Sobre este tema, leer la intoducción a la "Catóptrica" en: "L'optique et la catoptrique", Euclide, versión francesa de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, París-Brujas, 1938.



En este experimento, disponemos cinco casillas paralelas (ar.) alejándose del mismo plano frontal según una progresión geométrica (a 1 m, $2^{1/2}$ m, 2m, $2 \cdot 2^{1/2}$ m, 4m), de modo que si el plano frontal las ilumina uniformemente, pero con una ley de disminución de la intensidad según el cuadrado de la distancia, obtenemos una serie de iluminancias en progresión geométrica también (1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16), que el ojo percibe como una progresión aritmética (md.). En proyección paralela, frontalmente, llegamos a ver las casillas como si formaran una banda única presentando una escala monocroma a paso constante.

Experimento de iluminación (dibujo propio).

A principios de los años veinte, el diseñador Poul Henningsen propuso una nueva lámpara, resultado de años de una investigación sobre las luminarias, con una atención particular hacia la geometría.

En su estudio "Luminosidad lógica", Steen Jørgensen ha propuesto la siguiente explicación para la singular belleza de esta "lámpara PH":

"El resultado final habla por sí mismo, como en cualquier obra de arte. Aun así, Gelsted ha encontrado las palabras que la definen: *Luminosidad lógica*, es decir, el modo en que la lámpara ilumina es perceptiblemente lógico.

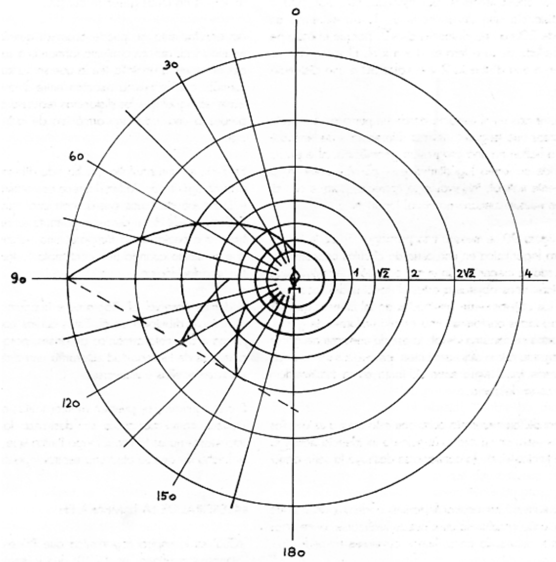
Sin embargo, las teorías no son suficientes; por ejemplo, los mismos conceptos han conducido antes a la lámpara tipo "faceta" (esta lámpara no es hermosa, más bien es "increíblemente fea", según Hakon Stephensen).

¿Tiene algo que ver la forma de la curvatura de la pantalla de la lámpara, basada en una espiral logarítmica, con nuestra relación intuitiva con la luz? Sí, efectivamente.

Nuestro mecanismo visual está construido de tal manera que primordialmente vemos diferencias. No vemos niveles absolutos como tampoco decimos "esos objetos son tan o cuan luminosos", como si tuviéramos en el cuerpo un fotómetro, no. Lo que vemos es la relación entre cuan luminosos son los objetos; "Este objeto es más (o menos) luminoso que el otro". La percepción de la luz es relativa y si un objeto es el doble de luminoso que otro, requiere una diferencia equivalente en relación con un tercer objeto, una duplicación o una reducción a la mitad de su luminosidad. Así obtenemos una serie de cifras, por ejemplo 50-100-200-400, etc., lo que equivale a afirmar que nuestra percepción de la luminosidad es logarítmica.

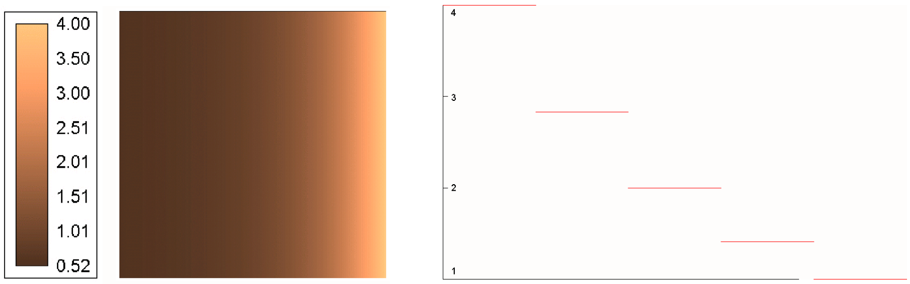
Si ahora observamos cómo la luz de una lámpara se distribuye en una sala, podemos asimilarla a la luz de una vela que ilumine con igual intensidad en todos los sentidos. La intensidad luminosa en un punto determinado y a una cierta distancia desde la vela es inversamente proporcional al área de la superficie de la esfera que tomando la vela como centro pasa a través del punto determinado, ya que toda la luz de la vela tiene que distribuirse por toda la superficie de la esfera.

Cuanto mayor es la distancia al punto, mayor resulta la superficie de la esfera y menor es la luz que llega al punto. Todo se torna más oscuro, como todos sabemos, cuanto más lejos está el punto de la fuente luminosa. Si ahora tenemos, por ejemplo, un valor 400 a una distancia que denominaremos 1, obtendremos un valor de 200 a una distancia de $\sqrt{2}$, porque el área de la superficie de la esfera es $4 \times \pi \times r^2$. El valor 100 se obtiene a una distancia 2 y el valor 50 a una distancia $2\sqrt{2}$.

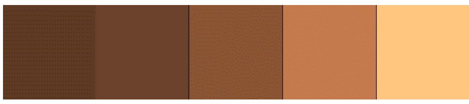


Las distancias en el espacio desde un punto de luz hasta los puntos que tengan la misma diferencia de luminosidad se hallan en una progresión geométrica: el espacio se divide en forma logarítmica y se percibe como algo totalmente natural, intuitivamente correcto, porque coincide con nuestro mecanismo visual logarítmico.

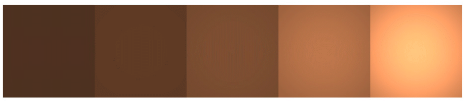
En la figura, se muestra una propagación de la luz de manera logarítmica en una serie de círculos concéntricos cuyos radios crecen según una progresión geométrica. Si se ubican unos objetos a estas distancias del foco luminoso, los objetos serán iluminados de tal manera que sus luminosidades conforman una escala uniforme de



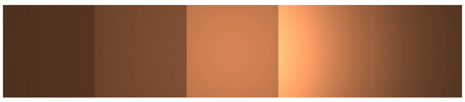
(a)



(b)



(c)



El experimento de la página anterior supone, en realidad, graves dificultades. En primer lugar, no podemos confiar del todo en la visualización en pantalla, ni menos en la impresión, de la gradación monocroma elegida (ar.iz.). Luego, para obtener una escala regular (a), hemos supuesto un plano de iluminación con emisión esférica, lo cual es absurdo. Si imaginamos cinco iluminantes puntuales encarando cada casilla, veremos en cada una de estas una degradación circular, tanto más pronunciada cuanto más cerca de su lámpara esté la casilla (b): esto dificulta bastante la percepción de la escala resultante. Más difícil será si ponemos una sola lámpara, en frente de la casilla central (c). Entonces, la cuarta casilla queda más iluminada que la quinta, en posición muy oblicua. Todo se complicará aún si trabajamos en perspectiva central, en vez de paralela, es decir: tomando en cuenta el escorzo espacial…

Experimento de iluminación (dibujo propio).

grises. En nuestro mecanismo visual, la escala uniforme de grises se interpreta como algo *armonioso*, porque los saltos siempre tienen igual ritmo entre sí, tanto en la luminosidad como en la distancia.

Una condición necesaria para que esto ocurra es que los objetos estén en un mismo ángulo de incidencia desde la fuente luminosa; de lo contrario se destruye la serie *armoniosa*.

Si dibujamos una espiral logarítmica dentro de nuestro conjunto de círculos -lo cual puede realizarse, entre otros sistemas, utilizando como líneas auxiliares rayos luminosos, con un ángulo igual entre ellos, hasta hacerlos cortar los círculos-, sabemos que el ángulo de incidencia de los rayos en todos los puntos de la espiral es el mismo, de tal manera que la condición para que se forme una escala *armoniosa* de tonos grises se cumple.

Por consiguiente, se puede observar que los valores de luminosidad, que en conjunto forman una serie *armoniosa*, aparecen en la pantalla (en la que se ha transformado la espiral), con la misma relación entre sí desde la fuente luminosa, igual que las distancias requeridas para que se produzca una reducción *armoniosa* de la luz en el espacio.

Es decir, en una pantalla que ha sido dibujada sobre una espiral logarítmica, la luz decrece como una escala larga y *armoniosa* de tonos grises, con una transición suave.

Esto no puede dejar de ser importante en relación con la belleza especial de la lámpara, una sensación evidente que se siente cuando uno contempla la lámpara PH, su *luminosidad lógica*.

Podemos observar el diagrama e imaginarnos cualquier otra curva dibujada en él. Estas curvas no conformarán nunca una escala *armoniosa* de grises, porque los valores correctos de luminosidad estarán a uno distancia equivocada entre ellos y viceversa.

Por el contrario, se pueden dibujar tantas espirales logarítmicas como queramos sin destrozar la armonía; lo importante no es la espiral logarítmica que se elige, sino el hecho de que se elija una espiral logarítmica."

Steen Jørgensen[1]

En esta cita, para evitar confusiones, he cambiado todas las ocurrencias del adjetivo "armónico" por *armonioso*. En efecto, para nosotros, lo "armónico" se refiere a una progresión matemática precisa (correspondiendo a la tercera mediedad pitagórica), mientras que el autor considera la armonía en el sentido común de esta palabra.

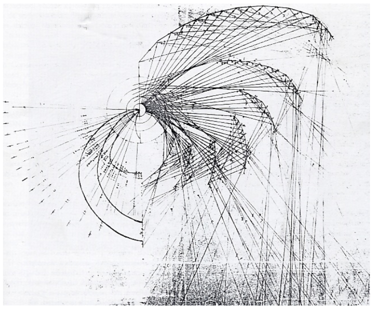
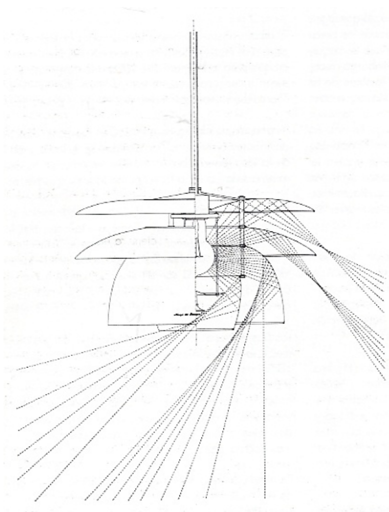
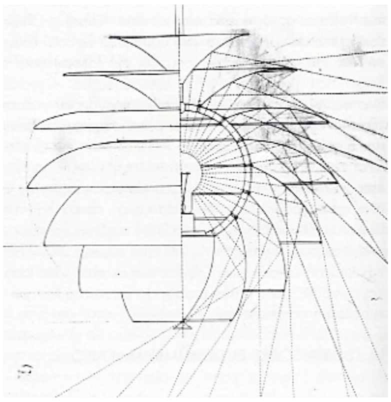
Dicho eso, el razonamiento geométrico seguido por Steen Jørgensen es perfectamente correcto: todos los rayos trazados desde el ápex de una espiral logarítmica inciden sobre ella con el mismo ángulo, y las iluminancias se establecen en la gradación aquí descrita. Pero las luminancias resultantes sólo seguirían la misma ley si el ojo receptor también se ubicase en el ápex, lo cual es materialmente imposible. Sin embargo - en mi opinión - un desplazamiento del ojo hacia una posición más sostenible no tiene porqué cancelar del todo su aprecio de tales "gradaciones armoniosas", lo mismo que una bella forma escorzada por una mirada oblicuándose no pierde enseguida sus atractivos, porque nuestra experiencia visual suele mostrarse capaz de compensar lo que sabe resultar deformado por las circunstancias de una percepción particular.

Más problemático, creo, es el salto repentino que se hace desde una superficie continua a la misma discretizada. En efecto, pienso que nuestra mirada es incapaz de juzgar de la calidad de una gradación continua: más bien, tales gradaciones siempre parecen bellas, cuál sea su ley, sin que podamos distinguir de las demás la que presenta un gradiente constante. Quizás percatándose de ello, el autor razona sobre la espiral discretizada, que presenta una escala de iluminancia en la cual el ojo sí puede reconocer, por ejemplo, un paso constante. Sin embargo, en tal caso, las distintas porciones discretizadas no recibirán una iluminación constante, y una ligera gradación se formará en cada una, suficiente para hacer imposible su clara percepción...

Por tales razones, si bien podemos multiplicar los razonamientos geométricos sobre la espiral logarítmica, no podemos enseñar a la mirada una evidencia gráfica parecida a las que construimos en los capítulos anteriores, que le permitiera zanjar definitivamente el asunto...

[1] "Luminosidad lógica", Steen Jørgensen, Edicions UPC, Barcelona, 2000.



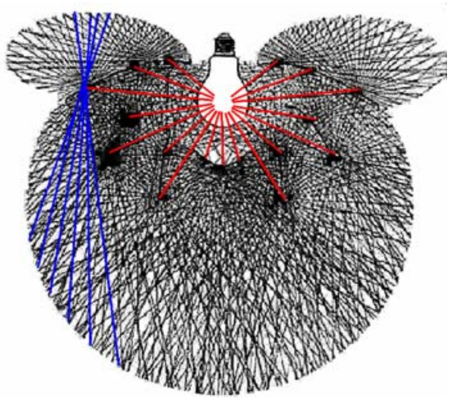
La iluminación de la lámpara PH (arriba) puede explicarse geométricamente, pero resulta harto más arduo dar de ella una interpretación puramente visual. Poul Henningsen y sus asistentes utilizaban el trazado manual de rayos (abajo) para intentar prever la iluminación que producirían sus diseños. En los tres casos aquí presentados, notamos que cada parte del reflector trabaja de manera autónoma, evitándose las reflexiones múltiples.

Tres vistas de la lámpara PH; tres estudios de luminarias realizados por Poul Henningsen mediante el trazado manual de rayos.

- El trazado de rayos -

¿Hemos entonces de abandonar aquí el análisis de la lámpara PH y de su "iluminación lógica"? Si remontamos a los estudios del mismo Poul Henningsen, observamos que sus asistentes y él trabajaban casi exclusivamente trazando rayos sobre el papel, o incluso materializándolos en el espacio mediante cuerdas de piano tensadas... Se trata de un método gráfico efectivo - el único disponible en esta época - pero también muy peligroso: conduce a confiar excesivamente en el aspecto esquemático del razonamiento, que encanta fácilmente el ojo, propenso de por sí a tales atajos hacia la simplicidad...

Eso ocurre con el famoso dibujo publicitario de la figura izquierda:



En el negativo de la derecha, vemos más claramente el método seguido. La lámpara PH está constituida por tres tramos rotados de una misma espiral logarítmica, y por un pequeño difusor abajo de la bombilla. Desde el centro de la bombilla - que es también el ápex de los seis tramos de espiral -, se trazan unos rayos distribuidos a intervalo angular constante (en rojo), de modo que tres de ellos impactan sobre la primera espiral, dos sobre cada uno de los dos tramos siguientes, y tres sobre el difusor inferior. Luego, cada rayo se refleja y se refracta (la luminaria está considerada aquí en su variante translúcida) de manera difusa (en azul).

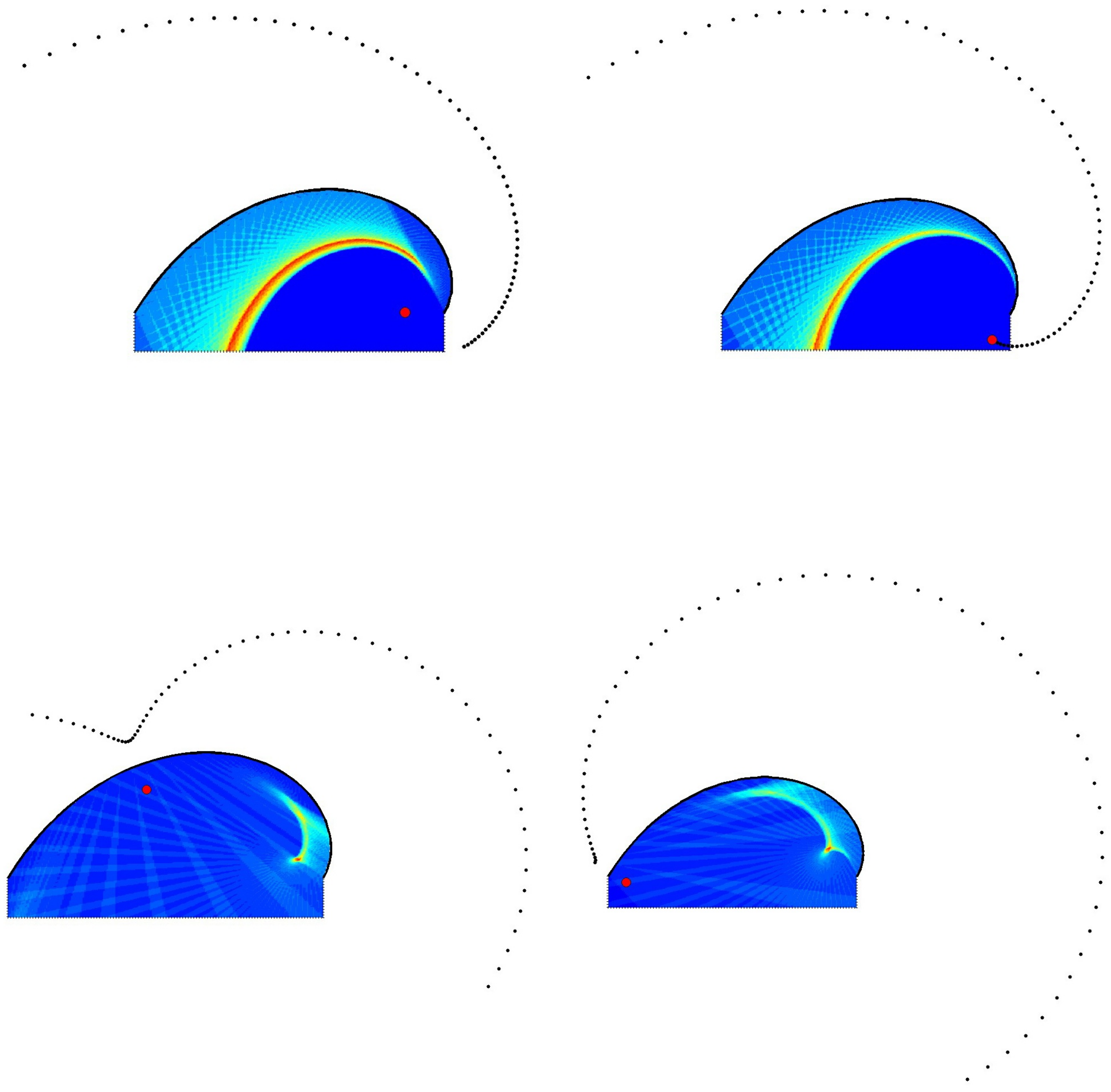
El resultado es un gráfico muy bonito, que da una impresión de gran control, pero que sería igual para cualquier otra luminaria difusora... Además, la difusión no puede estudiarse en un corte, aún en el caso de una superficie de revolución, problema del cual Poul Henningsen se hizo muy consciente, igual que los acústicos de su época, que utilizaban los mismos métodos manuales para diseñar salas, encontrándose frente a las mismas dificultades...

En la actualidad, a pesar de los progresos informáticos, tales dificultades permanecen. En particular, sería una locura emprender un estudio tridimensional de la difusión - con un cálculo de la *radiosidad*, por ejemplo - sin una precisa intuición de lo que se busca, y de cómo representar los resultados, y de qué sentido tendrían estos resultados para el ojo, o para el oído...

- La espiral logarítmica -

Debemos, pues, volver al estudio de las características geométricas de la curva empleada, esperando que sus propiedades intrínsecas hallen alguna utilidad en nuestros diseños: ayer como hoy, eso sigue siendo una verdad: ¡el mejor análisis es el diseño!

Toda curva define, con respecto a un punto cualquiera que llamaremos "fuente", una serie de curvas que la acompañan, y que manifiestan sus propiedades más íntimas. Dos de estas curvas *acompañantes* nos interesan aquí: la *ortotómica*, imagen de la curva con respecto a la fuente, y la *cáustica*, envoltura de los rayos reflejados por la curva.

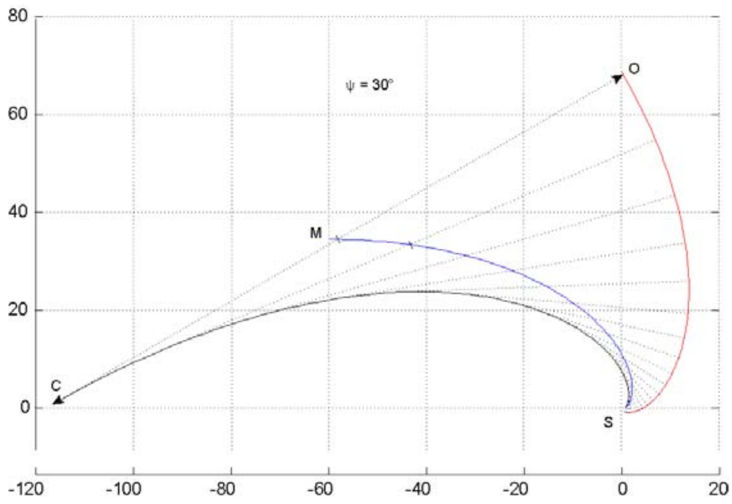


Cuando la fuente (disco rojo) está en el ápex de la espiral logarítmica (ar.iz.), la ortotómica (en puntitos) es también una espiral logarítmica, y los rayos reflejados dibujan una cáustica (en rojo) con la misma forma. Esta doble propiedad resiste bastante bien a un pequeño desplazamiento de la fuente (ar.dr.). Si la fuente se desplaza más (abajo), la ortotómica y la cáustica se deforman en curvas más complejas.

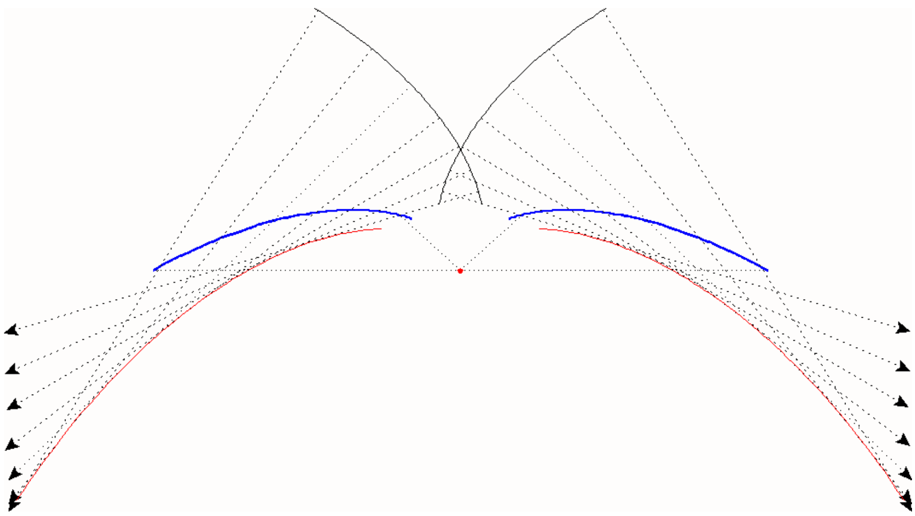
Cuatro estudios de la reflexión por una espiral logarítmica (dibujo propio).

Sin entrar en detalles, recordemos que la función espiral logarítmica es una exponencial, forma que se deriva en sí misma, lo cual explica la siguiente propiedad: la ortotómica y la cáustica de reflexión de un dispositivo óptico en forma de espiral logarítmica son también espirales logarítmicas cuando la fuente ocupa el ápex del dispositivo.

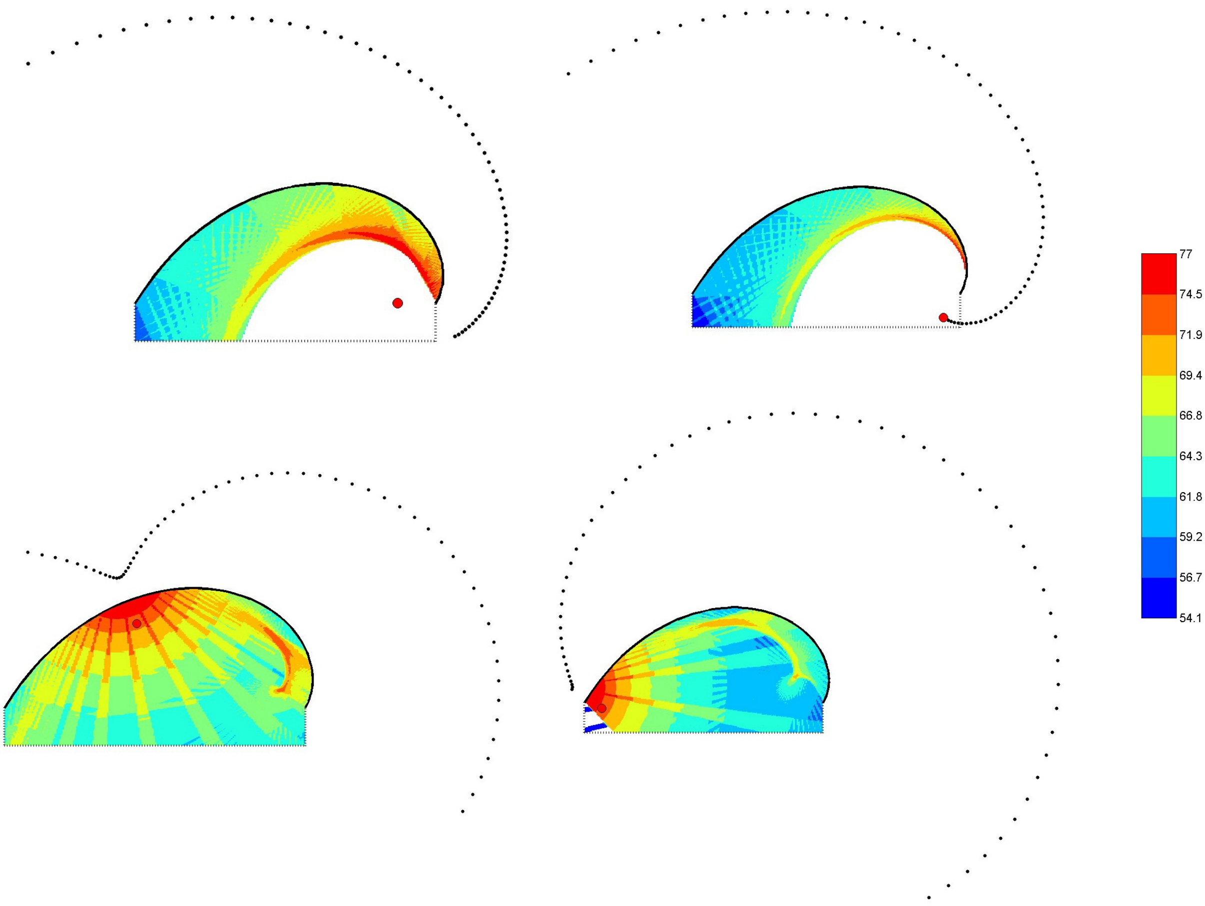
En la siguiente figura, la fuente *S* se halla en el ápex de un tramo de espiral logarítmica que acaba en el punto *M*. Considerando este tramo como un espejo, encontramos las imágenes de *S* distribuidas sobre la ortotómica acabando en *O*. Los rayos reflejados por el espejo son todos tangentes a la cáustica acabando en *C*. Las tres curvas son tramos de espiral logarítmica, originadas en el mismo ápex *S*...



La lámpara PH se beneficia de esta propiedad. En efecto, si emplazamos la bombilla en el ápex de una superficie de revolución construida sobre la espiral logarítmica, obtenemos la configuración de la siguiente ilustración: toda la luz que incide sobre el reflector (en azul) se refleja en un haz comprendido entre el reflector y su cáustica (en rojo). Podemos luego emplazar un segundo reflector siguiendo esta cáustica: tendrá la misma forma que el primero, y la luz reflejada por éste rozará aquel sin sufrir una segunda reflexión...



En resumen, Poul Henningsen aprovechó dos propiedades muy notables de la espiral logarítmica: su capacidad de reproducirse a sí misma y la contención de sus reflexiones en un haz limitado por una cáustica de misma forma. Ambas propiedades conducen a trabajar esta curva por tramos, como en la lámpara PH. Podríamos construir un dispositivo acústico sobre los mismos principios. En efecto, un techo constituido por tramos de sección espiral logarítmica podría reforzar, mediante sus reflexiones, el nivel sonoro en la parte trasera de una sala, sin afectar la parte próxima a la fuente, la cual, por encontrarse en el campo directo, no necesita ayuda...



Los niveles en decibelios pueden corresponder, indiferentemente, a niveles sonoros o luminosos (teniendo en cuenta el hecho que el ojo, como el oído, escorza las intensidades). Si la fuente se ubica cerca del ápex del reflector (arriba), observamos que toda la energía reflejada se distribuye en una región alejada de ella: esta característica - muy diferente de lo que observamos con los reflectores elípticos o parabólicos - encuentra aplicaciones interesantes, tanto en luminotecnia como en acústica…

Cuatro estudios de los niveles reflejados (en decibelios) por una espiral logarítmica (dibujo propio).

Al principio, hay la redondez, manifestada por el círculo, y la alineación, cuyo esquema elemental es la recta. La recta y el círculo, que la mirada escorza, reconociendo la regularidad en sus distribuciones armónicas y la redondez en sus deformaciones cónicas, cuádricas... El paraboloide hiperbólico es un plano deformado, el elipse un círculo visto de soslayo, como la parábola...

La recta enfrentada al círculo: lo discreto y lo continuo. Partiendo de la esfera, pura redondez continua, descubrimos el cilindro o el cono, redondez con algo de alineación, continuidad con algo de discreto. Las aristas afirman su presencia, *discreta*, pero no son meras "soluciones de continuidad": el cubo y los demás poliedros son esquemas *positivamente* discretos, que tienden sin embargo a indicar nuevas ideas continuas (ver las "supercuádricas"), figuras esencialmente alineadas, que encierran cierta posibilidad de redondez (los poliedros regulares).

En eso, ha aparecido el ángulo recto, relación al horizonte y a la gravidez. El horizonte, diapasón de la mirada: el espacio visual no es un espacio abstracto, no es ingrávido, y, sin embargo, los movimientos en él son de pura cinemática: no hay fuerza externa que supere la capacidad de imaginación del ojo. Pero esta cinemática tiene su coherencia, expresable geométricamente como *relación anarmónica*. La mirada aprehende el espacio dentro del tiempo: la coherencia espacial es una coherencia temporal, la imagen es un rastreo.

Y los rayos se reflejan, formándose nuevas figuras geométricas elementales, como la espiral logarítmica. Figuras con sus propiedades cinemáticas y catóptricas, cáusticas de reflexión, y de refracción. Figuras en color.

Aquí, un último escollo por evitar: ordenarlo todo en torno a las figuras de la geometría tradicional, desencarnadas, abstractas, reconstruir otra vez la "geometría visual", con sus atributos jerarquizados y renderizables.

El espacio sensible es también auditivo, y el oído lo pone todo patas arriba: para él, no existen ni la alineación, ni el ángulo recto. Establece otras propiedades, que la geometría tradicional no ha aprendido a manejar, pero no es amorfo: también organiza, y escorza su información, como el ojo.

¿Y el color? ¿Un simple accidente de la forma, o bien el objeto mismo de la mirada, *lo que se ve*? Entonces, la forma se reduce a un atributo del color, como lo es del sonido. No una geometría en color, sino una geometría *del* color, y del sonido: una geometría sensible.

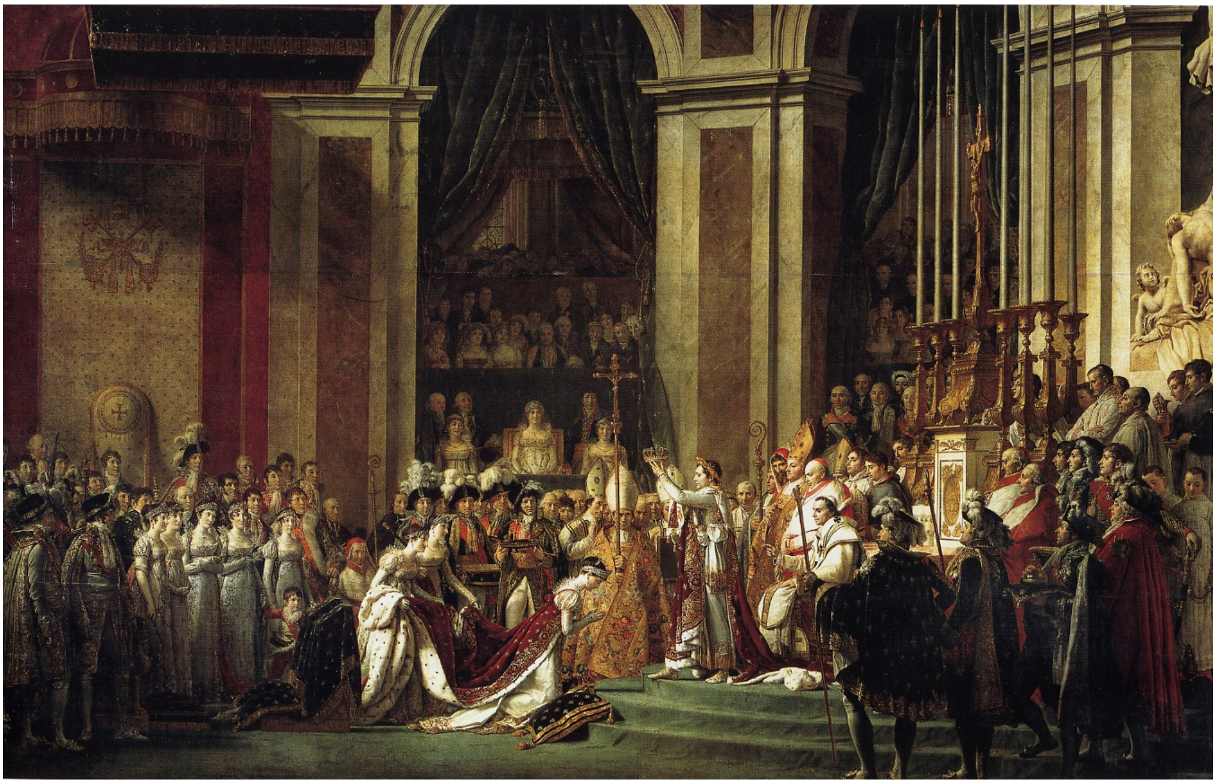
Al principio, hay lo amarillo, lo verde, lo azul. Lo amarillo forma, en medio de lo azul, un círculo. Y lo azul se extiende, degradándose desde una recta saturada, que linda con lo verde - el horizonte -, hasta perder toda su saturación en contacto con el brillante amarillo circular. Lo verde, a su vez, se empaña, se diversifica, hay en él claros y sombras, alberga manchas multicolores con diferentes formas y extensiones. Pero su fortuna, como la de lo azul, está atada a la del disco amarillo. Cuando éste se acerca a la frontera, se hace rojizo y, en su posterior abolición, se lleva los demás colores, dejando grises azulados, contrastes de muy poca luz, y luego nada. Y en la noche resultante, los lejanos de repente se acercan: los rumores se hacen más presentes, el oído trabaja en todas las direcciones, y el ojo, disconforme, sueña con un nuevo amanecer o, por lo menos, con un poco de luz eléctrica...

Origen de las ilustraciones

p.181 iz.: - Paraboloides hiperbólicos (dibujo propio).
p.182 iz.: - Paraboloides hiperbólicos (dibujo propio).
p.183 iz.: - Paraboloides hiperbólicos (dibujo propio).
p.184 iz.: - La lámpara PH, *in* "Luminosidad lógica", Steen Jørgensen, Edicions UPC, Barcelona, 2000.
- La lámpara PH, *in* "Light years ahead – The story of the PH lamp", Louis Poulsen, Ed. Tina Jørstian & Poul Erik Munk Nielsen, Dinamarca, 1994.
- Evolución del trabajo de Poul Henningsen, *in* "Light years ahead – The story of the PH lamp", Louis Poulsen, Ed. Tina Jørstian & Poul Erik Munk Nielsen, Dinamarca, 1994.
p.185 iz.: - Experimento de iluminación (dibujo propio).
p.186 iz.: - Experimento de iluminación (dibujo propio).
p.187 iz.: - Tres vistas de la lámpara PH, *in* "Luminosidad lógica", Steen Jørgensen, Edicions UPC, Barcelona, 2000.
- Trazado de rayos manual, *in* "Luminosidad lógica", Steen Jørgensen, Edicions UPC, Barcelona, 2000.
p. 188 iz.: - Estudio de la espiral logarítmica (dibujo propio).
p. 189 iz.: - Estudio de la espiral logarítmica (dibujo propio).

- 20 -

El color y su sombra



La coronación muy geométrica de Napoleón, según Jacques-Louis David, y la coronación poco geométrica de Carlos X, según François Gérard...

“La coronación de Napoleón”, J.-Louis David (1805-07); “La coronación de Carlos X”, François Gérard (1827).

20. El color y su sombra

- En el siglo XVII... -

El siglo XVII fue la época dorada de la geometría visual. Pasando de los pintores a los geómetras, la perspectiva central había ganado sus letras de nobleza académicas y, así aureolada, volvía una y otra vez a la pintura, llegando a disputar al color la primacía: el arte del pincel había de ser, ante todo, arte del trazado y, como lo habían sugerido ambiguamente Piero y Leonardo, y los delicados iluminadores franceses antes de ellos, con su uso generalizado de la perspectiva aérea, y luego Nicolas Poussin, con sus severas geometrías, el color no debía aportar más que lujo - en los ricos atuendos de las élites -, refuerzo perspectivo - en las azuladas lejanías -, símbolos más o menos herméticos - de pasiones, linajes o partidos. Así, por lo menos, se pensaba en el sur.

"Hacia 1670, Rubens es, en París, el pintor del cual se habla. A título póstumo, es el héroe de la querella del color y del dibujo, entre rubenistas y poussinistas. Al origen de la polémica, dos acontecimientos de naturaleza muy distinta: primero, la adquisición, por el duque de Richelieu, de un conjunto considerable de obras del Flamenco, reconocimiento que emplaza Rubens en el primer rango de los artistas; luego, en 1671, una conferencia pronunciada en la Academia por Philippe de Champaigne a propósito de un cuadro de Ticiano. Suscita la réplica de otros académicos y una polémica pública.

Esta lleva sobre varios puntos. Teórico: en el arte de pintar y su enseñanza, ¿la preeminencia ha de pertenecer al dibujo o al color? Estético: ¿Es Rubens "el Dios de la pintura", como lo afirma Roger de Piles o este título ha de ser descernido a Rafael o a Poussin? Del lado de estos últimos - que es el de las formas definidas por la línea y del espacio construido por la geometría y la perspectiva -, se recurre a la Antigüedad y a la Italia del Renacimiento. Del otro, se es más nórdico y más moderno.

Entre 1671 y 1681, panfletos y ensayos proliferan. El solo Roger de Piles, rubenista enrabiado, publica su "Diálogo sobre el colorido", su "Carta de un Francés à un gentilhombre flamenco", seguida por una segunda en réplica a una "Respuesta" a la primera. Añade un poema satírico, "El Banquete de los curiosos", que le vale cuatro líbelas en prosa o en versos, donde se le trata de "hombre tan presuntuoso como ignorante". En 1677, se publican sus "Conversaciones sobre el conocimiento de la pintura" y una "Disertación sobre Rubens", que prolongan en 1681 una "Disertación sobre los más famosos pintores" y una "Vida de Rubens".

Poco después, Piles abandona Francia para cumplir con misiones diplomáticas, y la querella se acaba, tras haber durado una década. Cuando vuelve a Paris y publica en 1707 su "Curso de pintura por principios", sus adversarios de antaño han muerto y la evolución de la pintura le ha dado, entretanto, más bien la razón.

En cuanto a su convicción, la expresa ahora en términos filosóficos: "podemos considerar el colorido como la diferencia de la pintura, y el dibujo como su género. Del mismo modo que la razón es la diferencia del hombre, porque lo constituye en su ser, que lo distingue de los otros animales y que lo pone encima de ellos". El color es lo que hace visibles cuerpos y objetos, en la naturaleza como en la pintura. El "Curso" se termina lógicamente con una notación: Rubens tiene 18 en composición, 13 en dibujo, 17 en colorido y 17 en expresión. En las mismas rúbricas, Poussin obtiene 15, 17, 6 y 15 y Miguel Ángel 8, 17, 4 y 8. Rubens es, luego, efectivamente el más grande.

Esta querella no es más que uno de los episodios de un debate sin fin: el que ha opuesto, según las épocas, Roma y Venecia, Poussin y Rubens, el Sur y el Norte. Encontramos huellas suyas hasta en las reflexiones de Matisse sobre el color y el trazo. Así como indicios,

El equilibrio de los colores en la obra de Jean Fouquet: el verde y el rojo, cuando están saturados, presentan más o menos el mismo nivel de luminosidad y, según Goethe, se equilibran a partes iguales; en cambio, el azul-violeta es siempre mucho más oscuro que el naranja-amarillo, y necesita extenderse mucho más. A partir de allí, se entiende el dinamismo de la combinación preferida de los iluminadores franceses: rojo - verde - azul.

Cuatro miniaturas de Jean Fouquet (siglo XV).

naturalmente, en la pintura francesa de finales del XVII, cuando los mismos artistas habían de tomar partido".

Philippe Dagen[1]

En el fondo, Roger de Piles no hace más que reafirmar la evidencia ya proclamada por Aristóteles: "lo que se ve", es el color. ¿No es la pintura *arte del color* como la música es *arte del sonido*? En cuanto a la *forma,* ¿no se debería considerar como un simple atributo del color, como lo es del sonido en la música?

Lo que está en cuestión, es la otra gran conquista perceptiva de la Edad Media europea, aparte de la polifonía musical: el color. El color liberado de las antiguas inquietudes filosóficas que, pese a la sorprendente afirmación aristotélica, lo encerraban en el dominio de la confusión, de la corrupción y de las apariencias. El color múltiple, plenamente discreto, alquímico, exhibiendo sin complejo las prodigiosas personalidades de las tierras nobles y de las piedras preciosas. El color dominante de las vidrieras y de los iluminadores, especialmente en los *Beatus* aquitanos y españoles, donde las formas no son más que extensiones para pintar, campos para batallas sin fin entre rojos, verdes y azules...

¿Y qué propone la *geometría visual*, complemento subterráneo de la geometría proyectiva, platónica y abstracta, que los teóricos del siglo XVII están construyendo? Como siempre: jerarquías, en un orden que remonta, directamente, a Filolaos de Crotona, pitagórico, cuyos libros - hoy perdidos - el mismo Platón compró tan caro en uno de sus viajes a Sicilia:

"Según Filolaos, la magnitud matemática a tres dimensiones está contenida en el número 4[2], la calidad y el color de la naturaleza visible en el número 5, el principio vital en el número 6, el intelecto, la salud y lo que llamamos la luz en el número 7. Tras lo cual, añade que el amor, la amistad, el ardid y la intelección son conferidos a los seres por el número 8".

Filolaos [Seudo-Jámblico][3]

Esta lista presenta ya en germen la decimonónica "teoría del rendu", que le quitará solamente sus aspectos metafísicos: uno, los puntos; dos, las líneas; tres, las superficies; cuatro, los cuerpos sólidos; cinco, los colores y texturas; seis, el movimiento; siete, la iluminación y su radiosidad; ocho, el toque mágico que añade una nota de realismo: ¡eso parece un manual de renderización!

El modelo determinista de la mirada se basa, efectivamente, en el postulado de que el "realismo" se consigue en la representación por una acumulación de consideraciones jerarquizadas: primero, la composición geométrica (perspectiva lineal), luego la coloración y el texturado, la iluminación, la adumbración (esciagrafía), las reflexiones (catóptrica), las refracciones (dióptrica), la difusión por el cielo (perspectiva atmosférica), las difracciones e interferencias (irisaciones)... Añadiendo unos tras otros los *efectos*, se enriquece continuamente el dibujo, desde la simplicidad geométrica más abstracta hasta el trampantojo más "confundente"...

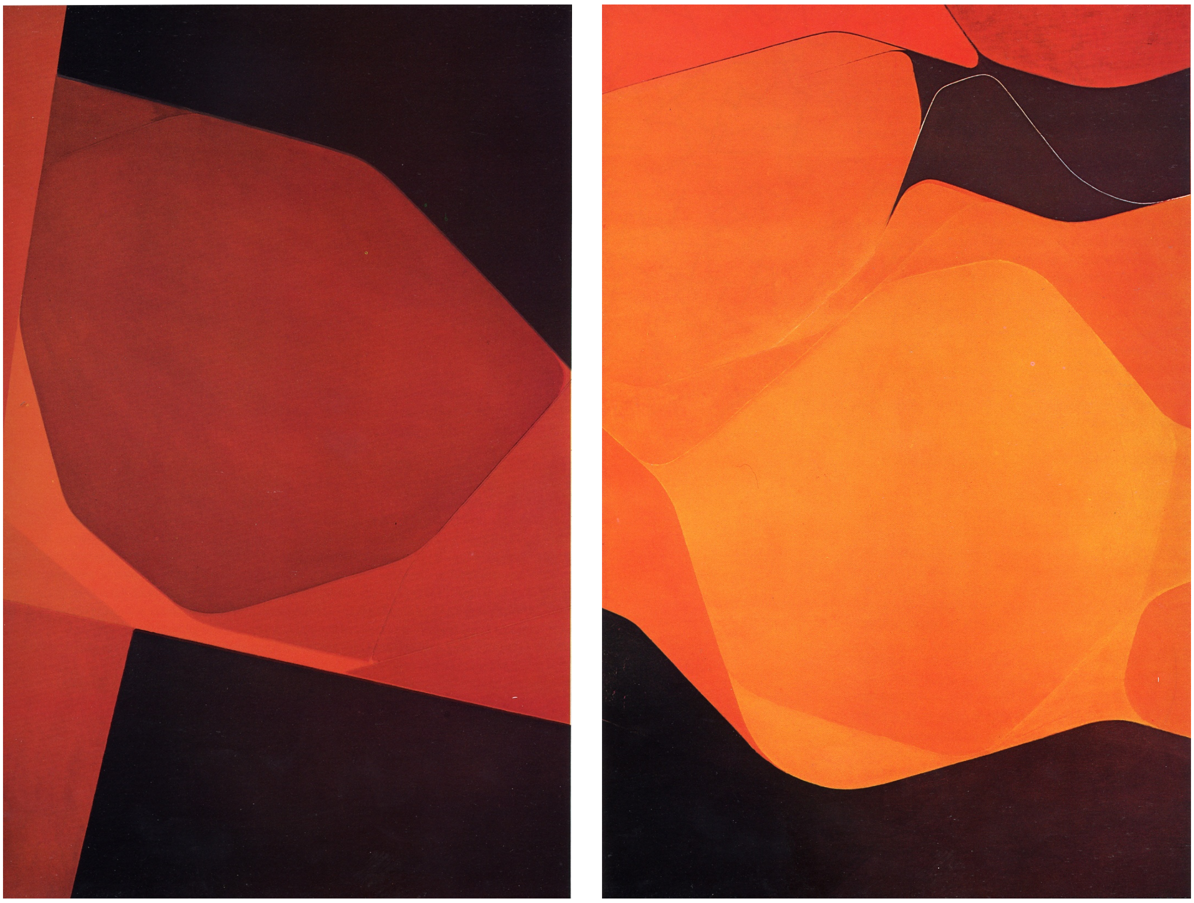
En la *geometría visual* así construida, todos los demás aspectos de la visión (los frecuenciales, energéticos y temporales) se subordinan al aspecto espacial considerado geométricamente, mediante figuras arquetipales en relación: así, exactamente, se construye una escena en cualquier programa actual de renderización.

---

[1] "A Arras, la querelle du dessin et de la couleur", artículo de Philippe Dagen en el diario « Le Monde » del 12 de marzo de 2004, a propósito de la exposición "Rubens contre Poussin" celebrada entonces en el Museo de Bellas Artes de Arras (Pas-de-Calais, Francia).

[2] Según el mismo texto, "los elementos primeros son el punto, la línea, el triángulo y la pirámide".

[3] "Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988. Filolaos (p. 492), *in* "Théologoumènes arithmétiques", Pseudo-Jamblique.



“Orto II” (1967-69) y “Mandala II” (1964), Pablo Palazuelo.

Lo que puede sorprender, es la profunda afinidad que esta geometría visual mantiene con el modelo platónico de la visión, desarrollado sin embargo por autores - Monge y Poncelet - que vivían en el mismo país y en la misma época que los defensores de la "teoría del rendu". No hubo polémica entre ellos, sino complementariedad, simbiosis, relación de maestro a alumno. Y no ha de ser tan sorprendente. De hecho, basta leer la lista anterior de efectos en sentido contrario, depurando progresivamente el mundo sensible de sus apariencias, hasta desnudar por completo el esqueleto ideal de la pura geometría, para rehacer el camino que el mismo Platón, no por nada lector admirativo de Filolaos, defiende en "La República".

Sin embargo, lo que es propio de la actitud contemporánea - desde el siglo XIX - frente a los problemas perceptivos, es la propensión a desarrollar simultáneamente dos modelos *a priori* contrarios, pero en el fondo complementarios, donde las insuficiencias del segundo palian la excesiva dificultad del primero. Así ensamblados, el modelo platónico y el modelo determinista conforman las dos caras de una teoría contradictoria pero ya indisociable, la que se enseña todavía en las escuelas de Bellas Artes y de arquitectura con el nombre de "geometría descriptiva". Tenemos, al mismo tiempo, la exigencia platónica de una geometría atemporal, con la versión no-orientada de la proyección central, y los métodos complementarios de renderización, donde las nociones de perspectiva aérea, de esciagrafía y de rayos atmosféricos se hallan ya escondidas en el vientre oscuro de los programas informáticos... Del mismo modo, en las clases adyacentes de "luminotecnia" o de "acústica arquitectónica", nos encontramos con la fusión de las teorías ondulatorias y estadísticas, las primeras explicando lo que no saben hacer, y las segundas haciendo lo que no saben explicar, valiéndose unas de otras como el ciego y su Lazarillo...

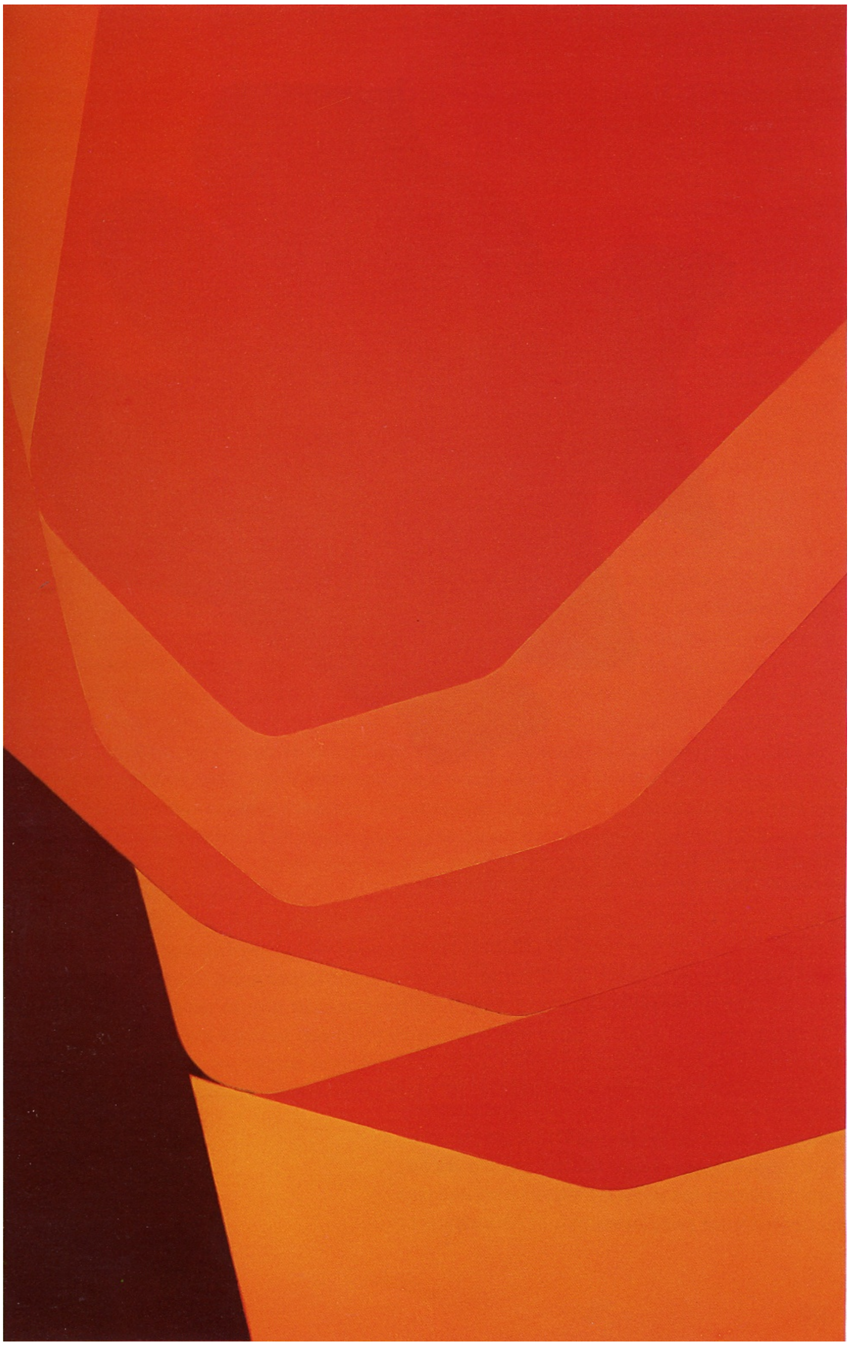
Esa es la razón por lo cual me niego, personalmente, a reconocer al modelo platónico de la visión la limpidez y nitidez que presentan, para mí, los modelos euclidiano y probabilista. Creo, además, que en la misma causa hallaron ya su límite las teorías pictóricas del Renacimiento. Cuando Piero o Leonardo pintaban, de poco les servía sus disquisiciones teóricas sobre los distintos tipos de perspectiva: en la pintura, los efectos no se pueden sumar de forma algorítmica: el todo no se divide simplemente en partes autónomas. Entre los escritos y las obras de aquellos pintores, hay un gran salto cualitativo, donde éstas desmienten la subordinación que aquellos afirman del color a la perspectiva.

¿Ha de considerarse el color como atributo de la forma, o la forma como atributo del color? Philippe Dagen recuerda en su artículo cómo las dos posibles respuestas se opusieron ya férreamente en el siglo XVII, e incluso antes. Del lado de la geometría visual: la escuela romana, Poussin, David, Ingres,... Del lado de la alquimia del color: la escuela veneciana, Rubens, los impresionistas, Cézanne,... En esta lucha - emprendida ya por los iluminadores desde la alta edad media - creció y se fortaleció la pintura europea.

En el siglo XX, pintores como Paul Klee o Pablo Palazuelo han buscado conscientemente un término medio entre geometría y color, un equilibrio que permitiera a ambos aspectos influirse sin subordinaciones.

"Las formas de la materialidad, más que estados, son pasajes – y lo que me importa sobre todo, sería entender las misteriosas acciones y relaciones que ocurren durante estas metamorfosis. Es la razón por la cual pienso que los adjetivos contribuirían a una inteligencia más profunda si, hablando del color, hiciéramos un uso de los verbos tan frecuente como el que hacemos de los sustantivos. El color rojo, por ejemplo, es para mí tanto lo que se enrojece como lo rojizo, y en ciertos momentos tengo la impresión de identificarme con él, de sentir con él la tensión que lo constriñe a pasar, a transformarse en violeta o naranja.

El aumento progresivo de valor, que la imaginación del artista puede comunicar a las formas de la sustancia que se encuentran en un proceso de transformación, se acompaña de la imaginación y aparición paralela de los colores en un orden de sucesión que, desde los tiempos



"Orto IV", Pablo Palazuelo (1969).

más alejados, se ha manifestado siempre de una manera casi constante. El color *negro* se imagina primero en el trabajo de la materia como fundamento sustancial opaco y tenebroso; el color *citrina* (amarillo verdoso iridiscente) como multiplicidad de las posibles metamorfosis de la sustancia; el *blanco* como iluminación; y finalmente el color *rojo*, que el artista imagina cristalino porque lo siente como un foco de nueva luz terrestre y el receptáculo de un "fuego que se enciende con medida", según la expresión de Heráclito."

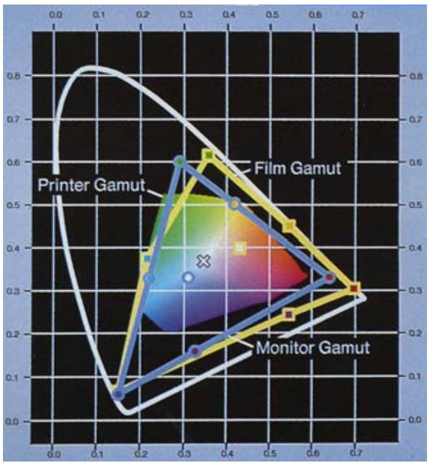
Pablo Palazuelo[1]

Cuando el autor emplaza el rojo entre el violeta y el naranja, se refiere naturalmente al círculo cromático newtoniano. Luego, remonta a Empédocles: otro punto de partida.

- ¿Cuántos son los colores? -

Con esta pregunta, nada inocente, empezó el presente texto. En particular, sabíamos que los medios actuales de visualización y de impresión se basan en el "postulado de tricromaticidad", que no es en absoluto un teorema: mezclando tres luces o cuatro tintes (con el negro), obtenemos mucha variedad, pero es imposible reproducir todos los colores visibles.

En el siguiente gráfico[2], se muestran, sobre el diagrama de la CIE, las posibilidades de una pantalla de ordenador (azul), de una película fotográfica heptacroma (en amarillo), y de una impresora. En el mejor caso, como se ve, faltan todos los colores puros, una gran parte de los verdes azulados y de los púrpura.



Pero, ¿acaso el mismo ojo no funciona con tres tipos de conos? ¿Cómo se explica entonces que la tecnología, partiendo del mismo principio, no lo pueda imitar? Sin entrar en detalles[3], resumiremos algunas teorías al respecto.

En contra de la teoría tricromática de Young y Helmholtz (1856-1866), Hering (1878) propuso la teoría de los tres pares de oponentes (rojo/verde, amarillo/azul, negro/blanco), tres canales que transmitirían una información contrastada al cerebro. En un famoso artículo de 1969, Berlin y Kay publicaron los resultados de un estudio sobre una veintena de idiomas "primitivos", supuestamente no contaminados por el inglés, su idioma de referencia. Concluían en el siguiente esquema evolutivo de diferenciación: si un idioma tiene sólo dos categorías para el color, serán siempre el blanco y el negro; luego viene el rojo, luego el amarillo/verde, hasta formar cinco categorías; la sexta es el azul, la séptima el marrón; luego vienen, en desorden, el rosa, el gris, el naranja, el púrpura,...

Este esquema es muy tentador: es coherente, por ejemplo, con las descripciones presocráticas o con la teoría de Michel Pastoureau sobre la aceptación tardía del azul en Europa. Sin embargo, ha producido muchas discusiones, y muchas críticas - metodológicas y de principio. En la actualidad, los investigadores parecen dividirse en dos bandos: los *universalistas*, que

[1] "Palazuelo" (p. 162), texte de Claude Esteban et Pablo Palazuelo, maeght éditeur, 1980.
[2] "Computer Graphics, principles and practice", James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner & John F. Hughes, Addison-Wesley publishing Company, Second Edition, 1990.
[3] Para ello, el siguiente artículo representa una excelente introducción, y su bibliografía, como la intensa polémica que lo acompaña, permitirán al lector adentrarse tan profundamente como quiera en la investigación actual sobre la sicología del color: "Are there nontrivial constraints on colour categorization?", B.A.C. Saunders & J. Van Brakel, Behavioral and Brain Sciences (1997), 20, 167-228.

“Los cuatro jinetes del Apocalipsis”, “Beato de Liébana”, 1047.

concluyen en cierto grado de constancia en la apreciación del color[1], que resistiría a los cambios culturales, y los *relativistas*, que piensan lo contrario[2], criticando, en particular, la excesiva importancia del idioma en las encuestas sicológicas...

En todo ello, lo que me parece importante es que, en el estado actual de la investigación, no existe ningún principio general común: ni siquiera la teoría de Hering sobre los pares de oponentes es aceptada por todos, a pesar de que se enseñe en las escuelas como una evidencia. Eso me refuerza en la convicción de que la percepción no puede estudiarse separándola de la expresión: si hay un universalismo, es el del aprendizaje, de las experiencias, de la voluntad expresiva. ¿Acaso un estudio atento de las sombras de color no transforma nuestra mirada?

"Si, una noche de verano, observamos, en la luz anaranjada del sol poniéndose en el occidente y con un cielo azul en el oriente, las sombras de los árboles, vemos muy nítidamente el color azul de las sombras. Más nítidamente aún, podemos observar las sombras de color en invierno, cuando la nieve blanquea las calles. Con un cielo azul nocturno y una iluminación exterior de color anaranjado, vemos sombras luminosas de un azul profundo sobre la nieve. Si pasamos por una tarde de invierno, cuando ha nevado, por una calle iluminada por publicidades multicolores, hallamos en el suelo sombras rojas, verdes, azules y amarillas.

En la pintura, este fenómeno ha sido plasmado por los impresionistas. Cuando, en sus cuadros, pintaron de azul las sombras de los árboles, eso provocó una gran agitación entre los visitantes de sus exposiciones. Hasta entonces había reinado la opinión general de que las sombras debían ser pintadas en gris-negro. (...)

En el museo de artes decorativas de Zurich, he demostrado, en 1944, durante una exposición sobre el color, el fenómeno de las sombras de color. A la luz del día, iluminábamos un objeto blanco con luz roja. Aparecían sombras verdes. La luz verde daba una sombra roja, una luz amarilla tenía una sombra violeta y una luz violeta engendraba una sombra amarilla. Cada luz coloreada producía a la luz del día una sombra del color complementario. Pedí a Hans Finsler, director de la clase de fotografía, que fotografiara este fenómeno. Las fotos en color mostraron que las sombras de color existían realmente y no se debía su presencia a un contraste simultáneo. En este aspecto, cabe subrayar que en estos experimentos todas las mezclas de colores corresponden a la síntesis aditiva de los colores, ya que se trata de mezclas de luces coloreadas y no de pigmentos coloreados.

El problema de las sombras de colores ha sido tratado en el transcurso de otras investigaciones y se han obtenido los resultados sorprendentes que siguen:

1. Con un color de iluminación rojo-naranja sin luz del día han aparecido sombras negras, como en la primera figura. Con una iluminación azul o verde, las sombras han salido igualmente negras.

[1] Por ejemplo: "Color Appearance and the Emergence and Evolution of Basic Color Lexicons", Paul Kay & Luisa Maffi, American Anthropologist 101(4), p.743-760, 2000.

[2] Por ejemplo: "Color Categories Are Not Universal: Replications and New Evidence From a Stone-Age Culture", Debi Roberso, Jules Davidoff & Ian Davies, Journal of Experimental Psychology, vol. 129, n°3, p.369-398, 2000.

“Amarillo y azul”, Mark Rothko (1955).

2. Iluminando el objeto con dos luces coloreadas, sin luz del día, obteníamos lo que sigue:
   Con una luz roja y verde, la luz roja ha dado sombras verdes y la luz verde sombras rojas. Donde las dos sombras se recubrían, apareció una sombra negra, mientras que el color mixto de la luz roja y verde era amarillo.

Si utilizábamos una luz roja-naranja y verde-azul, la luz roja-naranja daba una sombra azul y la luz azul-verde una sombra roja-naranja... Las dos sombras se recubrían produciendo negro y el color mixto de los dos colores de iluminación era rosa-púrpura, como lo muestra la segunda figura.

Si los colores de iluminación eran el verde y el azul, la luz verde producía una sombra azul y la luz azul una sombra verde. Las sombras se recubrían dando negro y el color mixto era verde-azul.

3. Si los colores de iluminación eran tres, rojo-naranja, verde y verde-azul, obteníamos el resultado que muestra la tercera figura. El color de iluminación rojo-naranja producía una sombra azul-verde, la iluminación verde producía una sombra púrpura-rosa y la iluminación verde-azul una sombra amarilla. El recubrimiento de estas tres sombras daba negro. La mezcla de los tres colores de iluminación daba un fondo blanco."

Johannes Itten[1]

En este texto, Johannes Itten afirma, curiosamente, la *realidad* de las sombras de color, como si fueran independientes de la mirada y de su contraste simultáneo, en contra de lo que había sido ya claramente demostrado un siglo antes, con los atentos estudios de Monge al respecto:

"Desde el instante en que Leonardo da Vinci ha distinguido la sombra azul que columbramos por la mañana al amanecer y por la tarde cuando se pone el sol, esta sombra ha sido observada, y los físicos han intentado explicar su producción [...]. Nada es más variado que el color de las sombras; examinándolas con atención, observamos entre ellas todos los colores del prisma: distinguimos sombras rojas, anaranjadas, verdes, azules, violetas más o menos mezcladas con negro [...]."

Así se expresa Jean-Henri Hassenfratz (1755-1827) en su *Premier mémoire sur les ombres colorées* de 1802. Él introdujo, quizás por primera vez, la expresión *color complementario*: "Cuando estas sombras son dos, los colores que presentan son siempre lo que llamaremos colores complementarios".

Sentimos bien que esta cuestión de las sombras de color, como los experimentos de Goethe, pertenecen a lo que podríamos considerar como ilusiones del sentido de la visión, pues tales efectos no parecen poder ser fijados en una emulsión fotográfica. (...)

En su "mémoire sur quelques phénomènes de la vision", de 1789, Gaspard Monge describe el experimento siguiente:

" Cuando el interior de una habitación está iluminado solamente por la luz del sol, transmitida a través de una cortina roja, y si se practica en esta cortina una apertura de dos o tres líneas de diámetro, por la cual la luz directa pueda introducirse; si recibimos este haz de luz sobre una hoja de papel blanco, la parte del papel iluminada por la luz blanca del sol, y cuya imagen en

[1] "Art de la couleur", Johannes Itten, versión francesa de Ré Soupault, Dessain & Tolra, 1985.

“Composición suprematista con plano en proyección”, Kazimir Malevich (1915).

el fondo del ojo del observador sólo está formada por rayos de luz blanca, parece deber mostrarse blanca, y sin embargo se muestra de un muy lindo verde.(...)".

Monge ha tenido el mérito de saber relacionar esta serie de experimentos con otra serie que pertenece a lo que llamaríamos hoy en día la persistencia de la sensación de color independientemente de la iluminación (*constancia de color*). Es justamente esta relación que le ha permitido entender el fenómeno de las sombras de color. Describamos en términos actuales estas observaciones.

Todo utilizador de películas fotográficas sabe – o debería saber – que encontramos películas adaptadas a la luz del día y otras a las tomas bajo luz artificial.

Consideremos una camisa blanca, es decir capaz de reflejar todos los colores que recibe, sin absorber nada de ellos. La blancura se define aquí en luz natural, es decir con un espectro solar. Por consiguiente, iluminada por la luz artificial de las lámparas de tungsteno, la camisa no reemite exactamente un blanco. De hecho, si la fotografiamos con una película adaptada a la luz del día, la camisa parece singularmente amarillenta, para desesperación del fotógrafo. Para corregir este efecto lamentable, compraremos una película que corrige el color de modo que se obtenga una sensación de blanco más puro a pesar de la dominante amarilla. Pero, ¿porqué compensar así? ¿La camisa no será amarilla en la realidad? Es simplemente porque, en el proceso de la visión, nuestro cerebro efectúa automáticamente esta compensación: en cierta medida, el hombre percibe los colores independientemente de la iluminación; la camisa sigue pareciendo blanca, aún cuando el espectro emitido no es el del blanco. Tal constatación muestra que la percepción del color de un objeto depende a la vez de luz reflejada por este objeto, pero también de la luz que ilumina su entorno.

Pero volvamos a Monge:

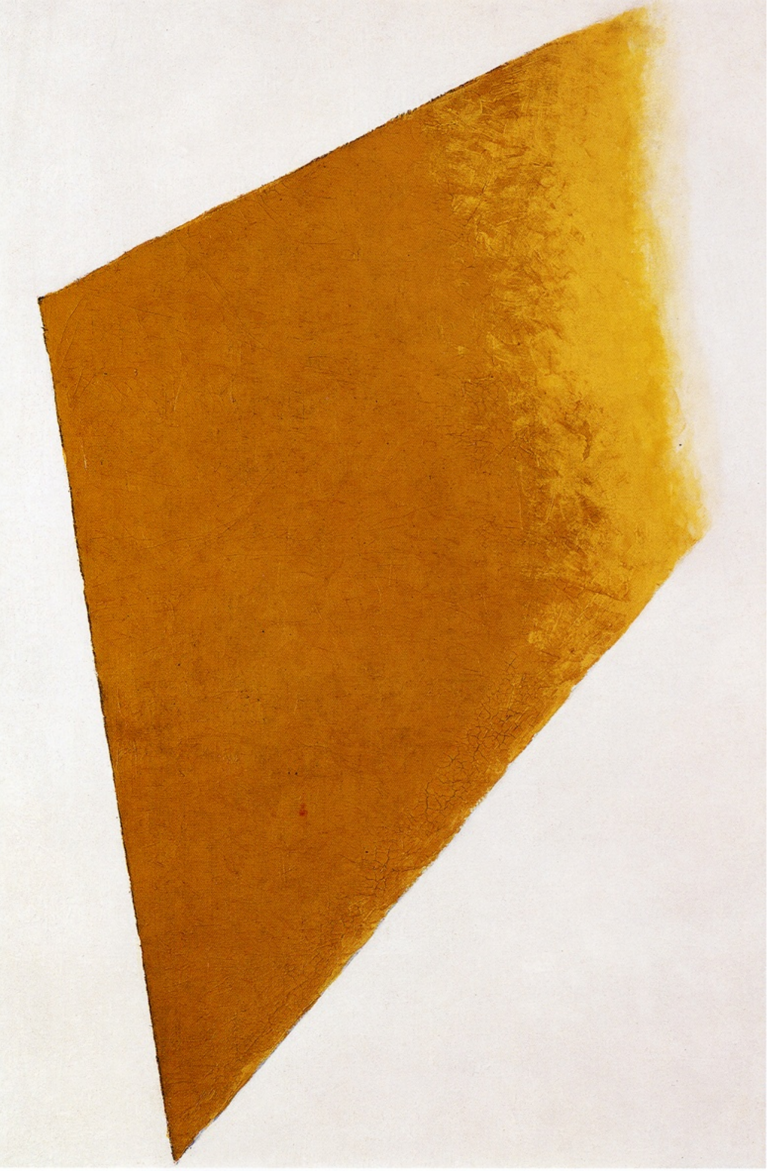
"Supongo que a través de un cristal rojo, es decir un cristal que tiene la facultad de dejar pasar los rayos rojos de cierto tinte y de absorber o reflejar todos los otros rayos, miramos una serie de objetos de diferentes colores; parece que podemos prever, con relación a los cuerpos blancos, que los rayos de todos los colores emitidos por sus superficies se reducen a los solos rayos rojos pasando por el cristal. (...) En realidad, los cuerpos blancos y los rojos parecen efectivamente del mismo color, pero no los vemos rojos, como parece natural pensarlo: los vemos blancos. (...)"

Interpretemos ahora estas observaciones.

Cuando miramos una serie de objetos componiendo una escena multicolor, nos es fuerza constatar que no hay una relación evidente y directa entre la composición de la luz enviada al ojo por cada superficie y la sensación de color que esta superficie procura al observador. El ojo abraza esta escena multicolor en su conjunto y el cerebro se aplica, en particular, en buscar su referencia de blanco. Convoca de algún modo la luz blanca virtual que daría a los objetos su "verdadero" color. Bajo luz artificial, por ejemplo, el amarillo de la lámpara de tungsteno se percibe, sin que nos demos cuenta, como blanco de referencia. Apreciados no en el absoluto, pero los unos en relación con los otros, los colores son leídos, no por lo que son, sino por lo que serían si los objetos fuesen iluminados por luz blanca solar.

Es en la sombra de color que este proceso de adaptación toma su forma más radical y conduce a la ilusión óptica. Cuando iluminamos una larga porción de pared blanca con una luz roja y luego superponemos generosamente la luz difusa del día, el sistema visual, tras un breve período de adaptación, tiende a considerar esta mezcla rosada como su referencia de blanco.

En la sombra del objeto que intercepta el haz rojo, falta evidentemente el rojo; en cambio, la luz del día, menos direccional, se inscribe en ella. Paradójicamente, el verdadero blanco, reflejado por la pared en esta parte de la sombra, no es considerado como tal por el cerebro. Él le prefiere, como referencia de blanco, el fondo general rosa de la pared. Así, esta luz del día reflejada en la parte de la sombra es interpretada por el sistema visual como un blanco al cual faltaría rojo, es decir como un verde. Es la razón por la cual, en este experimento, la sombra



“Pintura suprematista”, Kazimir Malevich (1917-18).

aparece siempre como luz complementaria para el ojo de la de la lámpara coloreada que proyecta la sombra.

A la luz de esta interpretación científica, entendemos mejor las frases más vagas y misteriosas de Goethe, como: "Cuando el ojo columbra el color, entra enseguida en actividad y, conforme a su naturaleza, produce inmediatamente otro color tan inconscientemente como necesariamente, el cual, junto con el que había sido dado, encierra la totalidad del círculo cromático".

Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac[1]

Esta última cita de Goethe explica, en mi opinión, el error de Itten con respecto a las sombras de color. Él interpretó la bella frase del escritor de una manera mística, e hizo de la armonía, en el sentido del "equilibrio de las fuerzas", el centro de su teoría, considerando que la mirada fuera guiada por un misterioso y sublime anhelo de armonía, capaz de suscitar por sí mismo el contraste simultáneo. Rechazó el balance de blancos, demasiado pragmático, y eso le condujo a negar el hecho de que los colores complementarios, el contraste simultáneo y las sombras de color no son más que diferentes expresiones de un mismo proceso visual. Error benigno, sin embargo, pues el balance de blanco, bien entendido, no deja de ser un proceso admirable, que la expresión poética de Goethe no contradice. Piénsese en el uso sutilísimo que nuestra mirada hace del color blanco, el cual resulta ser, a la vez, diapasón de los colores, horizonte de los grises, disolución de las saturaciones.

He dejado para el fin "Arte del color", el mejor libro - el único en mi opinión - que se ha escrito en el siglo XX sobre el color con la intención y el resultado de abarcar todas sus manifestaciones y posibilidades. Johannes Itten lo consiguió porque conocía de verdad la pintura: la selección de imágenes que ilustran su libro es *perfecta*. Podríamos volver a escribir un "Arte del color", con una selección de imágenes totalmente distinta, pero no podemos sustituir ninguna de las ilustraciones del libro por otra que nos guste más sin desequilibrar totalmente la obra.

Itten estructura el color a partir de siete contrastes:

"Hablamos de contraste cuando, entre dos efectos de color por comparar, podemos establecer diferencias o intervalos sensibles. Cuando estas diferencias alcanzan un máximo, hablamos de contrastes de oposición, o polares. Así, los términos grande-pequeño, negro-blanco, cálido-frío en su punto más elevado son contrastes polares. Los órganos de nuestros sentidos sólo pueden percibir mediante comparaciones. Discernimos que una línea es alargada si otra más corta se encuentra cerca de ella para comparar. La misma línea nos parece corta si para la comparación tenemos una más larga. Del mismo modo, los efectos de colores pueden intensificarse o debilitarse por contrastes coloreados.

Cuando buscamos los modos de acción característicos de los colores, podemos establecer siete efectos de contraste diferentes. Estos son tan diversos en sus leyes que es preciso estudiar cada uno de estos contrastes para sí mismo. Cada uno de estos siete contrastes es tan particular y único en sus caracteres especiales y su valor de formación, en su acción óptica, expresiva y constructiva, que podemos reconocer en ellos las posibilidades fundamentales de la formación de los colores. Los siete contrastes de colores son:

1. Contraste del color en sí 2. Contraste claro-oscuro
3. Contraste cálido-frío 4. Contraste de los complementarios
5. Contraste simultáneo 6. Contraste de calidad 7. Contraste de cantidad"

Johannes Itten

[1] "Traité des couleurs", Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.

“Disolución de un plano”, Kazimir Malevich (1917).

Para nosotros, sin embargo, el contraste de los complementarios y el contraste simultáneo son uno solo, ya que el segundo se debe a un desequilibrio en el primero. El contraste de los complementarios varía luego desde un polo "expresivo" (como en muchos cuadros del Greco, por ejemplo) hasta un polo "armonioso" (como, por ejemplo, en las pinturas de Van Eyck).

Un gran aporte de Itten es el contraste de cantidad, que viene de los trabajos de Goethe y de Schopenhauer, los cuales se preguntaban qué cantidad de tal color - de amarillo, por ejemplo - es necesaria para equilibrar determinada cantidad de tal otro color - de violeta, por ejemplo - en una composición. En la visión sintética de Itten, sin embargo, este contraste cobra un sentido añadido: la cantidad es un atributo del color, y, por lo tanto, el color puede describirse en relación a la pintura como el sonido en relación a la música: como su objeto propio y único. Sin embargo, Itten no renunció nunca a la definición clásica de su arte, como "forma y color". Eso le impidió, creo, llevar su intuición a sus últimas consecuencias. Le faltó enunciar el "contraste de vecindad", el cual, junto con el de cantidad, permite describir completamente la disposición espacial de los colores en un cuadro, sin abandonar el enfoque relativista: los colores se describen por sus cantidades y posiciones respectivas.

Aclarado eso, propongo enunciar y ordenar así los siete contrastes que estructuran el color:

1. Contraste del color en sí	(frecuencia dominante de la luz)
2. Contraste de calidad	(saturación de la luz)
3. Contraste claro – oscuro	(intensidad de la luz)
4. Contraste cálido – frío	(temperatura de color de la luz)
5. Contraste de los complementarios	(balance de blancos)
6. Contraste de cantidad	(extensión espacial)
7. Contraste de vecindad	(ubicación espacial)

Los tres primeros pertenecen a la serie "ondulatoria", basada en la consideración del espectro newtoniano (en inglés: "hue", "saturation", "value": sistema HSV), y equiparables, en la música, con los contrastes de altura, de timbre y de dinámica.

Los dos siguientes pertenecen a la serie "energética", una organización distinta de la primera, de donde el ojo extrae sus sensaciones de calidez, de profundidad o de equilibrio. No tienen equivalentes en la música[1], y manifiestan la diferencia entre la luz (onda electromagnética) y el sonido (onda material).

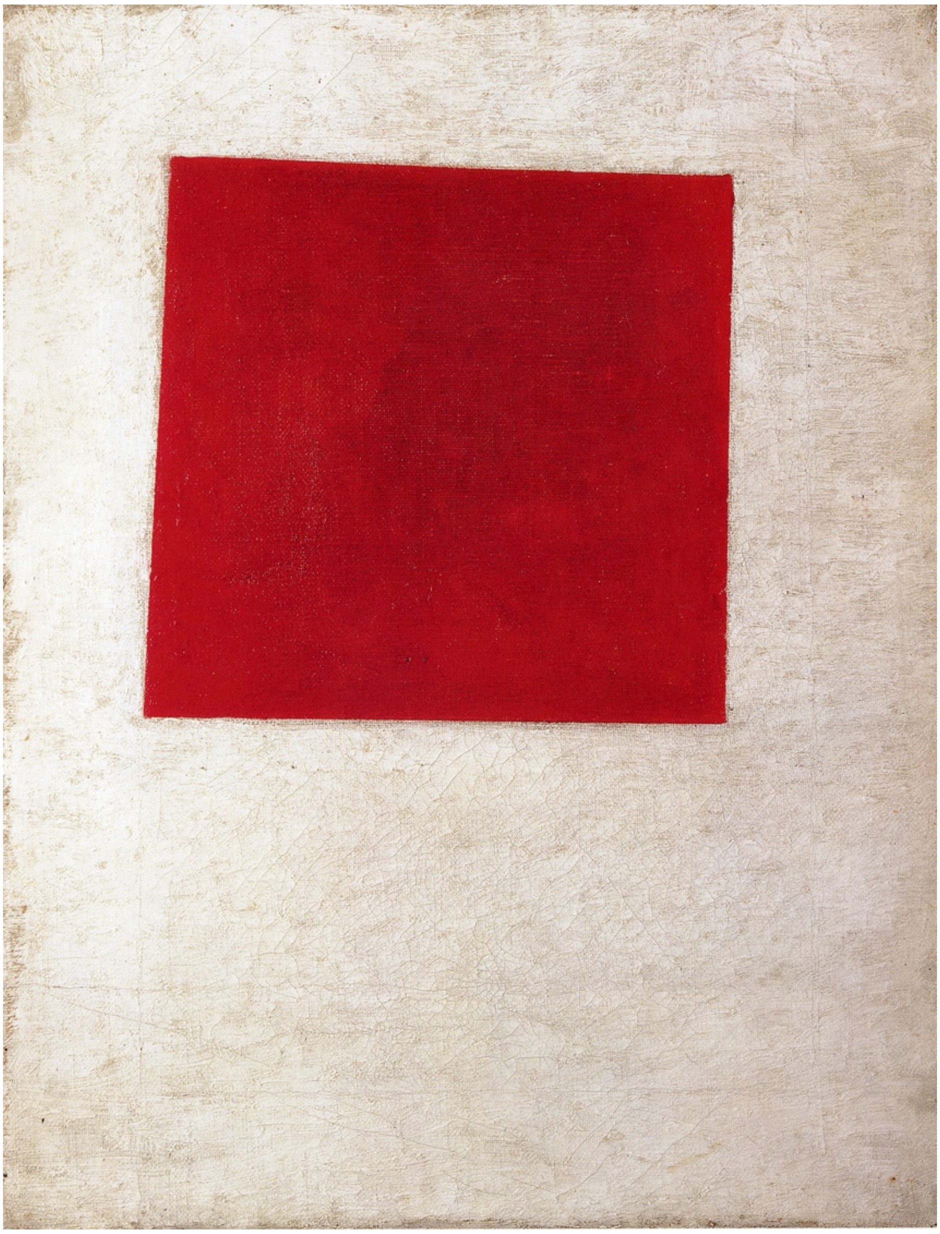
Los dos últimos pertenecen a la serie "espacial", y también son necesarios en la música, aunque ausentes de la partitura clásica.

Tenemos así un sistema descriptivo del color, muy eficaz y muy libre, que puede aplicarse a todas las obras de las artes visuales, y, lo que es más importante, un sistema *constructivo*, que permite desarrollar la capacidad expresiva del color, sin dogmatismo, y sin caer en los paralogismos de la psicología experimental.

Y sin embargo, no hemos hecho nada más que proponer una estructura fuera-del-tiempo. Falta, para el color, una estructuración dentro-del-tiempo, un estudio de los contrastes en el tiempo. Pero, sobre este tema, es verdad, no han escrito los Autores...

---

[1] Salvo la analogía que nuestro oído establece entre la altura del sonido y la fuerza de la gravedad. Comparándola con el contraste cálido-frío en su expresión cercano-lejano (perspectiva atmosférica), sentimos toda la diferencia que hay entre la luz, perceptivamente inmaterial, y el sonido, perceptivamente vinculado con lo terrenal: cuando el sonido crece, se hace "volumen"; cuando crece la luz, se hace etérea...



"Realismo pictórico de una mujer pesada en dos dimensiones" (ó: "Cuadrado rojo"), Kazimir Malevich (1915).

- En un día... -

En un día venidero, salvaremos las dificultades técnicas, dominaremos los siete contrastes del color fuera-del-tiempo, y lo animaremos, en su espacio, como lo hizo la música con los sonidos.

"Sengle avait lu dans un livre chinois l'ethnographie d'un peuple... Dévolerait outre-mer."[1]

[1] "Les jours et les nuits", Alfred Jarry, Mercure de France, 1948. *Sengle había leido en un libro chino la etnografía de un pueblo… Devolaría ultra-mar.*

Origen de las ilustraciones

p.191 iz: - "La coronación de Napoleón", Jacques-Louis David (1805-07), óleo sobre lienzo, 629 x 979 cm, Musée du Louvre, Paris, *in* "Neoclasicismo y romanticismo", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 2000.
- "La coronación de Carlos X", François Gérard (1827), óleo sobre lienzo, 514 x 972 cm, Musée des Beaux Arts, Chartres, *in* "Neoclasicismo y romanticismo", Rolf Toman, Könemann, Colonia, 2000.

p.192 iz: - Cuatro miniaturas de Jean Fouquet, in exposición monográfica, BnF.

p.193 iz: - "Orto II", Pablo Palazuelo (1967-69), óleo sobre lienzo, 226 x 170 cm, colección particular, *in* "Palazuelo", Claude Esteban, Ed. Maeght, 1980.
- "Mandala II", Pablo Palazuelo (1964), óleo sobre lienzo, 235 x 144 cm, colección Zentner, *in* "Palazuelo", Claude Esteban, Ed. Maeght, 1980.

p.194 iz: - "Orto IV", Pablo Palazuelo (1969), óleo sobre lienzo, 226 x 170 cm, colección particular, *in* "Palazuelo", Claude Esteban, Ed. Maeght, 1980.

p.195 iz: - "Beato de Liébana", 1047, 36 x 28 cm, Biblioteca Nacional: Mss. Vitr. 14-2.

p.196 iz: -"Amarillo y azul", Mark Rothko (1955), óleo sobre lienzo, 259.5 x 169.5 cm, Carnegie Museum of Art, Pittsburgh, *in* "Mark Rothko", catálogo de la exposición en la Fundació Joan Miró (25 nov. 2000 – 28 enero 2001).

p.197 iz: -"Composición suprematista con plano en proyección", Kazimir Malevich (1915), óleo sobre lienzo, 57 x 57 cm, colección particular, *in* "Kazimir Malevich: suprematism", Matthew Drutt, Guggenheim Museum, 2003.

p.198 iz: -"Pintura suprematista", Kazimir Malevich (1917-18), óleo sobre tela, 106 x 70.5 cm, Stedelijk Museum, Amsterdam, *in* "Kazimir Malevich: suprematism", Matthew Drutt, Guggenheim Museum, 2003.

p.199 iz: -"Disolución de un plano", Kazimir Malevich (1917), óleo sobre tela, 133 x 78 cm, colección particular, *in* "Kazimir Malevich: suprematism", Matthew Drutt, Guggenheim Museum, 2003.

p.200 iz: -"Realismo pictórico de una mujer pesada en dos dimensiones" (ó: "Cuadrado rojo"), Kazimir Malevich (1915), óleo sobre tela, 40 x 30 cm, colección particular, *in* "Kazimir Malevich: suprematism", Matthew Drutt, Guggenheim Museum, 2003.

Bibliografía selecta

[Las referencias utilizadas en el texto están citadas en pie de página, y las de las imágenes al final de cada capítulo. Aquí, he seleccionado solamente los libros y artículos más importantes, que puedan interesar el lector deseoso de profundizar en algunos de los temas tratados.]

Sobre la percepción en general:

"Carta sobre los ciegos", Denis Diderot (1740), versión castellana de Julia Escobar, Fundación ONCE (sic) y Editorial Pre-Textos, Valencia, 2002.
"Laocoonte", Gotthold Ephraim Lessing (Berlín, 1766), versión castellana de Eustaquio Barjau, Editorial Tecnos, Madrid, 1990.
"Dramaturgia de Hamburgo", Gotthold Ephraim Lessing, versión castellana de Feliu Formosa, Publicaciones de la Asociación de Directores de Escena de España, Madrid, 1993.
"Aphorismes", Georg Cristoph Lichtenberg, versión francesa de Marthe Robert, Éditions Denoël, Paris, 1985.
"Conversations de Goethe avec Eckermann", Johann Wolfgang von Goethe, versión francesa de Jean Chuzeville, nrf Gallimard, 1949.
"Intégrale des contes et récits", Ernst Theodor Amadeus Hoffmann, versión francesa de Albert béguin, Madeleine Laval y otros, Editions Phébus, Paris, 1979 – 1983.
"Sobre el teatro de marionetas", Heinrich von Kleist, versión castellana de Jorge Riechmann, Ediciones Hiperión, Madrid, 1988.
"Du hasard dans la production artistique", August Strindberg, L'Échoppe, 1990.
"Lascaux ou la naissance de l'art", Georges Bataille, Skira, Genève, 1955.
"El significado en las artes visuales", Erwin Panofsky, versión castellana de Nicanor Ancochea, Alianza Editorial, Madrid, 1979.
"La perspectiva como forma simbólica", Erwin Panofsky, versión castellana de Virginia Careaga, Fábula Tusquets, Barcelona, 1999.
"Arte y percepción visual", Rudolf Arnheim, versión castellana de María Luisa Balseiro, Alianza Editorial, Madrid, 2001.
"Los fundamentos de la arquitectura en la edad del humanismo", Rudolf Wittkower (1949), versión castellana de Adolfo Gómez Cedillo, Alianza Editorial, Madrid, 1995.
"Luminosidad lógica", Steen Jørgensen, Edicions UPC, Barcelona, 2000.
"Light years ahead – The story of the PH lamp", Louis Poulsen, Ed.Tina Jørstian & Poul Erik Munk Nielsen, Dinamarca, 1994.
"Analógico y digital", Otl Aicher, versión castellana: Yves Zimmermann, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 2001.

"To Honor Fechner and Repeal His Law", S. S. Stevens, Science, Vol. 133, pp. 80-86, 13/01/1961.

Sobre el color:

"Óptica", Isaac Newton, versión castellana de Carlos Solís, Ediciones Alfaguara, Madrid, 1977.
"Teoría de los colores", Johann Wolfgang von Goethe, Colegio Oficial de Arquitectos Técnicos de Murcia, 1999.
"Art de la couleur", Johannes Itten, versión francesa de Ré Soupault, Dessain & Tolra, 1985.

"La interacción del color", Josef Albers, versión castellana de María L.uisa Balseiro, Alianza Forma, 1979.
"Palazuelo", texte de Claude Esteban et Pablo Palazuelo, maeght éditeur, 1980.
"Color Appearance Models", Mark D. Fairchild, Ed. Addison Wesley Longman, Inc., 1997.
"Bleu : histoire d'une couleur", Michel Pastoureau, Éditions du Seuil, 2000.
"Traité des couleurs", Libero Zuppiroli & Marie-Noëlle Bussac, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.

"The pavilion and the court. Cultural and spatial problems of De Stijl architecture", The Architectural Review, Dec. 1981, p. 359-368.
"Are there nontrivial constraints on colour categorization?", B.A.C. Saunders & J. Van Brakel, Behavioral and Brain Sciences (1997), 20, 167-228.
"Color Appearance and the Emergence and Evolution of Basic Color Lexicons", Paul Kay & Luisa Maffi, American Anthropologist 101(4), p.743-760, 2000.
"Color Categories Are Not Universal: Replications and New Evidence From a Stone-Age Culture", Debi Roberso, Jules Davidoff & Ian Davies, Journal of Experimental Psychology, vol. 129, n°3, p.369-398, 2000.
"A Arras, la querelle du dessin et de la couleur", artículo de Philippe Dagen en el diario « Le Monde » del 12/03/2004.

Sobre la música :

"Musique. Architecture.", Iannis Xenakis, Éditions Casterman, Tournai, 1971.
"Écrits", Luigi Nono, versión francesa dirigida por Laurent Feneyrou, Christian Bourgois Éditeur, 1993.
"Il paese fertile", Pierre Boulez, versión italiana: Guillemette Denis, Leonardo Editore, Milano, 1989.

Pensadores griegos:

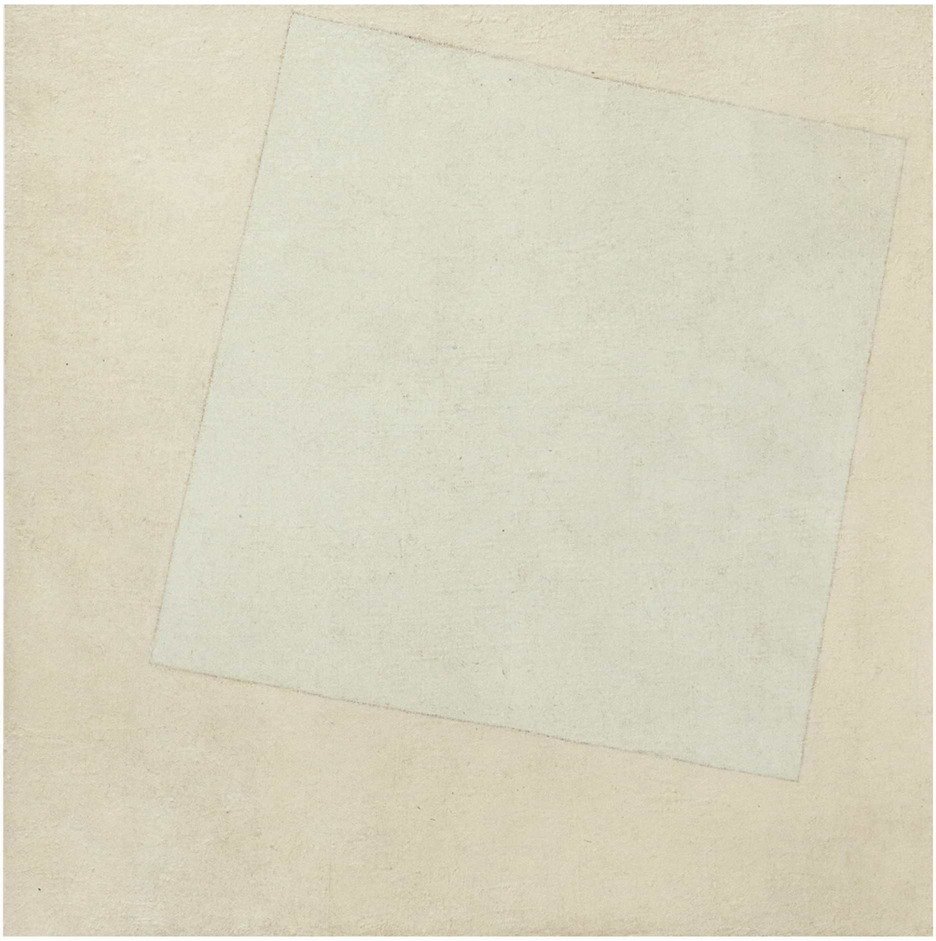
"Les présocratiques", versión francesa de Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre & Jean-Louis Poirier, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1988.
"Œuvres complètes", Platon, versión francesa de Léon Robin, bibliothèque de la Pléiade, Éditions Gallimard, 1989.
"De l'âme", Aristote, versión francesa de E. Barbotin, Collection Tel, Gallimard, 1989.
"Metafísica", Aristóteles, edición trilingüe por Valentín García Yebra, Editorial Gredos, 1998.
"Éthique à Nicomaque", Aristote, versión francesa de J. Tricot, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1990.
"Óptica. Catóptrica", Euclides, versión castellana de Paloma Ortiz García, Editorial Gredos, 2000.
"L'optique et la catoptrique", Euclide, versión francesa de Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, París-Brujas, 1938.
"Manuel d'Harmonique", Nicomaque de Gérase, versión francesa de Charles Émile Ruelle, annuaire de l'Association pour l'encouragement des Études grecques en France, Baur, Paris, 1881.
"Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide", Proclus de Lycie, versión francesa de Paul ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

Sobre la perspectiva :

"Les dix livres d'architecture", Vitruve, versión francesa de Claude Perrault (1684), éditions Pierre Mardaga, Liège, 1988.
"De prospectiva pigendi", Piero della Francesca, versión italiana de Giusta Nicco-Fasola, Casa Editrice Le Lettere, Firenze, 1984.
"Cuaderno de notas", Leonardo Da Vinci, versión castellana, colección Poesía y Prosa Popular, YERICO, Madrid, 1983.
"Tratado de pintura", Leonardo Da Vinci, versión castellana de Ángel González García, ediciones Akal, Madrid, 2004.
"De Artificiali Perspectiva", Jean Pèlerin (1521), Bibliothèque Nationale de France, RES-V-169.
"Leçons de perspective positive", Jacques Androuet Du Cerceau (Paris, 1576), École Nationale Supérieure Des Beaux-Arts, ejemplar n°24858.
"Ombres et Lumières, un manuel de tracé et de rendu qui considère l'architecture comme une machine optique", Jean-Paul Jungmann, les éditions de la Villette, 1995.
"El origen de la perspectiva", Hubert Damisch, 1987, versión castellana de Federico Zaragoza Alberich, Alianza Editorial, Madrid, 1997.

Geometría:

"Invitation à la géométrie", Francis Borceux, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1986.
"Computer Graphics, principles and practice", James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner & John F. Hughes, Addison-Wesley publishing Company, Second Edition, 1990.
"Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Gerald Farin, Academic Press, Inc., Second Edition, 1993.



"He destrozado las ataduras azules y los límites del color. Sumérgete en el blanco y nada en su infinito".

K. Malevich

"Cuadrado blanco sobre blanco", Kazimir Malevich (1918).

Epílogo [1]

Una mirada: Amen

[1] La cita es un aforismo de G. C. Lichtenberg (1742 – 1799):
"Aphorismes", Georg Cristoph Lichtenberg, versión francesa de Marthe Robert, Éditions Denoël, Paris, 1985.